Una propiedad de M. Valdivia, espacios de tipo (L) y condiciones débiles de tonelación

Por J. C. Ferrando y M. Lopez Pellicer

Recibido: 15 enero 1989

Presentado por el Académico Numerario D. Manuel Valdivia Ureña

Abstract

The thesis of Theorem 2 given by M. Valdivia in [16] is used by W. Ruess in [12] for defining spaces having property (L), whose study we continue here giving new examples and counterexamples which distinguish them from other classes which enjoy weak barrelledness conditions.

Resumen

La tesis del Teorema 2 dado por M. Valdivia en [16] es utilizada por W. Ruess en [12] para definir los espacios con la propiedad (L), cuyo estudio continuamos aquí dando nuevos ejemplos y contraejemplos que los separan de otras clases que gozan de propiedades débiles de tonelación.

En lo sucesivo, la palabra "espacio" significará "espacio localmente convexo de Hausdorff sobre el cuerpo K de los reales o de los complejos". Dado un espacio E denotaremos por $\sigma(E',E)$, $(\lambda(E',E)$, $\mu(E',E)$, $\beta(E',E))$ la topología débil (la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos precompactos de E, la topología de Mackey, la topología fuerte) sobre el dual topológico E' de E. Si A es un subconjunto de un espacio E, $\langle A\rangle$ denotará su envoltura lineal y si B es un subconjunto absolutamente convexo y acotado de E, denotaremos por E_B al espacio $\langle B\rangle$ dotado de la topología normable generada por el calibrador de B. Si A es un subconjunto de un espacio $E(\tau)$, denotaremos por $A(\tau)$ al subconjunto A provisto con la topología inducida τ/A. La suma directa de una familia numerable de rectas se representará por ϕ, y su producto por ω.

1. INTRODUCCION

En [2] I. Amemiya y Y. Komura prueban que dada una sucesión creciente $\{A_n,\ n=1,2,\ldots\}$ de subconjuntos absolutamente convexos y cerrados de un espacio metrizable y tonelado E, cuya unión sea E, existe un A_p que es entorno del origen en E. En [14] S. Saxon llama espacios Baire-like a los espacios que verifican esta propiedad de fuerte tonelación.

En el Theorem 2 de [16] M. Valdivia prueba que si $\{A_n,\ n=1,2,\ldots\}$ es una sucesión creciente de subconjuntos absolutamente convexos de un espacio tonelado E, cuya unión sea E, entonces un subconjunto absolutamente convexo U que corte a cada A_n en un entorno del origen en la topología inducida sobre A_n, es un entorno del origen en E. Esta propiedad expresa que E es el límite inductivo generalizado de la sucesión de pares $(\langle A_n \rangle, A_n)$, donde $\langle A_n \rangle$ se supone provisto de la topología inducida por E. En [12] W. Ruess llama espacios con la propiedad (L) a los espacios localmente convexos que verifican la tesis del teorema anterior del Profesor Valdivia. En [10] y [11] W. Ruess estudia la relación entre la propiedad (L) y otras condiciones débiles de tonelación dadas por M. de Wilde y C. Houet en [3], M. Levin y S. Saxon en [7], M. Valdivia en [18] y J. H. Webb en [20]. Luego, en [13], W. Ruess muestra que los espacios de funciones continuas provistos con topologías estrictas son espacios de tipo (L) que no son ω-quasitonelados.

Con posterioridad a los trabajos de W. Ruess mencionados arriba han aparecido nuevas clases de espacios definidos por condiciones débiles de tonelación (ver [4], [8], Chap. 8, y [4], Chap. 1), lo que nos ha permitido demostrar en este artículo nuevas propiedades de los espacios de tipo (L) y estudiar su relación con otras condiciones débiles de tonelación, cuya definición recordamos a continuación.

Un espacio E es tonelado si los acotados de E' $(\sigma(E', E))$ son equicontinuos. Un espacio E es χ_0-tonelado, [5], si cada subconjunto acotado de E' $(\sigma(E' E))$ que es la unión de una cantidad numerable de subconjuntos equicontinuos es equicontinuo. Un espacio E es ω-(quasi)tonelado, [3] y [7], si los acotados numerables de E' $(\sigma(E', E))$ (de E' $(\beta(E', E))$) son equicontinuos. Un espacio E es c_0-tonelado, [20], si las sucesiones nulas de E' $(\sigma(E', E))$ son equicontinuas. Un espacio E es C-tonelado, [8], 8.2.6, si cada sucesión de subconjuntos equicontinuos de E' que converge a cero en E' $(\sigma(E', E))$ es equicontinua. Un espacio E tiene la propiedad (C), [7], si cada acotado numerable de E' $(\sigma(E', E))$ tiene un punto adherente. Un espacio E tiene la propiedad (S), [7], si E' $(\sigma(E', E))$ es sucesionalmente completo. Un espacio E es dual localmente completo, [18], si E' $(\sigma(E', E))$ es localmente completo. Un espacio E es débilmente tonelado, [4], si dada una sucesión creciente $\{E_n, n = 1, 2, ...\}$ de subespacios de E que cubre E, E es el límite inductivo de los E_n, $n = 1, 2, ...$ Finalmente, un espacio E tiene la propiedad (L) si dada una sucesión $\{A_n, n = 1, 2 ...\}$ de subconjuntos absolutamente convexos cuya unión sea E y que verifique que $2A_n$ está contenido en A_{n+1} para cada $n \in N$, E es el límite inductivo generalizado de la sucesión de pares $(\langle A_n \rangle, A_n)$, n = 1, 2, ... Esta definición es equivalente a la dada por W. Ruess en [11]. Por comodidad, llamaremos "convexas" a las sucesiones de subconjuntos absolutamente convexos que verifican la propiedad anterior y diremos que E es el límite inductivo de la sucesión $\{A_n, n = 1, 2, ...\}$. Por otro lado, en virtud de [8], 8.1.13, es suficiente considerar en la definición anterior sucesiones convexas formadas por conjuntos cerrados.

Es fácil comprobar las relaciones siguientes (no obstante, ver [8], 8.2.7, para la tercera implicación de la primera línea y [10], 2.4(2), para la segunda implicación de la tercera línea)

$$\text{tonelado} \Rightarrow \chi_0\text{-tonelado} \Rightarrow C\text{-tonelado} \Rightarrow \text{propiedad } (L) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{débilmente tonelado}$$

$$\chi_0\text{-tonelado} \Rightarrow \omega\text{-tonelado} \Rightarrow \text{propiedad } (C) \Rightarrow \text{propiedad } (S) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{dual loc. completo}$$

$$\omega\text{-tonelado} \Rightarrow c_0\text{-tonelado} \Rightarrow \text{dual loc. completo y } C\text{-tonelado} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c_0\text{-tonelado}$$

Y en la categoría de los espacios de Mackey, por [8], 8.1.29 y 8.1.23(c)

$$c_0\text{-tonelado} \Leftrightarrow \textit{propiedad } (L) \Leftrightarrow \text{dual loc. completo}$$

2. PROPIEDADES

Si E es un espacio quasitonelado que tiene la propiedad (L) y T es un tonel, se tiene que E es el límite inductivo de la sucesión $\{2^n T,\ n = 1, 2, ...\}$, luego por [19], 1.9.3(5), T es bornívoro, por lo que es un entorno del origen. Así obtenemos el siguiente resultado, que será un caso particular de la Proposición 1: Cada espacio metrizable con la propiedad (L) es tonelado. En [4] se prueba que en cada espacio de Fréchet no normable existen subespacios densos débilmente tonelados que no son tonelados; estos subespacios, por la propiedad anterior, no tienen la propiedad (L).

También se pueden construir espacios débilmente tonelados que no tienen la propiedad (L) como sigue. Si E es un subespacio denso y tonelado de l^1, entonces $l^\infty(\mu(l^\infty, E))$ es débilmente tonelado, pues dada una sucesión creciente de subespacios cerrados que lo recubra, uno de ellos coincide con l^∞, y no tiene la propiedad (L) pues si B es la bola unidad de l^∞ se tiene que, al ser E tonelado y no completo, existe una forma lineal u definida en l^∞ que es continua en B con la topología inducida por $\sigma(l^\infty, E)$ y no es continua en $l^\infty(\mu(l^\infty, E))$, por lo que este espacio no es el límite inductivo de la sucesión $\{2^n B,\ n = 1, 2, ...\}$. $l^\infty(\mu(l^\infty, E))$ no es metrizable ya que su dual fuerte no es completo. Por otro lado, en virtud de [6], 21.7(1), cada espacio de Banach de dimensión infinita provisto con la topología débil es un espacio débilmente tonelado que no tiene la propiedad (L).

El dual fuerte de un espacio de Fréchet distinguido es un espacio χ_0-tonelado y, a fortiori, de tipo (L), que no es tonelado.

El lema que damos a continuación es una consecuencia del Theorem 2.4. de [11] y también puede encontrarse en [1], 16(5), en el contexto de los espacios vectoriales topológicos. Para facilitar la lectura de este trabajo, incluimos una prueba concisa del mismo en el caso localmente convexo.

Lema 1.– Si un espacio E tiene un subespacio denso F que es el límite inductivo de una sucesión convexa $\{A_n,\ n = 1, 2, ...\}$, entonces $E = \cup\, \{\overline{A}_n,\ n = 1, 2, ...\}$.

Demostración.— Si $x \in E - \cup \{\overline{A}_n, n = 1, 2, ...\}$, podemos determinar una sucesión decreciente $\{U_n, n = 1, 2, ...\}$ de entornos del origen en E absolutamente convexos tales que

$$(x + U_n) \cap A_{n+1} = \phi \qquad \text{para } n = 1, 2, ...$$

Entonces

$$U: = \Gamma [\cup \{(2^{-1} U_n) \cap A_n, n = 1, 2, ...\}]$$

es un entorno del origen en F cuya clausura V en E está contenida en $U_n + A_n$ para cada $n \in N$. En efecto, V está contenido en $2^{-1} U_n + U$ para cada $n \in N$, y cada elemento z de $2^{-1} U_n + U$ se puede escribir en la forma

$$z = a + \sum_{m=1}^{n} \alpha_m a_m + \sum_{m=n+1}^{\infty} \alpha_m a_m$$

con $a \in 2^{-1} U_n$, $\quad a_m \in A_n$ si $m \leqslant n$, $\quad a_m \in 2^{-1} U_n$ si $m \geqslant n + 1$,

siendo los α_m todos nulos salvo a lo sumo un número finito de ellos y verificando que

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_m| \leqslant 1,$$

por lo que $2^{-1} U_n + U$ está contenido en $U_n + A_n$. Al ser V un entorno del origen en E se tiene que

$$(x + V) \cap F \neq \phi,$$

luego existirá un natural p tal que

$$(x + U_p + A_p) \cap A_p \neq \phi,$$

lo que nos lleva a que

$$(x + U_p) \cap A_{p+1} \neq \phi,$$

que es una contradicción.

Proposición 1.— Sea E un espacio que tiene la propiedad (L). Si la compleción $\hat{E}$ de E es Baire-like, entonces E es Baire-like.

Demostración.— Si $\{B_n, n = 1, 2, ...\}$ es una sucesión creciente de subconjuntos absolutamente convexos y cerrados de E que cubre E, formamos la sucesión convexa $\{A_n, n = 1, 2, ...\}$ de E, donde $A_n : = 2^n B_n$ para cada

$n \in N$. En virtud del lema anterior, la sucesión $\{\hat{A}_n, n = 1, 2, ...\}$, donde ^ indica clausura en $\hat{E}$, cubre $\hat{E}$ y, por tanto, existe un p tal que $\hat{A}_p$ es un entorno de cero en $\hat{E}$. Luego B_p es un entorno del origen en E.

Proposición 2.– Si F es un subespacio vectorial que tiene la propiedad (L) y es denso en un espacio E, entonces E tiene la propiedad (L).

Demostración.– Dada una sucesión convexa $\{A_n, n = 1, 2, ...\}$ de subconjuntos cerrados de E, sea E (τ) el límite inductivo de los A_n, $n = 1, 2, ...$ Si $u \in E\ (\tau)'$ se tiene que son continuas las restricciones de u sobre las intersecciones $A_n \cap F$, $n = 1, 2, ...$, por lo que al tener F la propiedad (L), u/F es continua.

Denotando por $\hat{u}$ la extensión continua de u sobre E se tiene que u y $\hat{u}$ coinciden en $\overline{A_n \cap F}$ (clausura en E), ya que τ y la topología inicial de E coinciden en A_n, por lo que u y $\hat{u}$ coinciden en

$$\cup \{\overline{A_n \cap F}, n = 1, 2, ...\} = E,$$

en virtud del lema. Por ello, $u \in E'$. Esto muestra que la topología τ es compatible con el par dual (E, E'). Dado un entorno del origen U en la topología τ que sea absolutamente convexo y cerrado existe, para cada $n \in N$, un entorno del origen U_n tal que

$$U_n \cap A_n \subset U,$$

de manera que

$$U_n \cap A_n \cap F \subset U \cap F.$$

Al tener F la propiedad (L) se tiene que $U \cap F$ es un entorno del origen en F y, por densidad, $\overline{U \cap F}$, que está contenido en U, es un entorno del origen en E.

De la definición de espacio del tipo (L) se deduce inmediatamente.

a) La suma directa de espacios con la propiedad (L) tiene la propiedad (L).
b) El cociente de un espacio que tiene la propiedad (L) por un subespacio vectorial cerrado tiene la propiedad (L). Por tanto,
c) El límite inductivo de espacios que tienen la propiedad (L) tiene la propiedad (L).

Usando [19], 1.2.1(15), se deduce fácilmente:

d) El producto de espacios que tienen la propiedad (L) tiene la propiedad (L).

En [11] W. Ruess prueba que si E tiene la propiedad (L) y F es un subespacio vectorial de codimensión numerable entonces F tiene la propiedad (L). De hecho, si F es cerrado, como por [8], 8.1.29, E es dual localmente completo, cada complemento algebraico G de F en E es un complemento topológico, F tiene la propiedad (L) y G es una copia de ϕ. Por ello, la prueba se reduce al caso que F sea denso en E. Y este resultado también puede obtenerse del lema de codimensionalidad de M. Valdivia [19], 1 3.2(6). Así, sea $\{A_n,\ n = 1, 2, ...\}$ una sucesión convexa de subconjuntos cerrados de F, sea B_n la clausura de A_n en E y sea $G: = \cup \{B_n,\ n = 1, 2, ...\}$. Si $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ es una cobase de G en E escribiremos

$$W_n: = B_n + 2^n \Gamma \{x_1, x_2, ..., x_p\}$$

y si $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ es una cobase de G en E pondremos

$$W_n: = B_n + 2^n \Gamma \{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

En ambos casos $\{W_n,\ n = 1, 2, ...\}$ es una sucesión convexa de subconjuntos cerrados de E tales que $W_n \cap G$ es el cerrado B_n, por lo que de [19], 1.3.2(6), se deduce que G es cerrado en la topología τ_0 de la convergencia uniforme sobre las sucesiones localmente nulas de E' $(\sigma(E', E))$.

Si $\{z_n,\ n = 1, 2, ...\}$ es una sucesión localmente nula en E' $(\sigma(E', E))$, entonces existe un disco de Banach M en E' tal que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \qquad \text{en } E'_M.$$

Por [6], 20.9(6), la clausura en E'_M de la envoltura absolutamente convexa de $\{z_n,\ n = 1, 2, ...\}$ es un subconjunto $\sigma(E'_M, (E'_M)')$-compacto y, a fortiori, $\sigma(E', E)$-compacto. Esto prueba que la topología τ_0 es compatible con el par dual (E, E'), luego $G = E$ y E es el límite inductivo de la sucesión $\{B_n,\ n = 1, 2, ...\}$.

Sea i la inmersión de F en el límite inductivo de la sucesión $\{A_n,\ n = 1, 2, ...\}$ y sea i_n su restricción a A_n. Las extensiones continuas $\hat{i}_n$ de i_n a B_n con valores en la compleción del límite inductivo de las A_n, $n = 1, 2, ...$ permiten definir una aplicación $\hat{i}$ sobre E, pues de $i_{n+1}/A_n = i_n$ y de $\overline{A}_n = B_n$ se deduce que $\hat{i}_{n+1}/B_n = \hat{i}_n$. Por tener E la propiedad (L) se sigue que $\hat{i}$ es continua, luego su restricción i es continua, resultando que F es el límite inductivo de la sucesión $\{A_n,\ n = 1, 2, ...\}$.

3. EJEMPLOS Y CONTRAEJEMPLOS

3.1. Espacios con la propiedad (L) que no son χ_0-tonelados

En [17] M. Valdivia da un ejemplo de una clase de espacios de Mackey ω-tonelados y, por tanto, que tienen la propiedad (L), que no son χ_0-quasitonelados. Otra clase de espacios que tienen la propiedad (L) y no son

χ_0-tonelados puede construirse como sigue. Sea B_n la bola cerrada unidad del espacio de Banach F_n, $n = 1, 2, \ldots$, sea $B := \Pi \{B_n, n = 1, 2, \ldots\}$ y sea $E = \langle B \rangle$. Denotaremos por $E(\tau)$ el límite inductivo de la sucesion $\{2^n B, n = 1, 2, \ldots\}$.

Es inmediato comprobar que B es un disco de Banach en $E(\tau)$, de modo que si $\{A_n, n = 1, 2, \ldots\}$ es una sucesión convexa de subconjuntos cerrados de $E(\tau)$ se tienen que $E(\tau)$ coincide con el límite inductivo de la sucesión $\{A_n, n = 1, 2, \ldots\}$, por lo que $E(\tau)$ tiene la propiedad (L). Por otro lado, si para cada entero positivo n, U_n denota la interseccion del producto $F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_{n-1} \times B_n \times F_{n+1} \times \ldots$ con E, es obvio que U_n es un entorno cerrado del origen en $E(\tau)$, por lo que B es el χ_0-tonel formado por la intersección de los U_n, $n = 1, 2, \ldots$

Si $E(\tau)$ fuera χ_0-tonelado, entonces B sería un entorno acotado del origen en $E(\tau)$ y, por tanto, $E(\tau)$ sería normado, y al tener además la propiedad (L), sería tonelado. Por el teorema del homomorfismo de Ptàk, [9], $E(\tau)$ sería isomorfo al espacio de Banach $E(\rho)$, donde ρ es la topología definida por el calibrador de B. Pero esto es absurdo, pues si e_n es un vector de norma unidad de F_n, entonces la sucesión $\{(e_1, e_2, \ldots, e_n, 0, 0, \ldots), n = 1, 2, \ldots\}$ converge en F al vector $(e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots)$, en tanto que la sucesión anterior no converge a ese vector en $E(\rho)$.

3.2. Espacios con la propiedad (L) que no son ω-quasitonelados y espacios con la propiedad (L) que no son c_0-tonelados

Sea $E(\tau)$ un espacio de Banach de dimensión infinita y sea $\lambda(E, E')$ la topología polar de $\beta(E', E)$. Probaremos a continuación que $E(\lambda(E, E'))$ tiene la propiedad (L). De hecho, si $\{A_n, n = 1, 2, \ldots\}$ es una sucesión convexa de subconjuntos $\lambda(E, E')$-cerrados de E, la topología límite-inductiva ρ sobre E generada por las $A_n(\lambda)$, $n = 1, 2, \ldots$, es compatible con el par dual (E, E') ya que, al ser $E(\tau)$ de tipo (L), su topología τ es más fina que la ρ. Si U es un entorno del origen absolutamente convexo y cerrado de $E(\rho)$ y B es la bola unidad de $E(\tau)$ existe un $p \in N$ tal que B está contenido en A_p, y como para cada $n \in N$ existe en $E'(\beta(E'E))$ un subconjunto compacto y absolutamente convexo M_n tal que $M_n^0 \cap A_n$ está contenido en U, se tiene que

$$M_{m+p}^0 \cap 2^m B \subset U.$$

Ahora, el conjunto

$$W := \overline{\Gamma [\cup \{M_{m+p}^0 \cap 2^m B, \ m = 1, 2, \ldots\}]} \subset U$$

es entorno del origen en la topología $\lambda(E, E')$, ya que su polar

$$W^0 = \cap \{(M_{m+p}^0 \cap 2^m B)^0, \ m = 1, 2, \ldots\} \subset$$
$$\subset \cap \{M_{m+p} + 2^{-m} B^0, \ m = 1, 2, \ldots\}$$

es $\beta(E', E)$-compacto puesto que cada $M_{m+p} + 2^{-m} B^0$ se cubre con un número finito de trasladados de $2^{-m} B^0$.

En el caso que el dual fuerte de $E(\tau)$ sea separable, entonces existe un subconjunto numerable y denso de B que no es $\lambda(E, E')$-equicontinuo. Entonces $E(\lambda(E, E'))$ es un espacio con la propiedad (L) que no es ω-quasitonelado.

Cuando el espacio de Banach $E(\tau)$ es separable, el espacio $E(\lambda(E,E'))$ tiene la propiedad (L) y no es c_0-tonelado, ya que si cada sucesión $\{u_n, n = 1, 2, ...\}$ convergente a cero en $E'(\sigma(E', E))$ fuese equicontinua, entonces $\{u_n, n = 1, 2, ...\}$ estaría contenida en un subconjunto $\beta(E', E)$-compacto de E' en el que obviamente coinciden las topologías inducidas por $\beta(E', E)$ y por $\sigma(E', E)$, por lo que la sucesión $\{u_n, n = 1, 2, ...\}$ convergería fuertemente a cero. Por [6], 27.2(7), $E(\lambda(E', E))$ sería un espacio de Montel, lo cual es contradictorio.

3.3. Espacios ω-tonelados que no son débilmente tonelados

J. Schmets ha dado en [15] un ejemplo de una topología que es ω-tonelada pero no es débilmente tonelada por lo que, a fortiori, no tiene la propiedad (L). Sobre sumas de rectas se pueden construir otras topologías ω-toneladas que no son débilmente toneladas, como muestra el siguiente ejemplo.

Dado un espacio topológico X, se representa por $\beta(X)$ (por $d(X)$) al primer elemento del conjunto de cardinales de las bases de la topología (de los subconjuntos densos) de X. Si c es el cardinal de la familia de abiertos de X se tiene obviamente que $c \leqslant 2^{\beta(x)}$ y cuando X es regular, entonces $\beta(X) \leqslant 2^{d(x)}$. Usando estas desigualdades, dado un cardinal cualquiera m y considerando en $[0, 1]$ la topología usual es fácil comprobar que, eligiendo el conjunto de índices I de cardinal suficiente grande, $d([0, 1]^I) > m$.

Consideremos una sucesión creciente de conjuntos índices $\{I(n), n = 1, 2, ...\}$ tales que

$$\chi_0 < d([0, 1]^{I(1)})$$

y

$$\sup\{d(A): A \text{ subconjunto acotado de } R^{I(n-1)}\} < d([0, 1]^{I(n)}), \qquad n = 2, 3, ...$$

Para $I: = \cup \{I(n), n = 1, 2, ...\}$ formamos el producto $\omega(I): = R^I$ y la suma directa $\phi(I)$ en la que consideraremos la topología τ de la convergencia uniforme sobre los acotados A de $\omega(I)$ tales que

$$d(A) < \text{card}(I).$$

Claramente, $(\phi(I), \tau)$ es ω-tonelado. Por otro lado, por la elección de los $I(n)$ se tiene que τ induce sobre cada subespacio $\phi(I(n))$ la topología localmente convexa más fina. Si $(\phi(I), \tau)$ fuera débilmente tonelado, sería tonelado, pues coincidiría con el límite inductivo de los $\phi\ (I\ (n))$, lo que implicaría que

$$d\ ([0,1]^I) < \text{card}\ (I),$$

por lo que existiría un natural n tal que

$$d\ ([0,1]^I) < d\ ([0,1]^{I\ (n)}),$$

y ello implicaría que la proyección D_n sobre $[0,1]^{I\ (n)}$ del subconjunto denso D de $[0,1]^I$ cuyo cardinal es $d\ ([0,1]^I)$ sería un subconjunto denso en $[0,1]^{I\ (n)}$ que verificaría que

$$\text{card}\ (D_n) < d\ ([0,1]^{I\ (n)}),$$

lo que contradice la definición de $d\ ([0,1]^{I\ (n)})$.

Problema abierto.– ¿Existe algún espacio de Mackey con la propiedad (L) que no sea C-tonelado?

BIBLIOGRAFIA

[1] ADASCH, N., ERNST, B. AND KEIM, D.: *Topological vector spaces.* Lecture notes in Math. 639. Springer-Verlag. 1978.

[2] AMEMIYA, I. AND KOMURA, Y.: *Über nicht vollständige Montelräume.* Math. Ann. 177, 273-277 (1968).

[3] DE WILDE, M. AND HOUET, C.: *On increasing sequences of absolutely convex sets in locally convex spaces.* Math. Ann. 192, 257-391 (1971).

[4] FERRANDO, J. C. AND SANCHEZ RUIZ, L. M.: *Weakly barrelled spaces.* Submitted.

[5] HUSAIN, T.: *Two new classes of locally convex spaces.* Math. Ann. 166, 289-299 (1966).

[6] KOTHE, G.: *Topological vector spaces I.* Berlin, Heidelberg, New York. Springer-Verlag. 1983.

[7] LEVIN, M. AND SAXON, S.: *A note on the inheritance of properties of locally convex spaces by subspaces of countable codimension.* Proc. Amer. Math. Soc. 29, 97-102 (1971).

[8] PEREZ CARRERAS, P. AND BONET, J.: *Barrelled locally convex spaces.* North-Holland Math. Studies 131. Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo. North-Holland. 1987.

[9] PTAK, V.: *Completenes and the open mapping theorems.* Bull. Soc. Math. France, 86, 41-74 (1958).

[10] RUESS, W.: *Closed graph theorems for generalized inductive limit topologies.* Math Proc. Phil. Soc. 82, 67-83 (1977).

[11] RUESS, W.: *Generalized inductive limit topologies and barrelledness properties.* Pacific. J. Math. 63, No. 2, 499-516 (1976).

[12] RUESS, W.: *A Grothendieck representation for the completion of cones of continuous seminorms.* Math. Ann. 208, 71-90 (1974).

[13] RUESS, W.: *On the locally convex structure of strict topologies.* Math. Z. 153, 179-192 (1977).

[14] SAXON, S.: *Nuclear and product spaces, Baire-like spaces and the strongest locally convex topology.* Math. Ann., 197, 87-106 (1972).

[15] SCHMETS, J.: *Espaces de Fonctions Continues.* Lecture notes in Mathematics 519. Springer-Verlag. 1976.

[16] VALDIVIA, M.: *Absolutely convex sets in barrelled spaces.* Ann. Inst. Fourier 21 3-13 (1971).

[17] VALDIVIA, M.: *A note on locally convex spaces.* Math. Ann. 201, 145-148 (1973).

[18] VALDIVIA, M.: *Mackey convergence and the closed graph theorem.* Arch. Math. 25, 649-656 (1974).

[19] VALDIVIA, M.: *Topics in locally convex spaces.* North-Holland Math. Studies 67. Amsterdam, New York, Oxford. North-Holland. 1982.

[20] WEBB, J. H.: *Sequential convergence in locally convex spaces.* Proc. Cambr. Phil. Soc. 64, 341-364 (1968).

Cátedra de Matemáticas (ETSIA)
Universidad Politécnica
Apartado de Correos 22012
46071 VALENCIA (SPAIN)