C-bases en espacios localmente convexos

POR CELESTINO MONTES CONTRERAS

Recibido: 18 enero 1984

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia

Abstract

We study the relationship between some concepts related to Cesàro bases in locally convex spaces. A characterization theorem of equicontinuous Cesàro bases and a continuity theorem are given.

Los espacios vectoriales que usaremos están definidos sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de los números reales o complejos. Si A es un subconjunto de un espacio vectorial denotaremos por $[A]$ su envoltura lineal. En lo que sigue un espacio significa un espacio vectorial topológico localmente convexo y separado. Una sucesión $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ de un espacio E es una base de E si todo elemento x en E admite una única representación en la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, x_n$$

Si las aplicaciones a_n, obviamente lineales, son continuas se dirá que la base es de Schauder. Si la sucesión de aplicación (S_n), definidas por

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, x_k$$

es equicontinua, la base se dirá equicontinua.

Estos conceptos pueden extenderse de forma natural para obtener el de base en el sentido de Cesàro (abreviadamente c-base): Una sucesión $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ de un espacio E es una c-base de E si todo elemento x en E admite una única representación en la forma:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, x_n\, (c)$$

donde el símbolo (c) indica que la convergencia se toma en el sentido de Cesàro, es decir

$$\text{lím}\, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_i(x)\, x_i = x$$

La estabilidad de la convergencia de Cesàro frente a la suma y el producto por un escalar, implica de forma inmediata que las aplicaciones a_n son lineales. Si además son continuas se dirá que la c-base es de Schauder. Si la sucesión de operadores (C_n), definidos por

$$C_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_i(x)\, x_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} S_j(x)$$

es equicontinua diremos que la c-base es equicontinua. La sucesión (a_n) recibirá el nombre de sucesión de coeficientes funcionales asociados a la c-base (abreviadamente s.c.f.a.).

Nos ocupamos en el primer apartado de analizar las relaciones entre los conceptos de base y c-base. En el segundo estudiamos un teorema de caracterización de c-bases equicontinuas y algunas consecuencias. El tercero se dedica a estudiar el problema de la continuidad de la sucesión (a_n).

1. BASES Y C-BASES

Son conocidos ejemplos de c-bases que no son bases. Basta tomar el espacio S_c de las sucesiones escalares que son sumables en el sentido de Cesàro con la norma

$$\|(x_n)\| = \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} x_i \right|$$

En 2 damos una prueba de que los vectores canónicos (e_n) forman una c-base de Schauder de S_c. Una prueba directa de este hecho así como de que (e_n) no es una base de S_c puede encontrarse en [3].

A pesar de que toda sucesión convergente de un espacio es convergente en el sentido de Cesàro al mismo límite no es cierto que toda base sea c-base:

Ejemplo 1.– Una base que no es c-base.

Sea E un espacio con una c-base de Schauder (x_n), $n = 1, 2, \ldots$ que no sea base (por ejemplo, S_c). Sea (a_n) su s.c.f.a. Consideremos el espacio de aquellos elementos x en E tales que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, x_n$$

converge en sentido ordinario. Para estos elementos se tiene

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, x_n$$

Como (x_n) no es una base de E, $H \neq E$. Sea x_0 un elemento de $E \setminus H$ y $F: = [H \cup \{x_0\}]$. En F consideramos la sucesión $y_1: = x_0$, $y_n: = x_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$. Si $y = \alpha x_0 + h$ con h en H entonces

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n$$

con $\beta_1 = \alpha$ y $\beta_n = a_{n-1}(h)$ con lo cual todo elemento de F se puede desarrollar respecto a la sucesión (y_n). Este desarrollo es único puesto que si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n = 0$$

tenemos que

$$\beta_1 x_0 = - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n+1} x_n$$

Al ser a_n continua obtenemos que $a_n(\beta_1 x_0) = \beta_{n+1}$ y por tanto $\beta_1 x_0 \in H$ con lo cual $\beta_1 = 0$; por la regularidad del método de Cesàro obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n+1} x_n = 0 \ (c)$$

y como x_n es una c-base $\beta_2 = \beta_3 = ... = 0$. Así (y_n) es una base de F que no es c-base ya que x_0 admite dos desarrollos:

$$x_0 = y_1 \qquad \text{y} \qquad x_0 = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}(x_0) y_n$$

Hagamos observar que el primer coeficiente funcional asociado a (y_n) no es continuo. De hecho podemos afirmar:

Proposición 1.– Toda base de Schauder es una c-base de Schauder.

Demostración.– La unicidad del desarrollo puede ser deducida de la continuidad de s.c.f.a.

Igualmente de forma sencilla puede obtenerse la relación entre bases equicontinuas y c-bases equicontinuas:

Proposición 2.– Toda base equicontinua es una c-base equicontinua.

Demostración.– Si p es una seminorma continua de E

$$\sup_n p(C_n(x)) \leqslant \sup_n p(S_n(x))$$

Finalmente hacer notar que siguiendo las ideas de [5, §43,5] puede probarse que todo espacio con una c-base equicontinua tiene la propiedad de la aproximación en el sentido de que el conjunto de operadores de rango finito es denso en el espacio de las aplicaciones lineales y continuas de E en E con la topología de la convergencia precompacta, así como que si un espacio es tonelado toda c-base de Schauder para $E[\sigma(E, E')]$ es c-base equicontinua de $E[\beta(E, E')]$.

2. UN TEOREMA DE CARACTERIZACION. EJEMPLOS

Se trata en este apartado de ver si el comportamiento de ciertos operadores en la envoltura lineal de una sucesión permite asegurar que ésta es una c-base. El resultado que presentamos es una extensión a espacios localmente convexos de un teorema de Singer [6], para espacios de Banach. Usaremos la siguiente notación: Dada una sucesión (x_n) de un espacio vectorial y escalares b_i escribimos

$$\sigma_n\Big(\sum_{i=1}^{m} b_i x_i\Big) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{n-j+1}{n} b_j x_j & \text{si } n \leqslant m \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{n-j+1}{n} b_j x_j & si\ n \geqslant m \end{cases}$$

Dicha expresión depende de la representación que se escoja de

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Teorema 1.– Sea $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ una sucesión fundamental de elementos no nulos de un espacio E. Son equivalentes.

1) (x_n) es una c-base equicontinua.
2) Si p es una seminorma continua de E, existe otra q y una constante k_p tal que:

$$\sup\Big\{p\Big(\sigma_n\Big(\sum_{j=1}^{m} b_j x_j\Big)\Big):\ q\Big(\sum_{1}^{m} b_j x_j\Big) \leqslant 1,\ m \in \mathbb{N},\ a_j \in \mathbb{K}\Big\} \leqslant K_p$$

Demostración.– Es obvio que si suponemos (1), (x_n), $n = 1, 2, \dots$ es linealmente independiente. Veamos que ocurre lo mismo si suponemos (2).

Por reducción al absurdo sea n el primer natural tal que

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i$$

y un escalar λ.

Sea p una seminorma continua de E y q la que le corresponde por (2). Entonces

$$q\left(\sum_{j=1}^{n-1} \lambda\lambda_i x_i - \lambda x_n\right) = 0$$

y por tanto

$$p\left(\sigma_n\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda\lambda_i x_i - \lambda x_n\right)\right) \leqslant K_p$$

De aquí que

$$p\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j+1}{n} \lambda_j x_j - \frac{1}{n} x_n\right) \leqslant \frac{K_p}{|\lambda|}$$

si $\lambda \neq 0$; es decir

$$p\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j+1}{n} \lambda_j x_j - \frac{1}{n} x_n\right) = 0$$

Por la separación del espacio

$$x_n = \sum_{j=1}^{n-1} (n-j+1)\, \lambda_j x_j$$

y como $\{x_1, ..., x_{n-1}\}$ son linealmente independiente $(n-j+1)\,\lambda_j = \lambda_j$, lo que implica que $\lambda_j = 0$ para todo j y $x_n = 0$.

Visto que los vectores (x_n) pueden suponerse linealmente independientes σ_n son entonces operadores definidos en $[(x_n)_{n=1,2,...}]$ y la condición (2) puede enunciarse: (2) σ_n son equicontinuos.

Así (1) implica (2) es trivial. Para ver que (2) implica (1) tengamos en cuenta que

$$\sigma_n\left(\sum_{j=1}^{m} b_j x_j\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} b_i x_i$$

(Tomando $b_i = 0$, si $i \geqslant m$). Es trivial entonces que

$$b_n x_n = n\sigma_n \left(\sum_{j=1}^{m} b_j x_j \right) - 2(n-1)\,\sigma_{n-1} \left(\sum_{j=1}^{m} b_j x_j \right) +$$

$$+ (n-2)\,\sigma_{n-2} \left(\sum_{j=1}^{m} a_j x_j \right)$$

Por tanto la aplicación a_n: $[(x_n)_{n=1,2,\ldots}] \to \mathbb{K}$ definida por

$$a_n \left(\sum_{j=1}^{m} b_j x_j \right) = b_n \quad \text{si } n \leqslant m \qquad a_n \left(\sum_{j=1}^{m} b_j x_j \right) = 0 \quad \text{si } n > m$$

es continua, por lo que puede extenderse de forma única a una forma lineal y continua en E, que denotaremos también por a_n.

Sea

$$C_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_i(x)\, x_i$$

C_n es entonces una aplicación lineal continua y coincide en $[(x_n)_{n=1,2,\ldots}]$ con σ_n. (C_n) será entonces una sucesión equicontinua en $[(x_n)_{n=1,2,\ldots}]$ y, por densidad, en E. Además C_n converge a la identidad I en $[(x_n)_{n=1,2,\ldots}]$. Como en los equicontinuos coinciden las topologías de la convergencia simple en cualquier subespacio denso obtenemos que $C_n(x) \to I(x) = x$ en E. Es decir

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, x_n \,(c)$$

Este desarrollo es único por ser a_n lineal y continua, q.e.d.

El teorema de caracterización para espacios de Banach (Singer [6]) permite demostrar que los vectores canónicos (e_n) de S_c forman una c-base de dicho espacio de forma más sencilla que en [3]:

Proposición 3.– (e_n) es una c-base de S_c.

Demostración.– S_c es isomorfo a c, espacio de las sucesiones convergentes, mediante el isomorfismo T: $S_c \to c$ definido por

$$T(x_n) := \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} x_i \right)$$

Los vectores básicos de c, $(1, \ldots, 1, \ldots)$ y e_n se transforman mediante T^{-1} en e_1 y $(0, \ldots, 0, n, -2n, n, \ldots)$. Por tanto φ es denso en S_c. Basta probar entonces que la sucesión de operadores (σ_n) asociados a (e_n) es equicontinua. Usaremos la siguiente notación:

$$P_n(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)$$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}(P_1(x) + \ldots + P_n(x))$$

$$s_n(x) = x_1 + \ldots + x_n$$

$$Z_n(x) = \frac{1}{n}(s_1(x) + \ldots + s_n(x))$$

$$\|x\| = \sup_n |Z_n(x)|$$

Es fácil comprobar que

$$s_h(\sigma_n(x)) = \begin{cases} x_1 + \dfrac{n-1}{n} x_2 + \ldots + \dfrac{n-h+1}{h} x_h & \text{si } h \leqslant n \\ Z_n(x) \qquad \text{si } h \geqslant n \end{cases}$$

Si $p \leqslant n$ se tiene

$$s_p(\sigma_n(x)) = \frac{1}{n}(nx_1 + (n-1)x_2 + \ldots + (n-p+1)x_p) =$$

$$= \frac{1}{n}[(n-p+1)s_p(x) + s_{p-1}(x) + s_{p-2}(x) + \ldots + s_1(x)] =$$

$$= \frac{1}{n}[(n-p)s_p(x) + pZ_p(x)]$$

Con lo cual de nuevo si $p \leqslant n$

$$Z_p(\sigma_n(x)) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} s_i(C_n(x)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{n}[(n-i)s_i(x) + iZ_i(x)] =$$

$$= \frac{1}{pn}\sum_{i=1}^{p}[(p-i+1)s_i(x) + (n-p-1)s_i(x) + iZ_i(x)] =$$

$$= \frac{1}{np}\sum_{i=1}^{p}(p-i+1)s_i(x) + \frac{n-p-1}{pn}\sum_{i=1}^{p}s_i(x) + \frac{1}{pn}\sum_{i=1}^{p}iZ_i(x) =$$

$$= \frac{2}{pn}\sum_{i=1}^{p}iZ_i(x) + \frac{n-p-1}{n}Z_p(x)$$

De aquí que

$$|Z_p(\sigma_n(x)| \leqslant \frac{2}{pn} \sum_{i=1}^{n} i\,|Z_i(x)| + \left| \frac{n-p-1}{n} \right| |Z_p(x)| \leqslant 3\,\|x\|$$

Si ahora tomamos $p \leqslant n$ tendremos:

$$|Z_p(\sigma_n(x))| = \frac{1}{p}\,[s_1(\sigma_n(x)) + \ldots + s_n(\sigma_n(x)) + (p-n)\,s_n(\sigma_n(x))] =$$

$$= \frac{1}{p}\,(nZ_n(\sigma_n(x) + (p-n)\,s_n(\sigma_n(x))) = \frac{n}{p}\,Z_n(C_n(x)) + \frac{p-n}{p}\,Z_n(x)$$

Con lo que $|Z_p(\sigma_n(x))| \leqslant 4\,\|x\|$. Así

$$\|\sigma_n(x)\| = \sup_p |Z_p(\sigma_n(x))| \leqslant 4\,\|x\|$$

y (σ_n) es equicontinua en S_c, q.e.d.

En primer lugar separaremos los conceptos de c-base de Schauder y de c-base equicontinua.

Ejemplo 2.– Una c-base de Schauder que no es c-base equicontinua.

Es conocido que en el espacio de Fréchet se da las sucesiones que son sumables en el sentido de Abel con la topología derivada del sistema de normas $(\|\cdot\| + p_j)$ donde:

$$\|x\| = \sup_{0 \leqslant t < 1} \left| \sum_{i=1}^{\infty} t^{i-1} x_i \right| \qquad \text{y} \qquad p_j(x) = \sup_i |x_i| \left(\frac{j}{j+1} \right)^{i-1}$$

φ es denso ([7]). Como quiera que la inclusión $S_c \hookrightarrow sa$ es continua (e_n) es una c-base de Schauder de S_c con la topología inducida por sa. No puede ser equicontinua porque aplicando el teorema 1, sería una c-base de sa. Pero esto no es posible, ya que si

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \,\mathrm{e}_n(c)$$

Como la aplicación

$$S(x) = \lim_{t \to 1^-} \sum_{i=1}^{\infty} t^{i-1} x_i$$

es lineal y continua se tiene que

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(c)$$

con lo cual $x \in S_c$. Esto implicaría $S_c = sa$ lo cual es absurdo.

El ejemplo que damos a continuación separa las bases de Schauder de las equicontinuas y éstas de las c-bases equicontinuas.

Ejemplo 3.– Una base de Schauder que no es base equicontinua, pero sí es c-base equicontinua:

En el espacio cs de las sucesiones sumables, los vectores canónicos (e_n) forman una base de Schauder. Como la inclusión $cs \hookrightarrow S_c$ es continua (e_n) es una base de Schauder de cs con la topología inducida por S_c, que no puede ser equicontinua pues en caso contrario (e_n) sería una base de S_c en virtud del correspondiente teorema de caracterización para bases [4, pág. 298] cosa que es fácil probar que no es cierta. Por otra parte, como c-base sí es equicontinua como se vio anteriormente.

3. EL PROBLEMA DE LA CONTINUIDAD

El problema que nos planteamos ahora es: Dada una c-base (no necesariamente de Schauder), ¿bajo qué condiciones podemos afirmar la continuidad de la s.c.f.a.? El resultado obtenido sigue la idea original de Newns y se apoya en el teorema de la gráfica cerrada de De Wilde, siguiendo las ideas de [2].

Daremos el resultado en un contexto más general que el de las c-bases:

Sea E un espacio y F un subespacio vectorial de E. Supongamos que (F_n) es una sucesión de subespacios de E de tal forma que cualquier elemento x de F admite una (única) representación de la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$$

donde $f_n \in F_n$. Se dice entonces que (F_n) es una c-descomposición de F.

Llamaremos c-descomposición débil a una c-descomposición para la topología débil de E, $\sigma(E, E')$.

Consideremos las aplicaciones:

$$\begin{aligned} \tau_n\colon F &\longrightarrow F_n \\ x &\longmapsto f_n \end{aligned}$$

Es obvio que las aplicaciones τ_n son lineales. En el caso de que dichas aplicaciones sean continuas, diremos que la c-descomposición es de Schauder.

Teorema 2.– Sea E un espacio ultrabornológico y F un espacio sucesionalmente completo que admite una red de tipo $\mathscr{C}$.

Sea $T: E \to F$ una aplicación lineal y continua. Supongamos que $T(E)$ admite una c-descomposición débil en subespacios L_n sucesionalmente cerrados en F. Entonces:

(i) $\tau_n \circ T: E \to F$ es continua para todo n.

(ii) La sucesión $\left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \tau_j \circ T\right)_{\mathrm{n}}$ es equicontinua.

(iii) $T = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i \circ T(c)$. La serie es c-convergente en la topología de la convergencia uniforme en los precompactos de E, cuando en F se toma la topología débil. Es decir, en $\mathscr{L}_c(E, F[\sigma(F, F')])$.

Demostración.– Sea Q la familia de seminormas continuas de F. Sea $l^\infty(F)$ el espacio de sucesiones acotadas de F, que se puede dotar del sistema de seminormas $Q^* = (q^*)_{q \in Q}$, definidas por:

$$q^*(f_n) = \sup_n (q(f_n))$$

Como F es sucesionalmente completo y admite una red de tipo $\mathscr{C}$, $l^\infty(F)$ admite una red de tipo $\mathscr{C}$ (De Wilde [1]). Sea $x \in E$. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n T(x)$$

es $\sigma(F, F')$-convergente en el sentido de Cesàro a $T(x)$, con lo cual la sucesión de las sumas parciales de Cesàro de dicha serie:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \tau_j T(x)\right)_n$$

es $\sigma(F, F')$-convergente y por lo tanto acotada en F.

Podemos entonces definir la aplicación:

$$T': E \longrightarrow l^\infty(F)$$

$$x \longmapsto \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \tau_j T(x)\right)_n$$

que evidentemente es una aplicación lineal.

Nuestro próximo objetivo será demostrar su continuidad. Para ello vamos a basarnos en el teorema de la gráfica cerrada de De Wilde.

Demostraremos pues que T' tiene una gráfica sucesionalmente cerrada: Si $(x_i) \to x$ en E y $(T' x_i) \to (h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ en $l^\infty(F)$, habremos de demostrar que $T' x = (h_m)_{m \in \mathbb{N}}$.

a) Probaremos en primer lugar que (h_m) converge a Tx en la topología débil de F:

Sean $f \in F'$ y $\varepsilon > 0$ y tengamos en cuenta que:

$$|f(Tx - h_m)| \leqslant |f(Tx - Tx_i)| + \left|f\left(Tx_i - \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \tau_j T(x_i)\right)\right| +$$

$$+ \left|f\left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \tau_j T(x_i) - h_m\right)\right| \qquad (1)$$

Al ser $f \in F'$, $|f| \in Q$ y del hecho de ser $T' x_i \to (h_m)$, podemos deducir la existencia de un i_0 de forma que:

$$|f|^* \left(\left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \tau_j Tx_i - h_m\right)_{m \in \mathbb{N}}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{si } i \geqslant i_0$$

Es decir:

$$\left|f\left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \tau_j Tx_i - h_m\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \qquad i \geqslant i_0 \quad m \in \mathbb{N}$$

Por otra parte $x_i \to x$ y T es continua, por lo que $Tx_i \to Tx$ en F y por tanto $Tx_i \to Tx$ en la topología $\sigma(F, F')$. Esto nos permite escoger i_0 con la condición adicional de que

$$|f(Tx_i - Tx)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{si } i \geqslant i_0$$

Las dos últimas desigualdades junto con (1) demuestran que:

$$f(Tx - h_m)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \left|f\left(Tx_i - \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \tau_j Tx_i\right)\right|$$

$$\mathrm{i} \geqslant i_0, \quad m \in \mathbb{N}$$

Tomemos entonces $i = i_0$. Sin más que tener en cuenta la definición de τ_n, tenemos:

$$Tx_{i_0} = \lim_m \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \tau_j \, Tx_{i_0}$$

en la topología $\sigma\,(F, F')$.

Podemos tomar entonces un m_0 de forma que:

$$\left| f\left(Tx_{i_0} - \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \tau_j \, Tx_{i_0}\right) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{si } m \geqslant m_0$$

Por lo que $|f(Tx - h_m)| \leqslant \varepsilon$ si $m \geqslant m_0$.

b) Veamos ya que $T'x = (h_m)$.

Del hecho de ser $T'x_i \to (h_m)$ en $l^\infty(F)$, deducimos que dados $\varepsilon > 0$ y $q \in Q$, podemos encontrar un i_0 de forma que:

$$q^* \, (T'x_i - (h_m)) \leqslant \varepsilon \qquad \text{si } i \geqslant i_0$$

Es decir:

$$q\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \tau_j \, Tx_i - h_m\right) \leqslant \varepsilon \qquad \text{si } i \geqslant i_0 \text{ y } m \in \mathbb{N}$$

En particular:

$$A_m^{(i)} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \tau_j \, Tx_i \xrightarrow{i} h_m \qquad \text{en } F \text{ para } m \in \mathbb{N}$$

Definamos $h_0 = h_{-1} = 0$, y probemos que:

$$mh_m - (m-1)\, h_{m-1} + (m-2)\, h_{m-2} \in L_m$$

Para $m = 1$ tenemos que $A_1^{(i)} = \tau_1 \, Tx_i \xrightarrow{i} h_1$. Como $\tau_1 \, Tx_i \in L_1$ y L_1 es sucesionalmente cerrado, $h_1 \in L_1$.

Para $m = 2$, al ser

$$A_2^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{2} \sum_{j=1}^{n} \tau_j \, \mathrm{Tx}_i = \frac{1}{2}\, (2\tau_1 \, Tx_i + \tau_2 \, Tx_i)$$

converge a h_2, tendremos que:

$$2A_2^{(i)} - 2A_1^{(i)} = \tau_2 \, Tx_i \to 2h_2 - 2h_1$$

Y de la misma forma que antes $2h_2 - 2h_1 \in L_2$.

Si $m > 2$

$$A_m^{(i)} = \frac{1}{m} \left[2(m-1) A_{m-1}^{(i)} - (m-2) A_{m-2}^{(i)} + \tau_m Tx_i\right]$$

converge a h_m, de donde

$$\tau_m Tx_i = mA_m^{(i)} - 2(m-1) A_{m-1}^{(i)} + (m-2) A_{m-2}^{(i)}$$

convergerá a $mh_m - 2(m-1) h_{m-1} + (m-2) h_{m-2}$.

De nuevo el hecho de ser L_m sucesionalmente cerrado y $\tau_m Tx_i \in L_m$ nos asegura que:

$$mh_m - 2(m-1) h_{m-1} + (m-2) h_{m-2} \in L_m$$

Puede demostrarse fácilmente por inducción que la n-ésima suma parcial de Cesàro de la serie:

$$\sum (mh_m - 2(m-1) h_{m-1} + (m-2) h_{m-2})$$

es h_n. Si tenemos en cuenta lo demostrado en **a)** obtendremos

$$\sum_{m=1}^{\infty} (mh_m - 2(m-1) h_{m-1} + (m-2) h_{m-2}) = Tx(c)$$

donde la convergencia es en la topología débil $\sigma(F, F')$. Ahora bien,

$$\sum \tau_m Tx(c) = Tx$$

es la única c-descomposición débil de Tx con respecto a (L_n). De aquí que:

$$mh_m - 2(m-1) h_{m-1} + (m-2) h_{m-2} = \tau_m Tx$$

Serán iguales por tanto las sumas parciales de Ceàro de las series

$$\sum (mh_m - 2(m-1) h_{m-1} + (m-2) h_{m-2}) \qquad \text{y} \qquad \sum \tau_m Tx$$

Las de la primera son h_m. Las de la segunda forman el término general de $T'x$. Tenemos por tanto que $T'x = (h_m)$.

Hemos probado pues que $T'\colon E \to l^\infty(F)$ tiene gráfica sucesionalmente cerrada. El teorema de la gráfica cerrada de De Wilde nos asegura entonces su continuidad.

Quiere decir esto que si $q \in Q$ podremos encontrar una seminorma continua p en E de forma que:

$$q^*(T'x) \leqslant p(x)$$

Es decir:

$$q\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\tau_j\,T(x)\right)\leqslant p(x)\qquad n\in\mathbb{N}$$

De donde trivialmente se concluye (ii).

Para concluir (i) basta tener en cuenta las siguientes igualdades:

$$\tau_1\circ T=\frac{1}{1}\sum_{m=1}^{1}\sum_{j=1}^{m}\tau_j\circ T$$

$$\tau_2\circ T=2\left(\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2}\sum_{j=1}^{m}\tau_j\circ T\right)-2\left(\frac{1}{1}\sum_{m=1}^{1}\sum_{j=1}^{m}\tau_j\circ T\right)$$

$$\tau_n\circ T=n\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\tau_j\circ T\right)-2(n-1)\left(\frac{1}{n-1}\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\tau_j\circ T\right)+$$

$$+(n-2)\left(\frac{1}{n-2}\sum_{m=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{m}\tau_j\circ T\right)\qquad \text{si } n>2$$

Todas ellas de fácil comprobación y que expresan $\tau_n\circ T$ como combinación lineal de aplicaciones continuas.

Para acabar, fijémonos en que la sucesión

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\tau_i\circ T\to T\qquad \text{en } \mathscr{L}_s(E, F[\sigma(F, F')])$$

y que el conjunto

$$H=\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\tau_i\circ T\colon\ n=1,2,\ldots\right\}\cup\{T\}$$

es un equicontinuo en $\mathscr{L}(E, F)$.

Coinciden entonces en H, las topologías de la convergencia simple y de la convergencia uniforme en los precompactos ([5], §39.4), de donde

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\tau_i\circ T\to T\qquad \text{en } \mathscr{L}_c(E, F[\sigma(F, F')])$$

que es lo que se afirmaba en (iii), q.e.d.

Corolario 1.– Si E es un espacio bornológico y sucesionalmente completo que admite una red de tipo $\mathscr{C}$, toda c-descomposición débil en subespacios sucesionalmente cerrados E_n es una c-descomposición Schauder.

Demostración.– Al ser E bornológico y sucesionalmente completo es ultrabornológico. Apliquemos entonces el teorema con $E=F$ y $T=I$. Obtendremos entonces que τ_n es continua para todo n.

Veamos que la c-descomposición débil es una c-descomposición en la topología de E.

Es claro que si

$$x \in \mathrm{N} := \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right]$$

se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n\, x = x\,(c)$$

en la topología de E. Esto prueba que

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n\,(c)$$

en $\mathscr{L}(E)$ con la topología de la convergencia simple en N.

Ahora bien, N es $\sigma\,(E, E')$-denso y por tanto denso en E. Por la conclusión (2) del teorema

$$H = \left\{\left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \tau_j\right) :\ n = 1, 2, \dots\right\} \cup \{I\}$$

es un equicontinuo en E. Coincidirán pues en H las topologías de la convergencia simple en N y en E de donde concluimos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n\,(x) = x \qquad \text{si } x \in E \qquad \text{q.e.d.}$$

Corolario 2.– Toda c-base débil en un espacio bornológico sucesionalmente completo con una red de tipo $\mathscr{C}$ es una c-base de Schauder de E.

BIBLIOGRAFIA

[1] DE WILDE, M.: *Closed graph theorems and webbed spaces.* Liege (1978).

[2] DE WILDE, M.: *On weak Shauder decompositions.* Studia math. XLI, pp. 145-148 (1972).

[3] FLORENCIO, M., PEREZ CARRERAS, P.: *Sobre sumabilidad de Cesáro en el espacio CS (I).* Rev. Real Ac. Ci. Ex. Fis. Nat. pp. 1184-1197 (1981).

[4] JARCHOW, H.: *Locally convex Spaces.* (1981).

[5] KOTHE, G.: *Topological Vector Spaces II.* (1979).

[6] SINGER, I.: *On cesàro bases in Banach spaces.* Rev. Math. Pures et appl. 7, pp. 135-142 (1962).

[7] ZELLER, K.: *Sur la méthode de somation d'Abel.* Comptes rendus de l'Académic des sciences (París) 236, pp. 568-569 (1953).

Departamento de Matemática Aplicada
E.S.I.I. de la Universidad de Sevilla