Integración bilineal bornológica

Por Maria E. Ballve y P. Jimenez Guerra*

Recibido: 20 enero 1989

**Académico correspondiente*

Abstract

An integration theory is developed for functions valued in convex bornological spaces with respect to bornological vector measures, proving Radon-Nikodym's type theorems and obtaining as applications some theorems about the representation of bounded linear operators and the existence of the tensor product of bornological measures.

Dentro del proceso de extensión de la teoría de integración de funciones vectoriales con respecto a medidas (vectoriales) valoradas en espacios de operadores, iniciado a partir de la aparición del conocido trabajo de R. G. Bartle [8] (1956), R. Rao-Chibukula y S. A. Sastry introducen en su trabajo [23] de 1983 una teoría de integración tipo Bartle en la que todos los espacios que aparecen son ya localmente convexos (una integración totalmente análoga se encuentra también en [26]), apareciendo posteriormente otros trabajos (ver [1], [2], [3], [12], [15], [16], [17], [21] entre otros) en los que se hace un desarrollo de esta teoría estudiándose problemas de derivación (de Radon-Nikodym), representación de operadores, existencia del producto tensorial de medidas y teoremas de Fubini, espacios L^p y otros.

Hay que resaltar el hecho de que esta teoría de integración tiene un marcado carácter bornológico, lo que junto a los resultados obtenidos al estudiar la dualidad de los espacios L^p (para integrales como la desarrollada en [24], ver [5] y [7]), ha ido haciendo cada vez más patente la necesidad y utilidad de hacer un desarrollo de la misma dentro del marco de los espacios bornológicos. Por otra parte, en [10] se desarrolla una teoría de la medida e integración bornológica (respecto a medidas escalares), para la que en [11] se da un teorema de Radon-Nikodym y en [5] y [6] se estudian los correspondientes espacios L^p.

En la primera parte de este trabajo, se desarrolla una teoría de integración de funciones vectoriales respecto a medidas, también vectoriales, en el contexto de los espacios bornológicos convexos. Esta integral engloba (presentando diversas ventajas) a la desarrollada en [23], que se obtiene a partir de ésta, utilizando las correspondientes bornologías de von Newmann. En el caso particular de que la medida respecto a la que se integra sea una medida positiva, las funciones integrables que aquí aparecen, coinciden con las funciones bornológicas Bochner-integrables definidas en [10]. Por otra parte, la noción de controlación de medidas utilizada aquí (y que extiende a la dada en [25]) ha permitido caracterizar (como es habitual en espacios topológicos) mediante convergencia de martingalas, los espacios bornológicos convexos que tienen la propiedad de Radon-Nikodym y dar un teorema de Radon-Nikodym sin utilizar la "controlación de medidas" (técnica empleada en [22], [1], [2] y [21]), mediante una técnica basada en el "conjunto de promedios" de una medida, que recuerda a las técnicas (de Rieffel) clásicas para espacios de Banach (y la integral de Bochner).

Como aplicaciones, se obtienen un teorema de representación de ciertos operadores lineales acotados y un teorema sobre la existencia del producto tensorial de medidas bornológicas (que como sabemos, no existe en general, ver por ejemplo [9], [14] y [16]).

Sean $(X, \mathfrak{B}_1)$, $(Y, \mathfrak{B}_2)$ y $(Z, \mathfrak{B}_3)$ tres espacios bornológicos convexos separados (en lo referente a los espacios bornológicos y sus propiedades nos remitimos a [18] y [19]) de los que Z se supondrá además completo y consideremos una aplicación bilineal y acotada b de $X \times Y$ *en* Z (en adelante denotaremos por xy a la imagen por esta aplicación del par $(x, y) \in X \times Y$). Denotaremos por Σ una σ-álgebra de partes de un conjunto Ω y por $\beta: \Sigma \to Y$ una medida bornológica. Siguiendo la notación usual de Grothendieck, para cada conjunto $B \in \mathfrak{B}_1$ denotaremos por X_B (y análogamente en los restantes espacios) el subespacio de X generado por B con la topología definida por el funcional de Minkowski q_B de B en X_B.

Diremos que β es una medida de *semivariación acotada* si

$$I(S_{B_1}) = \{ \int_\Omega s\, d\beta: s \in S_{B_1} \} \in \mathfrak{B}_3$$

para todo disco acotado $B_1 \in \mathfrak{B}_1$, siendo S_{B_1} la familia de las funciones simples B_1-valoradas definidas en Ω (las funciones simples y su integral se definen de manera habitual, ver por ejemplo [23]). En adelante supondremos que la medida β es de semivariación acotada.

Para cada par de discos acotados $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ y $B_3 \in \mathfrak{B}_3$ con $I(S_{B_1}) \subseteq B_3$, se define

$$\|\beta\|_{B_1 B_3}(A) = \sup \{q_{B_3}(\int_\Omega s\, d\beta): s \in S_{B_1}, s \cdot \chi_{\Omega - A} \equiv 0\}$$

para cada $A \in \Sigma$.

Diremos que un conjunto $A \in \Sigma$ es *β-nulo* si $\|\beta\|_{B_1 B_3}(A) = 0$ para cualesquiera que sean los discos acotados $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ y $B_3 \in \mathfrak{B}_3$ tales que $I(S_{B_1}) \subseteq B_3$.

Si para cada par de discos acotados $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ y $B_3 \in \mathfrak{B}_3$ con B_3 completante e $I(S_{B_1}) \subseteq B_3$, existe una medida $\nu_{B_1 B_3}: \Sigma \to \mathbb{R}_+$ tal que $\|\beta\|_{B_1 B_3} \ll \nu_{B_1 B_3}$, diremos que la medida β *verifica la *-condición.* De manera usual (ver [8]) se dice que la medida β *verifica la **-condición* si se puede encontrar una medida no negativa y finita definida en Σ tal que $\|\beta\|_{B_1 B_3} \ll \nu$

para cualesquiera que sean los discos acotados $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ y $B_3 \in \mathfrak{B}_3$ tales que $I(S_{B_1}) \subseteq B_3$.

Definición 1.— Diremos que una función $f. \Omega \to X$ es *medible* si existe una sucesión (f_n) de funciones simples (X-valoradas) que converge en c.t.p. en sentido de Mackey a la función f (e.d. existen un conjunto β-nulo $A \in \Sigma$ y un disco acotado $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ tales que $(f_n(t))$ converge a $f(t)$ en X_{B_1} para todo $t \in \Omega - A$).

De las propiedades usuales para funciones valoradas en espacios de Banach y medidas escalares, se deduce fácilmente que si la medida β tiene la **-propiedad, entonces si una función f es límite (en sentido de Mackey) de una sucesión de funciones medibles, entonces f es medible.

Una función $f\colon \Omega \to X$ medible, se dice que es *integrable* si existen una sucesión (f_n) de funciones simples X-valoradas, un conjunto β-nulo $N \in \Sigma$ y un disco acotado $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ tales que la sucesión $(f_n(t))$ converge a $f(t)$ en X_{B_1} para todo $t \in \Omega - N$ y se verifica que

$$\lim_{\|\beta\|_{B_1 B_3}(A) \to 0} q_B \left(\int_A f_n \, d\beta \right) = 0 \tag{1.1}$$

uniformemente en $n \in \mathbb{N}$, para todo disco acotado y completamente $B_3 \in \mathfrak{B}_3$ tal que $I(S_{B_1}) \subseteq B_3$. Una tal sucesion (f_n) se denominará *sucesión aproximadora* de f.

Evidentemente, si β tiene la *-condición, entonces para cada función integrable f y cada conjunto $A \in \Sigma$ existe un vector

$$\int_A f \, d\beta \in Z,$$

que denominaremos *integral* de f en A respecto de β, tal que es límite (en sentido de Mackey) de la sucesión

$$\left(\int_A f_n \, d\beta \right)$$

cualesquiera que sea la sucesión aproximadora (f_n) de la función f, ya que si (f_n) es una sucesión aproximadora de la función f tal que existen un conjunto β-nulo $N \in \Sigma$ y un disco $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ tales que $(f_n(t))$ converge a $f(t)$ en X_{B_1}, para todo $t \in \Omega - N$, entonces para todo disco acotado y completante $B_3 \in \mathfrak{B}_3$ que contiene a $I(S_{B_1})$ se tiene que

$$\left(\int_A f_n \, d\beta \right)$$

es una sucesión de Cauchy en Z_{B_3}, ya que para cada $\varepsilon > 0$, del teorema de Egorov se deduce la existencia de un conjunto $C \in \Sigma$ tal que

$$q_{B_3}\left(\int_C f_n \, d\beta\right) \leqslant \varepsilon/3$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y (f_n) converge a f uniformemente sobre $\Omega - C$ en X_{B_1} y, por consiguiente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\varepsilon/3)(f_n - f_m)\chi_{\Omega - C} \in S_{B_1}$ y, por tanto,

$$q_{B_3}\left[\int_{\Omega - C} (f_n - f_m)\, d\beta\right] \leqslant \varepsilon/3.$$

De la completitud del espacio Z_{B_3}, resulta la existencia de

$$\lim_n \int_\Omega f_n \, d\beta = \int_\Omega f \, d\beta.$$

(Para probar la existencia de

$$\int_A f \, d\beta \qquad \text{con} \qquad A \in \Sigma$$

basta aplicar como es sabido, el razonamiento anterior a la función $f\chi_A$.) La independencia de la integral respecto a la sucesión aproximadora elegida, resulta inmediatamente de las propiedades de la semivariación de la medida.

En adelante supondremos que la medida β tiene la *-propiedad.

***Proposición** 2.*— Toda función medible $f\colon \Omega \to X$ tal que $f(\Omega) \in \mathfrak{B}_1$, es integrable.

Demostración.— Evidentemente, se pueden encontrar una sucesión de funciones simples (f_n) y un disco acotado $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ tales que (f_n) converge en c.t.p. a f en X_{B_1} y

$$\bigcup_n f_n(\Omega) \cup f(\Omega) \subseteq B_1,$$

de donde se sigue trivialmente el resultado, ya que si $B_3 \in \mathfrak{B}_3$ es un disco acotado y completante que contiene a $I(S_{B_1})$, entonces

$$q_{B_3}\left(\int_A f_n \, d\beta\right) \leqslant \|\beta\|_{B_1 B_3}(A)$$

para todo $A \in \Sigma$.

Teorema 3.– (De la convergencia acotada.) Si la medida β tiene la $**$-propiedad y (f_n) es una sucesión de funciones integrables que converge en c.t.p. en sentido de Mackey, a una función f y

$$\bigcup_n f_n(\Omega) \in \mathfrak{B}_1,$$

entonces la función f es integrable y

$$\lim_n \int_A f_n \, d\beta = \int_A f \, d\beta \tag{3.1}$$

para todo conjunto $A \in \Sigma$.[1]

Demostración.– Evidentemente, la función f es medible y $f(\Omega) \in \mathfrak{B}_1$, por consiguiente, de la proposición 2 resulta que f es integrable. Además, existen sendos discos acotados $b_1 \in \mathfrak{B}_1$ y $B_3 \in \mathfrak{B}_3$ tales que

$$\bigcup_n f_n(\Omega) \cup f(\Omega) \subseteq B_1, \quad I(S_{B_1+B_1}) \subseteq B_3$$

y B_3 es completante. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\|\beta\|_{B_1+B_1B_3}(C) \leqslant \varepsilon$ para todo $C \in \Sigma$ con $\nu(C) \leqslant \delta$, y existe $A \in \Sigma$ tal que $\nu(\Omega - A) \leqslant \delta$ y la sucesión (f_n) converge a f en X_{B_1} uniformemente sobre A y, por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q_{B_1}[f_n(t) - f(t)] \leqslant \varepsilon$ para todo $t \in A$ y todo $n \geqslant n_0$ y, por tanto, se tiene que

$$q_{B_3}\left[\int_\Omega (f_n - f)\, d\beta\right] \leqslant q_{B_3}\left[\int_{\Omega-A} (f_n - f)\, d\beta\right] + q_{B_3}\left[\int_A (f_n - f)\, d\beta\right] \leqslant$$

$$\leqslant \|\beta\|_{B_1+B_1B_3}(\Omega - A) + \varepsilon \, \|\beta\|_{B_1+B_1B_3}(A) \leqslant 2\varepsilon$$

para todo $n \geqslant n_0$. De donde resulta trivialmente (3.1).

DERIVACION DE MEDIDAS

Definición 4.– Diremos que una medida bornológica $\alpha: \Sigma \to Z$ está *β-controlada* si existen una subálgebra $\Sigma' \subseteq \Sigma$ y una familia $(f_A)_{A \in \Sigma'}$ de funciones β-integrables tales que se verifican:

4.1. $\sigma(\Sigma') = \Sigma$.

---

[1] Tanto en la proposición 2 como en el teorema 3, basta obviamente con suponer que $f(\Omega - N) \in \mathfrak{B}_1$ y $\bigcup_n f_n(\Omega - N) \in \mathfrak{B}_1$, para algun conjunto β-nulo $N \in \Sigma$.

4.2. $f_A \mid \Omega - A \equiv 0$ y $\alpha(A) = \int_A f_A \, d\beta$ para todo $A \in \Sigma'$.

4.3. $\bigcup_{A \in \Sigma'} f_A(\Omega) \in \mathfrak{B}_1$.

Si además la medida β tiene la $**$-condición y se verifica la condición 4.4 posterior, se dice que la medida β-controlada α, tiene un conjunto de promedios localmente pequeño.

4.4. Existe un disco acotado $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ y $A \in \Sigma'$ con $\nu(A) > 0$, existe $A' \in \Sigma'$ con $A' \subseteq A$ y $\nu(A') > 0$ tal que $(f_{A'} - f_C)(\Omega) \subseteq \varepsilon B_1$ para todo $C \in \Sigma'$ con $C \subseteq A'$ y $\nu(C) > 0$.

Evidentemente, si α es una medida β-controlada, entonces

$$\lim_{\substack{\|\beta\|_{B_1 B_3}(A) \to 0 \\ A \in \Sigma}} q_{B_3}[\alpha(A)] = 0$$

para cualesquiera que sean los discos acotados $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ y $B_3 \in \mathfrak{B}_3$ tales que $I(S_{B_1}) \subseteq B_3$ (e.d. la medida α es β-continua).

Teorema 5.— Supongamos que el espacio bornológico X es completo y que la medida β verifica la $**$-condición. Si $\alpha: \Sigma \to Z$ es una medida bornológica, entonces son equivalentes:

5.1. Existe una derivada de Radon-Nikodym $f: \Omega \to X$ de α con respecto a β tal que $f(\Omega - N) \in \mathfrak{B}_1$ para algún conjunto β-nulo $N \in \Sigma$.

5.2. La medida α está β-controlada y tiene un conjunto de promedios localmente pequeño.

Demostración.— Basta con probar que 5.2 implica 5.1, ya que la implicación en sentido contrario se verifica trivialmente. Supongamos por tanto que $\alpha: \Omega \to Z$ es una medida bornológica β-controlada y con un conjunto de promedios localmente pequeño y, con las notaciones de la definición 4, consideremos $\Sigma' \subseteq \Sigma$ y $(f_A)_{A \in \Sigma'}$ tales que verifican 4.1, 4.2 y 4.3. Entonces, existen sendos discos acotados $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ y $B_3 \in \mathfrak{B}_3$ tales que

$$\bigcup_{A \in \Sigma'} f_A(\Omega) \subseteq B_1, \qquad I(S_{B_1}) \subseteq B_3$$

y se verifica 4.4 para B_1. Podemos contruir por inducción una sucesión de familias contables disjuntas $\mathfrak{A}_n = \{A^n_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma'$, tales que:

i) $\Omega - \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A^n_m$ es un conjunto β-nulo, para todo $n \in \mathbb{N}$,

ii) para cualesquiera que sean $m, n \in \mathbb{N}$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $A_m^{n+1} \subseteq A_p^n$ y

iii) $(f_{A_m^n} - f_C)(\Omega) \subseteq (1/n) B_1$ para cualesquiera que sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $C \in \Sigma'$ con $C \subseteq A_m^n$.

Evidentemente,

$$\Omega_0 = \Omega - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m^n$$

es un conjunto β-nulo y

$$f(t) = \lim_n f_n(t)$$

existe para todo $t \in \Omega - \Omega_0$, siendo

$$f_n(t) = \sum_{m \in \mathbb{N}} f_{A_m^n}(t).$$

Del teorema 3 resulta que la función f (tomaremos $f \mid \Omega_0 \equiv 0$) así definida es β-integrable, veamos que es una derivada de Radon-Nikodym de α con respecto a β. En efecto, si $A \in \Sigma'$ entonces

$$q_{B_3} \left[\int_A f \, d\beta - \alpha(A) \right] \leqslant q_{B_3} \left[\int_A (f - f_n) \, d\beta \right] +$$

$$+ q_{B_3} \left[\int_A \left(f_n - \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} f_{A \cap A_m^n} \right)\right) d\beta \right] \leqslant (2/n) \, \|\beta\|_{B_1 B_3} (\Omega)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por consiguiente,

$$\alpha(A) = \int_A f \, d\beta \tag{5.1}$$

para todo $A \in \Sigma'$, de donde por 4.1 y verificar β la **-condición, resulta inmediatamente que (5.1) se verifica para todo $A \in \Sigma$ y f es una derivada de Radon-Nikodym de α con respecto a β.

Definición 6.— Se dice que un espacio bornológico convexo separado y completo Z tiene la propiedad de Radon-Nikodym (en adelante escribiremos P.R.N.) (respecto a un sistema integral bilineal bornológico $(\Omega, \Sigma, \beta, X, Y)$) si toda medida bornológica α: $\Sigma \to Z$ β-controlada, tiene una derivada de Radon-Nikodym respecto de β.

De manera habitual, si $(\Sigma_i)_{i \in I}$ es una red no decreciente de sub-σ-álgebras de Σ y f_i: $\Omega \to X$ es una función β-integrable para todo $i \in I$, diremos que $(f_i, \Sigma_i)_{i \in I}$ es una *martingala* si

$$\Sigma = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \Sigma_i\right) \qquad \text{y} \qquad \int_A f_i \, d\beta = \int_A f_j \, d\beta$$

para todo $i \geqslant j$ y todo $A \in \Sigma_j$. Diremos que una martingala $(f_i, \Sigma_i)_{i \in I}$ es acotada si

$$\bigcup_{i \in I} f_i(\Omega) \in \mathfrak{B}_1 .$$

Se dice que una martingala acotada $(f_i, \Sigma_i)_{i \in i}$ es *convergente* si existe una función β-integrable $f\colon \Omega \to X$ tal que $f(\Omega) \in \mathfrak{B}_1$ y

$$\lim_i \int_A f_i \, d\beta = \int_A f \, d\beta$$

para todo

$$A \in \bigcup_{i \in I} \Sigma_i .$$

***Teorema** 7.*– Un espacio bornológico convexo, separado y completo Z tiene la P.R.N. respecto a un sistema bilineal bornológico $(\Omega, \Sigma, \beta, X, Y, b)$ con β verificando la $**$-condición, si y sólo si toda martingala (en Z) acotada es convergente.

Demostración.– Basta proceder de manera standard (véase la correspondiente demostración para espacios topológicos localmente convexos desarrollada en [21]).

REPRESENTACION DE OPERADORES

Sean Σ una σ-álgebra de partes de un conjunto Ω, $(X, \mathfrak{B}_1)$ y $(Z, \mathfrak{B}_3)$ dos espacios bornológicos convexos separados, de los que Z se supondrá además completo y denotemos por Y el espacio de las aplicaciones lineales y acotadas de X en Z, dotado de su bornología natural y consideremos la evaluación como aplicación bilineal de $X \times Y$ en Z. Denotaremos por $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(\Omega, X)$ el conjunto de las aplicaciones $f\colon \Omega \to X$ tales que $f(\Omega) \in \mathfrak{B}_1$ y f es límite puntual en sentido de Mackey de una sucesión de funciones simples medibles, dotado de la $\{\Omega\}$-bornología.

***Definición** 8.*– Diremos que un operador lineal y acotado $\mathfrak{f}\colon \mathfrak{I} \to Z$ tiene la $*$-condición si verifica:

8.1. $\mathfrak{f}(\{f \in \mathfrak{I} : f(\Omega) \subseteq B_1\}) \subseteq B_3$ para cualesquiera que sean los discos acotados $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ y $B_3 \in \mathfrak{B}_3$ tales que B_3 es completante y $\mathfrak{f}(S_{B_1}) \subseteq B_3$.

8.2. Para cada par de discos acotados $B_1 \in \mathcal{B}_1$ y $B_3 \in \mathcal{B}_3$ tales que B_3 es completante y $\mathfrak{I}\,(\{f \in \mathfrak{A} : f(\Omega) \subseteq B_1\}) \subseteq B_3$, existe una medida no negativa y finita $\nu_{B_1 B_3}$, definida en Σ, de forma que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $q_{B_3}\,[\,\mathfrak{I}\,(f)] \leqslant \varepsilon$ para toda $f \in \mathfrak{A}$ que se anule fuera de un conjunto medible de $\nu_{B_1 B_3}$-medida menor o igual que δ y verifique que $f(\Omega) \subseteq B_1$.

Proposición 9.– Si $\beta : \Sigma \to Y$ es una medida bornológica de semivariación acotada que verifica la *-condición, entonces el operador $\mathfrak{I} : \mathfrak{A} \to Z$ tal que

$$\mathfrak{I}\,(f) = \int_\Omega f\, d\beta$$

para toda $f \in \mathfrak{A}$, es lineal y acotado y verifica la *-condición.

Demostración.– De la proposición 2 resulta que toda función $f \in \mathfrak{A}$ es β-integrable y, por tanto, el operador $\mathfrak{I}$ está bien definido y es evidentemente lineal. Además $\mathfrak{I}$ es acotado por ser la medida β de semivariación acotada, veamos que verifica la *-condición. En efecto, si $B_1 \in \mathcal{B}_1$ y $B_3 \in \mathcal{B}_3$ son dos discos tales que B_3 es completante y $\mathfrak{I}\,(S_{B_1}) \subseteq B_3$ entonces, para cada $f \in \mathfrak{A}$ con $f(\Omega) \subseteq B_1$ existe una sucesión aproximadora $(f_n) \subseteq S_{B_1}$ y, por tanto,

$$\mathfrak{I}\,(f) = \int_\Omega f\, d\beta \in Z_{B_3}$$

y

$$q_{B_3}\,[\,\mathfrak{I}\,(f)] = \lim_n q_{B_3}\,\left(\int_\Omega f_n\, d\beta\right) \leqslant 1,$$

de donde resulta que $\mathfrak{I}\,(f) \in B_3$ y que $\mathfrak{I}$ verifica 8.1.

Veamos que $\mathfrak{I}$ verifica 8.2. Si $B_1 \in \mathcal{B}_1$ y $B_3 \in \mathcal{B}_3$ son dos discos tales que B_3 es completante y $\mathfrak{I}\,(\{f \in \mathfrak{A} : f(\Omega) \subseteq B_1\}) \subseteq B_3$ entonces, $I\,(S_{B_1}) \subseteq B_3$ y existe una medida $\nu_{B_1 B_3} : \Sigma \to \mathbb{R}_+$ tal que $\|\beta\|_{B_1 B_3} \leqslant \nu_{B_1 B_3}$. Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $A \in \Sigma$ y $\nu_{B_1 B_3}(A) \leqslant \delta$ entonces

$$q_{B_3}\,[\,\mathfrak{I}\,(f)] = q_{B_3}\,\left(\int_A f\, d\beta\right) \leqslant \|\beta\|_{B_1 B_3}(A) \leqslant \varepsilon$$

para toda $f \in \mathfrak{A}$ con $f(\Omega) \subseteq B_1$ y $f \mid \Omega - A \equiv 0$, con lo que queda probada la proposición.

Teorema 10.— Si $\mathfrak{f}: \mathfrak{A} \to Z$ es un operador lineal y acotado que tiene la *-condición, entonces existe una medida bornológica de semivariación acotada $\beta: \Sigma \to Y$ que tiene la *-condición y que verifica que

$$\mathfrak{f}(f) = \int_\Omega f\, d\beta \tag{10.1}$$

para toda $f \in \mathfrak{A}$.

Demostración.— Sea $\beta: \Sigma \to Y$ la función de conjunto definida por:

$$\beta(A)(x) = \mathfrak{f}(x\chi_A)\ (\in Z)$$

para todo $x \in X$. Evidentemente, $\beta(A)$ es una aplicación lineal de X en Y, que es acotada ya que si $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ entonces

$$\beta(A)(B_1) = \mathfrak{f}(\{x\chi_A : x \in B_1\}) \subseteq \mathfrak{f}(\{f \in \mathfrak{A} : f(\Omega) \subseteq B_1\}) \in \mathfrak{B}_3.$$

Veamos que β es una medida bornológica. En efecto, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta de elementos de Σ y $B_1 \in \mathfrak{B}_1$, entonces $(\{f \in \mathfrak{A} : f(\Omega) \subseteq B_1\}) = B_3 \in \mathfrak{B}_3$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$q_{B_3}[\mathfrak{f}(f)] \leqslant \varepsilon$$

para todo $f \in \mathfrak{A}$ tal que

$$f(\Omega) \subseteq B_1 \qquad \text{y} \qquad f \mid \Omega - A \equiv 0$$

para algún $A \in \Sigma$ con $\nu_{B_1B_3}(A) \leqslant \delta$. Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\nu_{B_1B_3}\Big(\bigcup_{n \geqslant m} A_n\Big) \leqslant \delta$$

para todo $m \geqslant n_0$ y

$$q_{B_3}\Big[\Big(\beta\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) - \sum_{n=1}^{m} \beta(A_n)\Big)(x)\Big] = q_{B_3}\Big[\mathfrak{f}\Big(x\chi_{\bigcup_{n \geqslant m+1} A_n}\Big)\Big] \leqslant \varepsilon$$

para todo $m \geqslant n_0$ y todo $x \in B_1$. Además β es de semivariación acotada, ya que para cada disco acotado $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ se tiene que

$$I(S_{B_1}) \subseteq \mathfrak{f}(\{f \in \mathfrak{A} : f(\Omega) \subseteq B_1\}) \in \mathfrak{B}_3,$$

y tiene la *-condición ya que $\mathfrak{f}(S_{B_1}) = I(S_{B_1})$, verifica 8.2 y

$$\mathfrak{f}(f) = \int_\Omega f\, d\beta$$

para toda $f \in S_{B_1}$. Veamos que se verifica (9.1). Evidentemente, si $f \in \mathfrak{A}$ entonces f es β-integrable, según resulta de la proposición 2 y existen dos discos acotados $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ y $B_3 \in \mathfrak{B}_3$ y una sucesión aproximadora (f_n) de f, tales que B_3 es completante,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\Omega) \cup f(\Omega) \subseteq B_1, \qquad \mathfrak{f}(\{f \in \mathfrak{A} : f(\Omega) \subseteq B_1\}) \subseteq B_3$$

y

$$\int_\Omega f\, d\beta = \lim_n \int_\Omega f_n\, d\beta \qquad (\text{en } Z_{B_3})$$
$$= \lim_n \mathfrak{f}(f_n).$$

Además, de 8.2 y del teorema de Egorov resulta que dado $\varepsilon > 0$ existe $A \in \Sigma$ tal que (f_n) converge a f uniformemente sobre A en X_{B_1} y $q_{B_3}[\mathfrak{f}(g)] \leqslant \varepsilon/3$ para todo $g \in \mathfrak{A}$ tal que $g(\Omega) \subseteq B_1$ y $g \mid A \equiv 0$. Por tanto, $\mathfrak{f}(f_n \mid A)$ converge a $\mathfrak{f}(f \mid A)$ en Z_{B_3} y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$q_{B_3}[\mathfrak{f}(f) - \mathfrak{f}(f_n)] \leqslant q_{B_3}[\mathfrak{f}(f\chi_A) - \mathfrak{f}(f_n\chi_A)] +$$
$$+ q_{B_3}[\mathfrak{f}(f\chi_{\Omega - A})] + q_{B_3}[\mathfrak{f}(f_n\chi_{\Omega - A})] \leqslant \varepsilon$$

para todo $n \geqslant n_0$, de donde resulta que

$$\mathfrak{f}(f) = \lim_n \mathfrak{f}(f_n) \qquad (\text{en } Z_{B_3})$$

y se verifica (9.1).

MEDIDA PRODUCTO

Continuando con las notaciones anteriores, consideremos además otra σ-álgebra Δ de partes de un conjunto Ω' y otra medida bornológica $\alpha: \Delta \to X$.

Teorema 11.— Si $\alpha(\Delta) \in \mathfrak{B}_1$ y la medida β verifica la **-condición, entonces existe la medida producto $\alpha \otimes \beta: \Delta \otimes \Sigma \to Z$ y se verifica

$$\alpha \otimes \beta(U) = \int_\Omega \alpha(U^t)\, d\beta \tag{11.1}$$

para todo $U \in \Delta \otimes \Sigma$ (siendo, como es habitual, U^t la t-sección de U para todo $t \in \Omega$).

Demostración.— Evidentemente (11.1) tiene sentido ya que si para cada $U \in \Delta \otimes \Sigma$ denotamos por f_U la función de Ω en X tal que $f_U(t) = \alpha(U^t)$ y denotamos por $\mathfrak{A} = \{U \in \Delta \otimes \Sigma : f_U \text{ es } \beta\text{-integrable}\}$, entonces para cada $A \times B \in \Delta \times \Sigma$ se tiene que

$$f_{A \times B} = \alpha(A) \chi_B$$

y $\Delta \times \Sigma \subseteq \mathfrak{A}$ y del teorema 3 resulta inmediatamente que $\Delta \otimes \Sigma = \mathfrak{A}$ ya que $f_U(\Omega) \subseteq \alpha(\Sigma) \in \mathfrak{B}_1$. Por otra parte, si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Delta \otimes \Sigma$ es una sucesión disjunta entonces $(U_n^t)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Delta$ también lo es para todo $t \in \Omega$ y

$$f_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n}(t) = \alpha\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} U_n^t\right) =$$

$$= \lim_m \alpha \sum_{n=1}^{m} U_n^t = \lim_m f_{\bigcup_{n=1}^{m} U_n}(t)$$

y del teorema 3 resulta (ya que

$$f_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n}(\Omega) \cup \bigcup_{m \in \mathbb{N}} f_{\bigcup_{n=1}^{m} U_n}(\Omega) \subseteq \alpha(\Sigma)$$

que

$$\alpha \otimes \beta\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n\right) = \int_\Omega f_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n} \, d\beta =$$

$$= \lim_m \int_\Omega f_{\bigcup_{n=1}^{m} U_n} \, d\beta = \lim_m \sum_{n=1}^{m} \alpha \otimes \beta(U_n),$$

con lo que queda probado el teorema, ya que obviamente

$$\alpha \otimes \beta(A \times B) = \alpha(A) \beta(B)$$

para todo $A \times B \in \Delta \times \Sigma$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BALBAS, A. Y P. JIMENEZ GUERRA: *Un teorema de Radon-Nikodym para integrales bilineales.* Rev R. Acad. Ci. Madrid, 78 (1984), 217-220.

[2] BALBAS, A. Y P. JIMENEZ GUERRA: *A Radon-Nikodym theorem for a bilinear integral in locally convex spaces.* Math. Japonica 32 (1987) 863-870.

[3] BALBAS, A. Y P. JIMENEZ GUERRA: *Representation of operators by bilinear integrals.* Czech. Math. J., 37 (1987), 551-558.

[4] BALLVE, Mª E.: *Integración vectorial bilineal.* U.N.E D., Madrid, 1984.

[5] BALLVE, Mª E.: *Espacios* L^p *de funciones vectoriales.* Tesis Doctoral, U.N.E.D., Madrid, 1988.

[6] BALLVE, Mª E.: *Espacios* L^α *e integración bornológica.* Collec. Math., 39 (1988), 21-29.

[7] BALLVE, Mª E. Y J. L. DE MARIA: *On the dual of* L^{α} *for locally convex spaces.* Atti, Sem. Mat. Fís. Univ. Modena. (Aparecerá en 1989).

[8] BARTLE, R. G.: *A general bilinear vector integral.* Studia Math., 15 (1956), 337-352.

[9] BHASKARA RAO, M.: *Countably additivity of a set function induced by two vector-valued measures.* Indiana Univ. Math. J., 21 (1972), 847-848.

[10] BOMBAL, F.: *Medida e integración bornológica.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 75 (1981) 115-137.

[11] BOMBAL, F.: *El teorema de Radon-Nikodym en espacios bornológicos.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 75 (1981), 140-154.

[12] BRAVO, R.: *Tópicos en integración vectorial bilineal.* Tesis Doctoral U.N.E.D., Madrid, 1986.

[13] DOBRAKOV, I., JIMENEZ GUERRA, P. Y P. MORALES: *Vector and stochastic integrals* (Aparecerá.)

[14] DUDLEY, R. M. Y L. PAKULA: *A counter example on the inner product of measures.* Indiana Univ. Math. J. 21 (1972), 843-845.

[15] FERNANDEZ, F.: *Producto de medidas valoradas en espacios localmente convexos* Tesis Doctoral, U.N.E.D., Madrid, 1987

[16] FERNANDEZ, F.: *Teoremas de Fubini e integración bilineal Rev. Acad. Ci. Madrid, 92 (1988), 101-104.*

[17] FERNANDEZ, F. Y P. JIMENEZ GUERRA. *On the Radon-Nikodym property for operator valued measures (Aparecerá.)*

[18] HOGBE-NLEND, H.: *Théorie des bornologies et applications.* Lect. Notes in Math., 213, Springer-Verlag, Berlín, 1971.

[19] HOGBE-NLEND, H.: *Techniques de bornologies en théorie des espaces vectoriels topologiques et des espaces nucléeaires.* Lect. Notes in Math., 331 Springer-Verlag, Berlın, 1973.

[20] HOGBE-NLEND, H.: *Les Bornologies et l'analyse fonctionnelle.* Univ. de Bordeaux, 1974.

[21] JIMENEZ GUERRA, P.: *Derivación de medidas e integración vectorial bilineal.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 82 (1988), 115-128.

[22] MAYNARD, H. B.: *A Radon-Nikodym theorem for operator valued measures* Trans. Amer. Math. Soc., 173 (1972), 449-463.

[23] CHIBUKULA, R. Y A. S. SASTRY: *Product vector measures via Bartle integrals.* J. Math. Anal , 96 (1983), 180-195.

[24] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *Integración de funciones con valores en espacios localmente convexos.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 73 (1979), 361-387

[25] RODRIGUEZ-SALINAS B.: *La propiedad de Radon-Nikodym, δ-dentabilidad y martingalas en espacios localmente convexos* Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 74 (1980), 65-89.

[26] SIVASANKARA, S. A.: *Vector Integrals and products of vector measures* Univ. Microfilm Inter. Michigan, 1983.

Dpto. de Matemáticas Fundamentales
Facultad de Ciencas, U.N.E.D.
C/ Senda del Rey, s/n
Madrid-28040 (España)