

Mosaicos aleatorios

Por LUIS A. SANTALO

Conferencias-seminario expuestas en la Real Academia de Ciencias
los días 3 y 4 de noviembre de 1988.

Académico correspondiente

I. MOSAICOS DETERMINADOS

1.1. Definiciones

Llamaremos *mosaico* a toda familia de polígonos convexos y acotados, que sea localmente finita y cubra totalmente el plano sin superponerse

Considerado como un grafo extendido a todo el plano, en todo mosaico se distinguen los polígonos que lo constituyen, llamados *celdas* y los *nodos* o puntos comunes a tres o más celdas, junto con los *arcos* que unen dos nodos y pertenecen exactamente a dos celdas.

Cada celda es un polígono convexo acotado, con un número finito de vértices y un número finito de lados. Obsérvese que el número de vértices de una celda puede ser diferente del número de lados de la misma. Por ejemplo, la celda ADEF de la figura 1 tiene 4 vértices y, sin embargo, tiene 6 lados: AB, BC, CD, DE, EF, FA. Esto se debe a que pueden existir nodos del grafo asociado, como los B y C de la figura, en los que el ángulo de dos lados contiguos que en él concurren sea igual a 180° . Estos nodos se llaman *junturas* (Cowan [3], [4]). Los nodos B y C no son vértices de la celda ADEF, pero sí

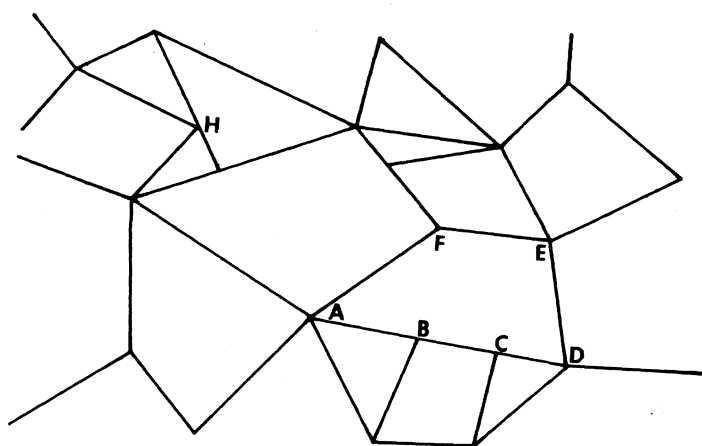


FIGURA 1.

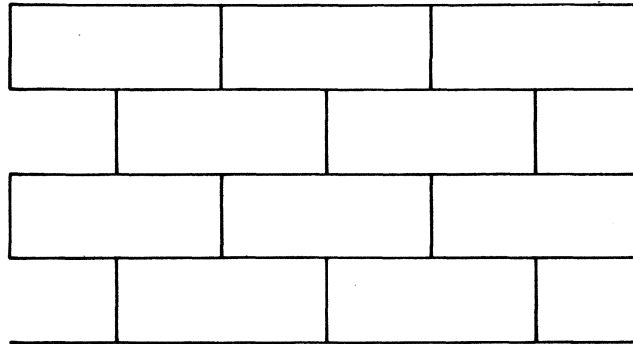


FIGURA 2.

son vértices de las otras celdas que en ellos concurren. Análogamente en el mosaico de la figura 2 las celdas son rectángulos de 4 vértices y 6 lados: todos los vértices son junturas. En todas las junturas, lo mismo que en todos los nodos, concurren por lo menos 3 arcos, pero pueden concurrir más, como en la juntura H de la figura 1. en la que concurren 4 arcos.

Un caso importante de mosaicos es aquel en que todas las celdas son congruentes y existe un subgrupo G del grupo de los movimientos del plano, tal que cualquier celda se puede superponer con cualquier otra por una operación de G que superpone todo el mosaico sobre sí mismo. Estos subgrupos G para los cuales existen ciertos dominios del plano, llamados *dominos fundamentales*, tales que sus transformados por G cubren todo el plano sin superponerse, se llaman *grupos cristalográficos* y se ha demostrado, por E. Fedorov en 1891 [7] y por G. Pólya en 1924 [28], que solamente existen 17 de ellos no isomorfos. Cada grupo cristalográfico admite infinitos dominios fundamentales, que elegidos y agrupados convenientemente, y pintados con distintos colores, han dado lugar a mosaicos clásicos y a pinturas famosas como las modernas de M. C. Escher (1898-1972) [6]. En los mosaicos de la Alhambra de Granada se han descubierto los 17 grupos cristalográficos subyacentes, lo que ha dado lugar a interesantes estudios, como los de Montesiños Amilibia [25], [26] y los de Pérez Gómez [27].

Detalles sobre los grupos cristalográficos y los mosaicos que de ellos derivan, pueden verse en los libros de Coxeter [5], Guggenheimer [14] y Fejes-Toth [8], así como en el artículo elemental y claro de Schattschneider [35]. Muchos ejemplos de mosaicos y clasificaciones de los mismos, se encuentran en el libro de Grünbaum y Shephard [13].

1.2. Características de un mosaico

Sea un mosaico M . Consideremos en el plano un círculo $B(R)$ de radio R y sea $C(R)$ el número de celdas de M que están totalmente contenidas en el círculo. El *área media* $E(A)$ de las celdas del mosaico se define por

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi R^2}{C(R)} = E(A). \quad (I.1)$$

Considerando M como un grafo del plano, y llamando $S(R)$ a la longitud total de la parte del grafo contenida en el círculo $B(R)$, el *perímetro medio* de las celdas se define por

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2S(R)}{C(R)} = E(L). \quad (I.2)$$

Si $C_i^*(R)$ indica el número de celdas contenidas en $B(R)$ y que tiene N_i^* lados, el valor medio del número de lados de las celdas se define por

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum C_i^*(R) N_i^*}{C(R)} = E(N^*). \quad (I.3)$$

Análogamente, si $C_i(R)$ es el número de celdas pertenecientes a $B(R)$ que tienen N_i vértices, el valor medio del número de vértices de las celdas del mosaico se define por

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum C_i(R) N_i}{C(R)} = E(N). \quad (I.4)$$

Finalmente, si $C_i^+(R)$ es el número de nodos del mosaico interiores a $B(R)$, a los que concurren N_i^+ arcos, se tiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum C_i^+(R) N_i^+}{N(R)} = E(N^+). \quad (I.5)$$

donde $N(R)$ es el número de nodos del mosaico interiores a $B(R)$ y $E(N^+)$ es el valor medio del número de arcos que concurren en los nodos del mosaico. Suponemos que los mosaicos son tales, que los límites (I.1), ..., (I.5) existen.

Es interesante observar que los límites anteriores no varían si, en lugar de considerar las celdas totalmente interiores a $B(R)$, se consideran las celdas que "tienen punto común" con $B(R)$. En efecto, si $C_1(R)$ representa el número de celdas que tienen punto común con la circunferencia de radio R (borde de $B(R)$), siendo las celdas acotadas, supongamos de diámetro $\leq D$, y de área acotada inferiormente, supongamos $\geq \alpha$ (por la hipótesis de ser la familia de celdas localmente finita), se cumple, para R suficientemente grande

$$C_1(R) \alpha \leq \pi (R + D)^2 - \pi (R - D)^2. \quad (I.6)$$

Por otra parte, toda celda de diámetro $\leq D$ está contenida en un círculo de radio $D/\sqrt{3}$ (Bonnesen-Fenchel [2], p. 85) y por tanto

$$C(R) (\pi D^2/3) \geq \pi (R - D)^2. \quad (\text{I.7})$$

De (I.6) y (I.7) se deduce

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{C_1(R)}{C(R)} = 0$$

y por tanto en las definiciones (I.1), ..., (I.5) puede sustituirse $C(R)$ por $C(R) + C_1(R)$.

Esta observación es importante, pues no es válida para mosaicos del plano hiperbólico, por lo cual su estudio se hace más complicado, como puede verse en [34]. En este trabajo nos limitaremos a mosaicos del plano euclidiano.

Los límites (I.1), ..., (I.5) tampoco dependen del centro del círculo $B(R)$, pues el cociente del área común a dos círculos de radio R de centros fijos, y el área de cada uno de ellos, tiende a 1 para $R \rightarrow \infty$.

1.3. Un teorema sobre mosaicos

Consideremos la parte de un mosaico formada por las celdas que tienen punto común con un círculo $B(R)$ de radio R . Considerando esta parte como un grafo y llamando N_R al número total de nodos, A_R al de aristas o arcos y C_R al de caras, vale la relación de Euler

$$N_R - A_R + C_R = 1. \quad (\text{I.8})$$

Con las notaciones de (I.1) a (I.5) se tiene

$$\sum C_i^* N_i^* = 2A_R - O(R), \quad \sum C_i^* N_i^* = 2A_R \quad (\text{I.9})$$

donde $O(R)$ se refiere a aristas de celdas que cortan el borde de $B(R)$ y, por tanto, para $R \rightarrow \infty$ es $O(R)/R^2 \rightarrow 0$ y también $O(R)/C_R \rightarrow 0$. Aplicando (I.8) se tiene

$$\frac{C_R}{\sum C_i^* N_i^* + O(R)} + \frac{N_R}{\sum C_i^* N_i^*} = \frac{1 + A_R}{2A_R}.$$

Pasando al límite para $R \rightarrow \infty$ resulta

$$\frac{1}{E(N^*)} + \frac{1}{E(N^*)} = \frac{1}{2}. \quad (\text{I.10})$$

Puesto que $E(N^*) \geq 3$ resulta

$$E(N^*) \leq 6$$

es decir: *el valor medio del número de lados de las celdas de un mosaico es siempre igual o menor que 6*. En particular, si todas las celdas tienen el mismo número de lados, este número solamente puede ser 3, 4, 5 ó 6.

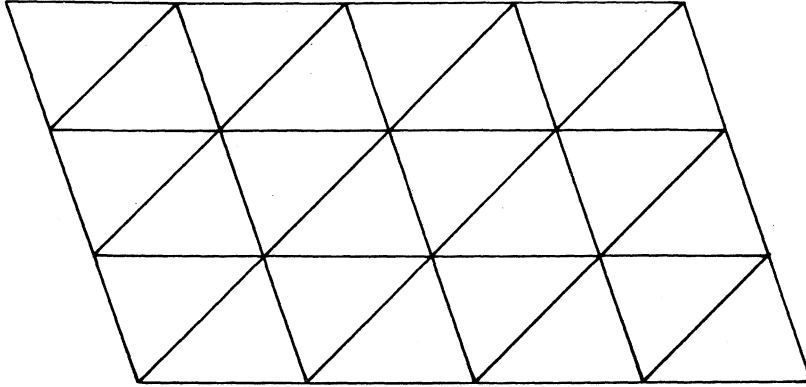


FIGURA 3.

Para el caso de triángulos, es evidente que se puede construir un mosaico con todas sus celdas congruentes a un triángulo dado cualquiera, por repeticiones sucesivas del mismo (Fig. 3). Lo mismo ocurre para cuadriláteros: dado un cuadrilátero cualquiera, repitiendo el mismo por simetrías sucesivas de centro los puntos medios de los lados, se tiene el plano cubierto por cuadriláteros congruentes al de partida (Fig. 4). Para cubrir el plano con un mosaico de pentágonos congruentes, éstos ya no pueden ser cualesquiera, sino que deben cumplir ciertas condiciones (Fig. 5). Lo mismo ocurre para los exágonos (Figs. 6 y 7).

El hecho de ser $E(N^*) \leq 6$ no significa que no pueda haber celdas de cualquier número de lados. Por ejemplo, el mosaico obtenido por repetición sucesiva del cuadrado de la figura 8 tiene un octógono en cada cuadrado, sin

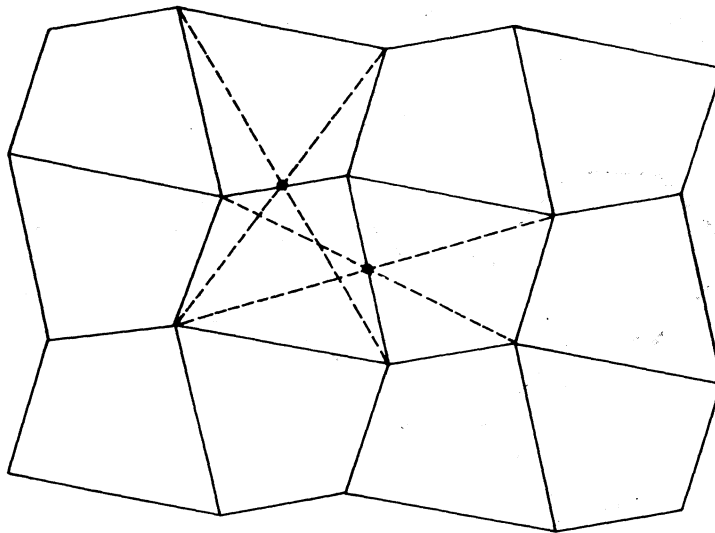


FIGURA 4.

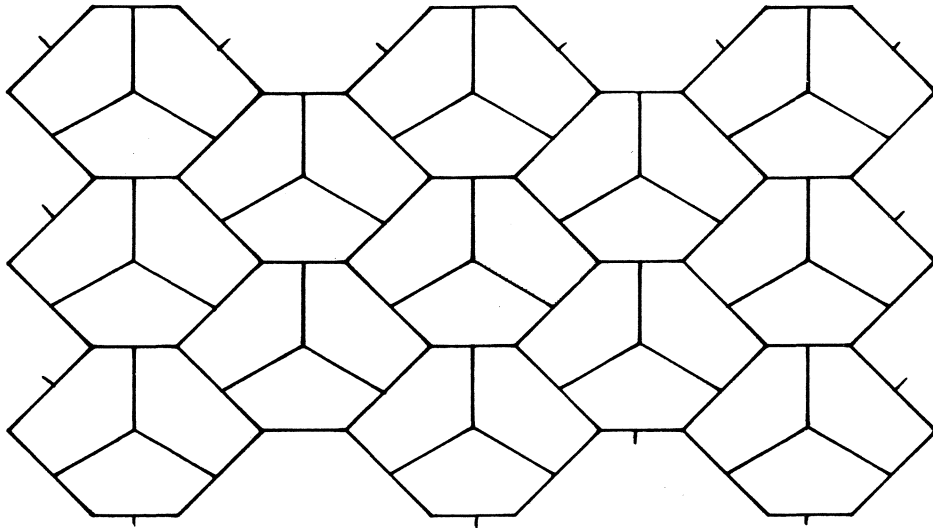


FIGURA 5.

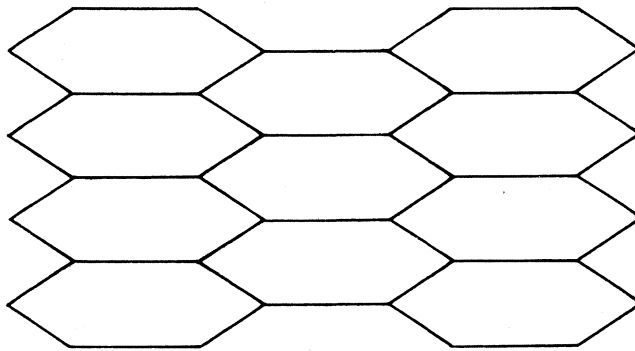


FIGURA 6.

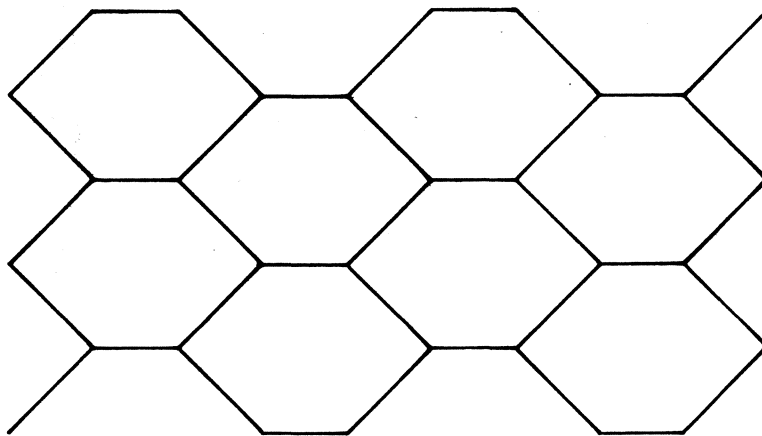


FIGURA 7.

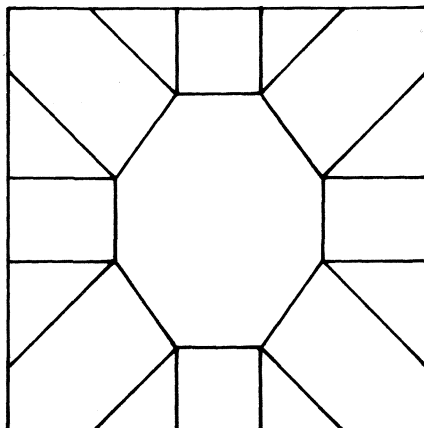


FIGURA 8.

embargo, el valor medio del número de lados de cada celda es 4. La construcción análoga para un cuadrado y un polígono convexo interior de m lados (par), tiene infinitos de estos polígonos, pero también tiene infinitos triángulos y cuadriláteros, de manera que el valor medio del número de lados de cada cara es, como antes, $(m + 5 \cdot 4 + 4(m - 4) + 3m)/(1 + 2m) = 4$.

Si un mosaico tiene caras cuyos números de lados sean m_1, m_2, \dots, m_n y la frecuencia con que aparece cada cara es la misma para todas, se debe cumplir $(m_1 + m_2 + \dots + m_n)/n \leq 6$. Es instructivo hallar ejemplos de mosaicos cuyas celdas sean polígonos convexos de únicamente m_1 ó m_2 lados, ambos con igual frecuencia, en todos los casos posibles, o sea, para todos los pares (m_1, m_2) tales que $m_1 + m_2 \leq 12$. Son interesantes los casos extremos $(3, 9)$, $(4, 8)$, $(5, 7)$. La figura 9 es un ejemplo de mosaico $(4, 8)$.

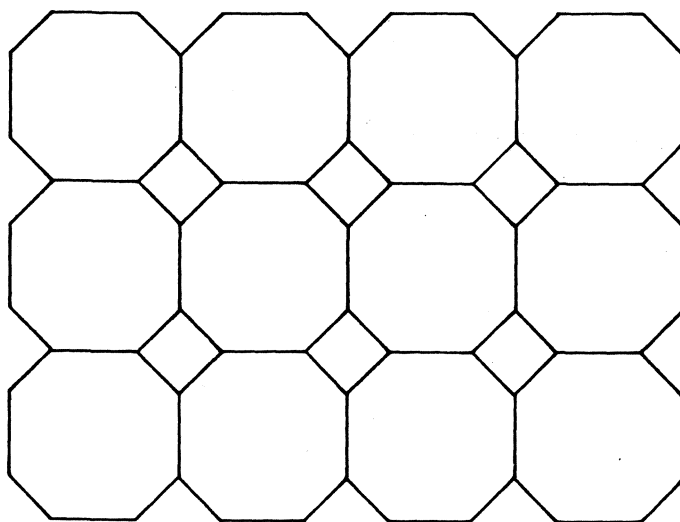


FIGURA 9.

Ejemplo: Comprobar que el mosaico de la figura 10 compuesto de triángulos equiláteros de altura h y cuadriláteros formados en celdas alternadas por los segmentos perpendiculares a los lados trazados por los centros de gravedad, tiene por características

$$E(A) = h^2 / 2\sqrt{3}, \quad E(L) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) h,$$

$$E(N^*) = 4,5, \quad E(N) = 3,75, \quad E(N^+) = 3,6.$$

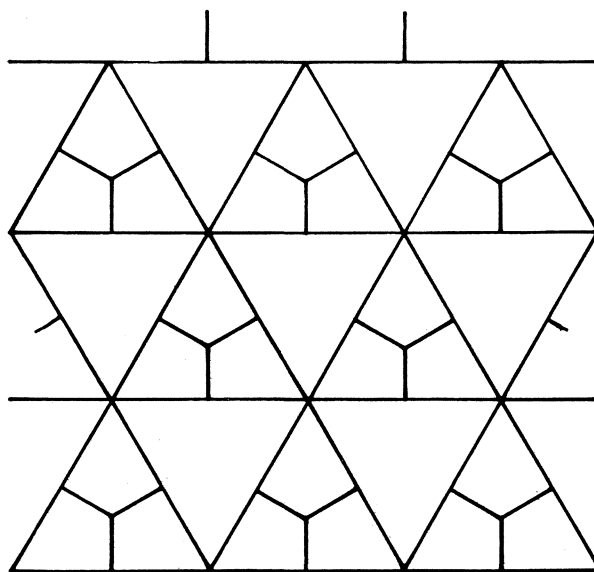


FIGURA 10.

II. MOSAICOS SEMI-ALEATORIOS

2.1. Definición

En los mosaicos considerados hasta ahora no interviene para nada la idea de azar. Son mosaicos determinados.

A partir de uno de estos mosaicos se pueden obtener otros modificando cada una de sus celdas por algún procedimiento regido por el azar. Los llamaremos *mosaicos semi-aleatorios*, porque el azar interviene únicamente modificando de alguna manera un mosaico determinado, dado de antemano. Se presenta entonces el problema de hallar los valores medios de las características de estos nuevos mosaicos.

Como esta definición no es muy precisa, vamos a dar algunos ejemplos aclaratorios.

2.2. Mosaicos triangulares semi-aleatorios

Dado un triángulo cualquiera T , siempre se puede engendrar un mosaico de celdas congruentes con T , trazando sucesivamente rectas paralelas por los vértices a los lados opuestos (Fig. 3). Si el triángulo T se ha obtenido por algún método "al azar", el mosaico obtenido será semi-aleatorio. Consideremos algunos ejemplos.

(a) Un método muy común de dar un triángulo al azar, consiste en tomar un segmento de longitud L_0 y dividirlo en tres segmentos mediante dos puntos elegidos al azar en el mismo, con densidad uniforme, y luego tomar los segmentos resultantes (de longitudes x, y, z) como lados del triángulo, siempre que la construcción sea posible, es decir, siempre que se cumpla $x < y + z$, $y < x + z$, $z < x + y$.

El método es equivalente a considerar un triángulo equilátero de altura L_0 y tomar como lados x, y, z las distancias a los tres lados de un punto P elegido al azar en el interior del triángulo equilátero, con densidad uniforme (Fig. 11). Es fácil ver que se cumple $x + y + z = L_0$ y que los puntos para los cuales existe el triángulo de lados x, y, z son los del triángulo equilátero que tiene por vértices los puntos medios de los lados del triángulo de partida. Entonces, la densidad uniforme para los triángulos T de lados x, y, z vale

$$dT_1 = (6/L_0^2) dx \wedge dy,$$

que es el elemento normalizado de área del plano, en función de las coordenadas x, y .

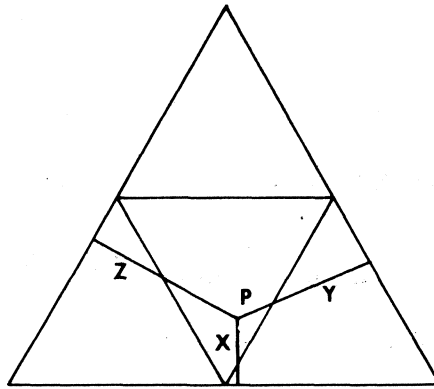


FIGURA 11.

Poniendo $2p = x + y + z = L_0 =$ perímetro del triángulo y utilizando la fórmula de Heron que da el área de un triángulo en función de los lados, resulta como valor medio de esta área,

$$E(A) = 6L_0^{-2} \int_0^p dy \int_{p-y}^p [p(p-x)(p-y)(x+y-p)]^{1/2} dx$$

puesto que las condiciones para que el triángulo sea posible son $p < x + y$, $x < p$. Haciendo la integración, resulta

$$E(A) = (\pi/140) L_0^2. \quad (\text{II.1})$$

Los demás valores medios son triviales y con las notaciones de 1.2 valen

$$E(L) = L_0, \quad E(N^*) = E(N) = 3, \quad E(N^\dagger) = 6. \quad (\text{II.2})$$

(b) Otra manera de dar un triángulo al azar consiste en dar un punto al azar, con densidad uniforme, dentro de un cubo de arista a y tomar las distancias x, y, z a las caras como lados del triángulo, siempre que la construcción sea posible, o sea, siempre que $x < y + z$, $y < x + z$, $z < x + y$. En este caso, la densidad para conjuntos de triángulos es

$$dT_2 = (2/a^3) dx \wedge dy \wedge dz$$

y un cálculo fácil da para el perímetro medio $E(L) = (3/2)a$. El cálculo del área media $E(A)$ conduce a integrales no fácilmente calculables. Los valores de N, N^* y N^\dagger son siempre los mismos (II.2) para todos los mosaicos de triángulos en la disposición de la figura 3.

(c) Se dan tres puntos al azar, con densidad uniforme, dentro de un círculo de radio R y el triángulo elegido para engendrar el mosaico es el que tiene por vértices estos tres puntos (Fig. 12). Si dP_i ($i = 1, 2, 3$) indica el elemento de área del plano en el punto P_i la densidad para los triángulos dichos es

$$dT_3 = (\pi R^2)^{-3} dP_1 \wedge dP_2 \wedge dP_3.$$

Los valores medios del perímetro y del área resultan ser

$$E(L) = (128/15\pi) R, \quad E(A) = (35/48\pi) R^2. \quad (\text{II.3})$$

Si los tres vértices del triángulo se eligen al azar, siempre con densidad uniforme, dentro de un cuadrado de lado a (Fig. 13), o sea, es

$$dT_4 = (a^2)^{-3} dP_1 \wedge dP_2 \wedge dP_3,$$

resulta

$$E(L) = (a/5) (\sqrt{2} + 2 + 5 \log(1 + \sqrt{2})),$$

$$E(A) = (11/144) a^2 \quad (\text{II.4})$$

y si se eligen dentro de un triángulo equilátero de lado a (Fig. 14), con densidad

$$dT_5 = (\sqrt{3} a^2/4)^{-3} dP_1 \wedge dP_2 \wedge dP_3,$$

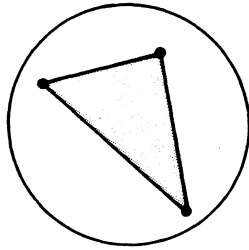


FIGURA 12.

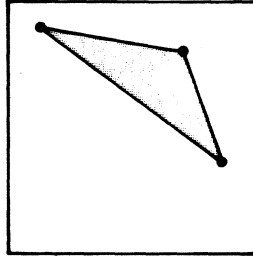


FIGURA 13.

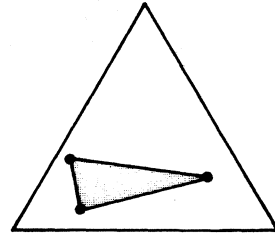


FIGURA 14.

resulta

$$E(L) = (9/5) (1/3 + (1/4) \log 3) a, \quad E(A) = (\sqrt{3}/48) a^2. \quad (\text{II.5})$$

Estos valores medios (II.3) a (II.5) se deducen fácilmente de las distancias medias conocidas entre dos puntos dados al azar en un círculo, cuadrado o triángulo equilátero (ver [30, p. 49]) o del área media del triángulo determinado por tres puntos elegidos al azar en esas figuras, la cual es un importante invariante por afinidades y ha sido calculada por diversos autores con motivo del llamado problema de Sylvester de la teoría de Probabilidades Geométricas [30, p. 64], [36].

(d) El triángulo al azar puede elegirse también por tres puntos dados al azar, con densidad uniforme, sobre la circunferencia de radio R (Fig. 15). Si s_1, s_2, s_3 son las abscisas de los tres vértices sobre dicha circunferencia, la densidad es

$$dT_6 = (2\pi R)^{-3} ds_1 \wedge ds_2 \wedge ds_3$$

y tras un pequeño cálculo resulta

$$E(L) = (12/\pi) R, \quad E(A) = (3/2\pi) R^2. \quad (\text{II.6})$$

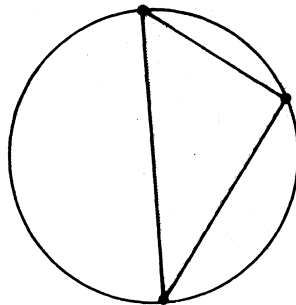


FIGURA 15.

Como último ejemplo, podemos citar que si sobre la circunferencia de radio R se eligen 4 puntos al azar, con densidad uniforme, se tiene un cuadrilátero aleatorio y el mosaico formado por cuadriláteros congruentes con el mismo tiene las características

$$E(L) = (16/\pi) R, \quad E(A) = (3/\pi) R^2. \quad (\text{II.7})$$

2.3. Mosaicos triangulares semi-aleatorios deducidos de otro mosaico

Si en cada celda de un mosaico determinado se elige un punto al azar y se une con los vértices de la celda, se tendrá un nuevo mosaico (semi-aleatorio) cuyas celdas son todas triángulos. Veamos dos ejemplos simples.

(a) Supongamos el mosaico formado por la repetición de triángulos equiláteros de lado a (Fig. 16). En cada celda se elige un punto al azar y se une con los vértices de la celda. Resulta así un nuevo mosaico triangular cuyas características son

$$\begin{aligned} E(A) &= (\sqrt{3}/12) a^2, & E(L) &= (5/3 + (1/2) \log 3) a, \\ E(N) = E(N^*) &= 3, & E(N^+) &= 6. \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

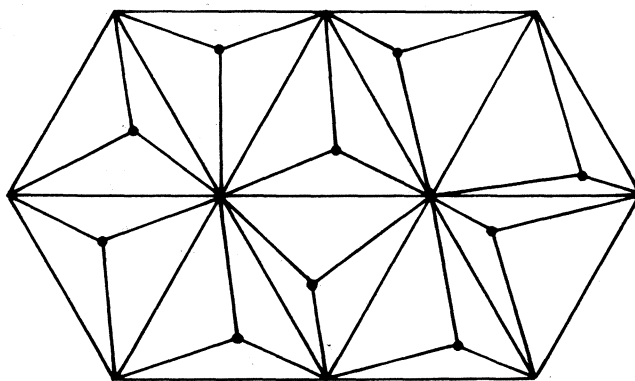


FIGURA 16.

De estas fórmulas, los valores medios de N^* y N son evidentes y el de $E(A)$ también, por ser la tercera parte del área del triángulo equilátero de partida. $E(N^+)$ es fácil de calcular y $E(L)$ es dos veces el valor medio de las distancias de un punto elegido al azar en un triángulo equilátero a uno de los vértices, más la longitud del lado de dicho triángulo, lo cual se calcula fácilmente en coordenadas polares.

(b) Consideremos el mosaico de cuadrados de lado a (Fig. 17). Eligiendo en cada cuadrado un punto al azar (siempre con densidad uniforme) y

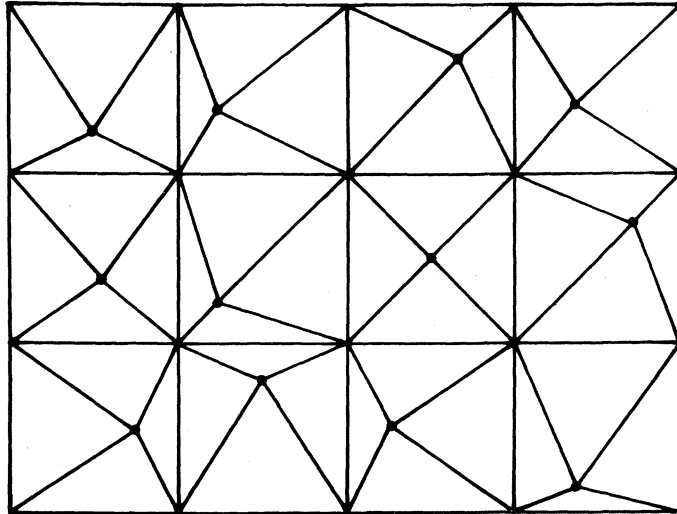


FIGURA 17.

uniéndolo con los vértices, resulta un nuevo mosaico semi-aleatorio de triángulos. Para este mosaico se tiene

$$E(A) = a^2/4, \quad E(L) = (2/3)(3/2 + \sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}))a$$

$$E(N) = E(N^*) = 3, \quad E(N^+) = 6. \quad (\text{II.9})$$

También en este caso $E(A)$ y $E(N) = E(N^*)$ son inmediatos. $E(N^+)$ es la media aritmética de 4 y 8 y $E(L)$, como en el caso anterior, se calcula a partir de la distancia media de un punto elegido al azar en un cuadrado a uno de los vértices, lo cual es fácil en coordenadas polares.

Si en este mosaico de la figura 17 se borran los lados de los cuadrados del mosaico de partida, queda un mosaico aleatorio de cuadriláteros, cuyas características son

$$E(A) = a^2/2, \quad E(L) = (4/3)(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}))a$$

$$E(N) = E(N^*) = 4, \quad E(N^+) = 4. \quad (\text{II.10})$$

III. MOSAICOS ALEATORIOS PARTICULARES

3.1. Mosaicos de Poisson

Los mosaicos aleatorios más estudiados y conocidos son los engendrados por procesos de Poisson de rectas en el plano. Los llamaremos mosaicos de Poisson y pasamos a definirlos.

Una recta G del plano puede determinarse por sus coordenadas polares

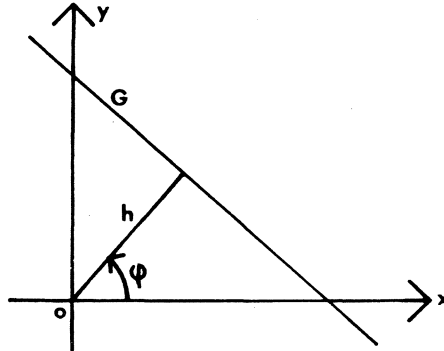


FIGURA 18.

h, φ de las cuales h es la distancia de la recta al origen de coordenadas, supuestas cartesianas ortogonales ($0 \leq h < \infty$) y φ es el ángulo de la normal a G con el eje x ($0 \leq \varphi < 2\pi$) (Fig. 18). En la teoría de las Probabilidades Geométricas se toma como densidad para medir conjuntos de rectas la forma diferencial

$$dG = dh \wedge d\varphi \quad (\text{III.1})$$

que se demuestra es la única, salvo un factor constante, invariante por movimientos, es decir, independiente del sistema de coordenadas cartesianas ortogonales respecto del cual se definen h, φ (ver, por ejemplo [30], [36]).

Se sabe que, con la densidad (III.1), la medida del conjunto de las rectas que tienen punto común con un dominio convexo K es igual al perímetro del mismo (longitud de su contorno). Si K se reduce a un segmento de recta, se puede considerar como un conjunto convexo aplastado y por tanto la medida de las rectas que lo cortan es igual al doble de su longitud. En consecuencia, dados dos conjuntos convexos K, K_0 tales que K está contenido en K_0 , la probabilidad de que una recta que se sabe corta a K_0 , corte también a K , es el cociente L/L_0 de las longitudes de los contornos de K y K_0 ([30], [36]). Si suponemos n rectas dadas al azar, que cortan a K_0 , la probabilidad de que exactamente m de ellas corten también a K , será (ley binomial)

$$P_{m,n} = \binom{n}{m} \left(\frac{L}{L_0}\right)^m \left(1 - \frac{L}{L_0}\right)^{n-m} \quad (\text{III.2})$$

Si K_0 se expande a todo el plano y al mismo tiempo $n \rightarrow \infty$ de manera que sea

$$\frac{n}{L_0} \rightarrow \frac{\lambda}{2} \quad (\lambda \text{ constante}) \quad (\text{III.3})$$

el límite de $p_{m,n}$ resulta ser

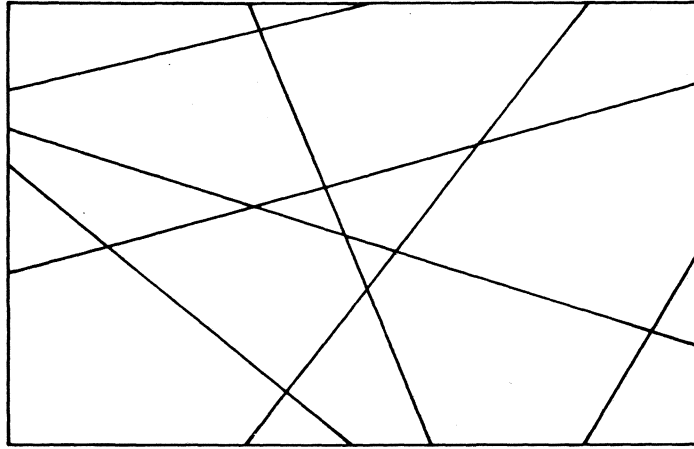


FIGURA 19.

$$p_m = \frac{(\lambda L/2)^m}{m!} \exp(-\lambda L/2). \quad (\text{III.4})$$

Se dice entonces que se ha engendrado en el plano un *proceso de rectas de Poisson* de intensidad λ , o que ellas forman un *mosaico de Poisson* de intensidad λ o, más exactamente, que ellas son una realización de un proceso de Poisson de intensidad λ (Fig. 19). La expresión (III.4) es la probabilidad de que un dominio convexo de perímetro L colocado al azar en el plano, con densidad uniforme, corte a m rectas del mosaico.

De (III.4) se deduce que el valor medio del número de rectas que cortan a K vale

$$E(m) = \sum_0^{\infty} p_m m = \lambda L/2. \quad (\text{III.5})$$

En particular, si K se reduce a un segmento de longitud x , es $L = 2x$ y $E(m) = \lambda x$. Es decir, la intensidad λ de un mosaico de Poisson es igual al valor medio del número de rectas del mismo que cortan a un segmento de longitud unidad.

De aquí se deduce que la longitud media de los segmentos que el mosaico determina sobre una recta cualquiera del plano, es igual a $1/\lambda$.

La igualdad (III.4) nos dice también que la probabilidad de que un segmento de longitud x de una recta dada al azar en el plano, tenga m puntos de intersección con las rectas del mosaico, vale

$$p_m = (\lambda x)^m (m!)^{-1} \exp(-\lambda x).$$

Es decir, las rectas de un mosaico de Poisson de intensidad λ , determinan sobre cualquier recta del plano un proceso de puntos de Poisson de la misma intensidad.

Detalles sobre los mosaicos de Poisson y una mayor precisión en su definición y propiedades, pueden verse en [30] y en los trabajos de Miles [18], [21] y Stoyan-Kendall-Mecke [37].

Queremos hallar ahora las características, definidas en 1.2 de un mosaico de Poisson de intensidad λ .

Desde luego es $E(N^*) = 4$ puesto que, salvo posiciones de medidas nula, por cada nodo pasan únicamente dos rectas, que determinan 4 arcos. También es siempre $N = N^*$, puesto que no existen juntas. Falta hallar $E(A)$, $E(L)$ y $E(N)$, en función del único parámetro λ de que depende el mosaico. Para ello seguiremos el camino directo y simple dado por S. Goudsmidt [10] en el trabajo original sobre mosaicos de Poisson.

Supongamos una esfera de E_3 de radio R y sobre ella n circunferencias máximas en posición general, es decir, tales que no pasen por un mismo punto más de dos de ellas a lo sumo. Se tiene así sobre la esfera una red o mosaico esférico, cuyo número de vértices es $v = n(n-1)$, el número de aristas o arcos es $a = 2v$ y el número de celdas se deduce de la relación de Euler $v - a + c = 2$, de donde $c = 2 + n(n-1)$. Los valores medios del área A_n y del perímetro L_n de las celdas serán, por tanto,

$$E(A_n) = \frac{4\pi R^2}{2 + n(n-1)}, \quad E(L_n) = \frac{4\pi Rn}{2 + n(n-1)} \quad (\text{III.6})$$

donde en el numerador de la segunda igualdad aparece un factor 2 por el hecho de que cada lado viene contado para cada una de las dos celdas que limita. El valor medio del número de vértices de cada celda es

$$E(N_n) = \frac{4n(n-1)}{2 + n(n-1)}. \quad (\text{III.7})$$

Para pasar al plano como esfera de radio infinito tengamos en cuenta que si las circunferencias máximas deben dar lugar a las rectas de un proceso de Poisson de intensidad λ , la longitud media de los lados hemos visto que debe ser $1/\lambda$, o sea, debe ser

$$\frac{2\pi R}{2(n-1)} \rightarrow \frac{1}{\lambda}, \quad \text{de donde} \quad \frac{R}{n} \rightarrow \frac{1}{\pi\lambda}, \quad (\text{III.8})$$

y por tanto, pasando al límite en (III.6), (III.7) resulta que para un mosaico de Poisson de intensidad λ , vale

$$E(A) = \frac{4}{\pi\lambda^2}, \quad E(L) = \frac{4}{\lambda}, \quad E(N) = 4. \quad (\text{III.9})$$

Obsérvese que el valor medio de N es una consecuencia inmediata de (I.10) puesto que $N = N^*$ y $N^* = 4$.

Obsérvese también que en la demostración anterior, los valores medios para los mosaicos de la esfera valen lo mismo para cualquier distribución de

las circunferencias máximas. Por tanto, al pasar al plano, resulta que los valores (III.9) valen lo mismo para cualquier mosaico formado por un proceso de rectas en el cual el valor medio de las longitudes de los lados exista y valga $1/\lambda$, sin que necesariamente sea un proceso de Poisson.

3.2. Una fórmula de P. I. Richards [29]

Sean K_0 un dominio convexo de área F_0 y perímetro L_0 y P_1, P_2 dos puntos contenidos en el mismo a una distancia x entre ellos. Sean dP_1, dP_2 las densidades para puntos del plano, o sea, los elementos de área del plano en P_1, P_2 . Sea $f(x)$ una función integrable. Consideremos n rectas G_i que cortan a K_0 . Siendo dG_i la densidad (III.1) correspondiente a G_i , consideremos la integral

$$I = \frac{1}{F_0^2 L_0^n} \int f(x) dP_1 \wedge dP_2 \wedge dG_1 \wedge \dots \wedge dG_n \quad (\text{III.10})$$

extendida a todos los pares de puntos P_1, P_2 contenidos en K_0 y, para cada par P_1, P_2 , a todas las rectas que cortan a K_0 y dejan a P_1, P_2 en una misma región de las que dividen a K_0 (Fig. 20). Fijando primero P_1, P_2 , puesto que la medida de las rectas que cortan a K_0 es L_0 y la de las rectas que separan a P_1 y P_2 es igual a $2x$, resulta

$$I = F_0^{-2} \int f(x) \left(1 - \frac{2x}{L_0}\right)^n dP_1 \wedge dP_2. \quad (\text{III.11})$$

Usando para dP_2 coordenadas polares de centro P_1 es $dP_2 = x dx \wedge d\varphi$ y por tanto

$$I = F_0^{-2} \int f(x) \left(1 - \frac{2x}{L_0}\right)^n x dx \wedge d\varphi \wedge dP_1. \quad (\text{III.12})$$

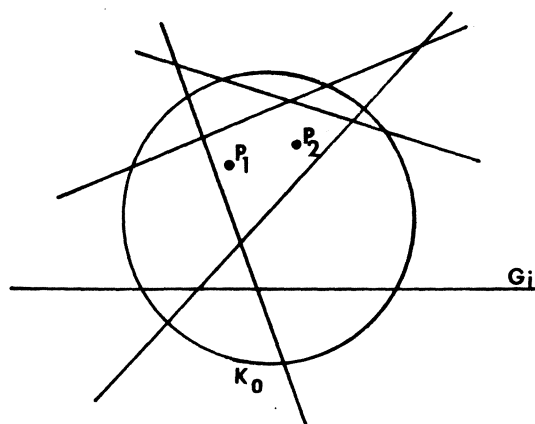


FIGURA 20.

En cambio, fijando primero las n rectas G_i , es

$$I = \frac{1}{F_0^2 L_0^n} \int_{\Sigma} \int f(x) dP_1 \wedge dP_2 \wedge dG_1 \wedge \dots \wedge dG_n = \quad (\text{III.13})$$

$$= F_0^{-2} L_0^{-n} \int E \left[\int f(x) dP_1 \wedge dP_2 \right] C_n dG_1 \wedge \dots \wedge dG_n$$

siendo C_n el número de celdas en las que n rectas dividen a K_0 y donde la suma del miembro intermedio se refiere a todas estas celdas.

Igualando (III.12) y (III.13) y pasando al límite para $n \rightarrow \infty$ y $n/L_0 \rightarrow \lambda/2$, como en (III.3), suponiendo que K_0 se expande a todo el plano de manera que las rectas G_i engendren un mosaico de Poisson de intensidad λ , puesto que $F_0/C_n \rightarrow E(A)$, resulta

$$E \left[\int f(x) dP_1 \wedge dP_2 \right] = 2\pi E(A) \int_0^{\infty} f(x) x \exp(-\lambda x) dx \quad (\text{III.14})$$

donde la integral del primer miembro se entiende extendida al interior de las celdas del mosaico (o de una "celda tipo").

Esta fórmula (III.14) es debida a P. I. Richards [29] y tiene varias aplicaciones. La más inmediata es que para $f(x) = 1$, la integral del segundo miembro vale λ^{-2} y resulta

$$E(A^2) = 2\pi\lambda^{-2} E(A) = 8\lambda^{-4}. \quad (\text{III.15})$$

Más difícil es el cálculo del tercer momento de A , obtenido por Richards [29] y también por D. G. Kendall y R. E. Miles [18], a saber

$$E(A^3) = \frac{256\pi}{7\lambda^6} \quad (\text{III.16})$$

Varias veces se ha planteado el problema de hallar la distribución del área A de las celdas de un mosaico de Poisson y por tanto los valores $E(A^m)$ para todo valor entero de m . La solución exacta no se conoce, pero se han hecho conjeturas y se han obtenido resultados particulares por el método de Monte Carlo, como puede verse en los trabajos de Solomon [36] y George [9] en los cuales se cita más bibliografía.

3.3. Momentos de segundo orden de un mosaico de Poisson

Aunque no se conocen las funciones de distribución de las variables aleatorias A , L , N de un mosaico de Poisson de intensidad λ , R. E. Miles ha obtenido por un procedimiento muy ingenioso, los momentos mixtos de segundo orden de esas variables, junto con otros interesantes resultados [18], [21]. Siguiendo su método y también algunas ideas de [34], vamos a ver cómo se pueden obtener dichos momentos mixtos.

Observemos que para elegir al azar una celda de un mosaico de Poisson se puede proceder de tres maneras diferentes, a saber: 1) Elegir un punto del plano al azar, con densidad uniforme, y considerar la celda que lo contiene; los valores medios correspondientes a este método de elección al azar los representaremos por E_A . 2) Elegir al azar un nodo del mosaico y luego, con probabilidad $1/4$ elegir una de las caras que a él concurren; los valores medios correspondientes los representaremos por E_N . 3) Elegir un punto al azar, siempre con densidad uniforme, sobre una de las rectas del mosaico y luego, con probabilidad $1/2$ una de las dos caras a cuyo borde pertenece; los valores medios correspondientes se representarán por E_L .

Consideremos un vértice P y sean C_1, C_2, C_3, C_4 las celdas que concurren en el mismo y C la unión de ellas. Si A_i, L_i, N_i son las características de C_i y A, N, L las de C , se tienen las relaciones (Fig 21)

$$A = \sum_1^4 A_i, \quad N = \sum_1^4 N_i - 12, \quad L = \sum_1^4 L_i - 2 \sum_1^4 s_i \quad (\text{III.17})$$

siendo s_i las longitudes de los 4 segmentos que concurren en P dentro de C . Vimos en 3.1 que el valor medio de s_i (distancia entre dos puntos consecutivos de los que el mosaico determina sobre una de sus rectas) es igual a $1/\lambda$. Por tanto, tomando valores medios en (III.17) resulta

$$\begin{aligned} E_A(A) &= 4E_N(A), & E_A(N) &= 4E_N(N) - 12, \\ E_A(L) &= 4E_N(L) - 8/\lambda. \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

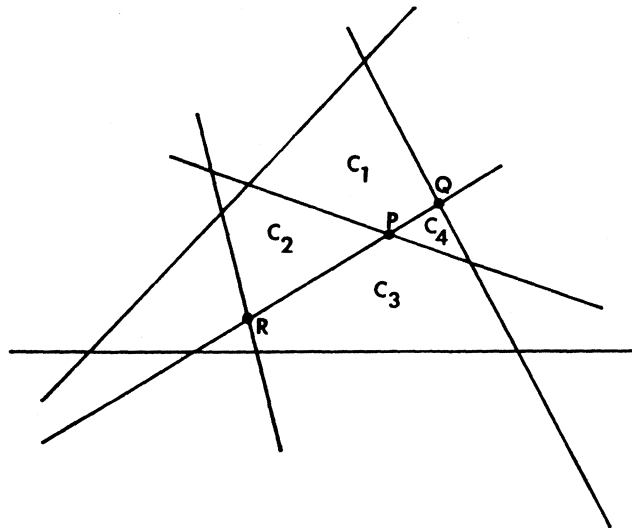


FIGURA 21.

Consideremos ahora el arco RQ (Fig. 21) y sea P un punto elegido al azar en el mismo (densidad uniforme). Sean $C' = C_3 \cup C_4$, $C'' = C_1 \cup C_2$. Será

$$\begin{aligned} A &= A' + A'', & N &= N' + N'' - 4, \\ L &= L' + L'' - 2(s_1 + s_2) \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

y por tanto

$$\begin{aligned} E_A(A) &= 2E_L(A), & E_A(N) &= 2E_L(N) - 4, \\ E_A(L) &= 2E_L(L) - 4/\lambda. \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Consideremos ahora la parte del mosaico cuyas celdas tienen punto común con un conjunto convexo $K_0(t)$ dependiente de un parámetro t tal que para $t \rightarrow \infty$, $K_0(t)$ se expande hasta cubrir todo el plano. Sea $d_t F(A, N, L)$ la densidad de probabilidad de A, N, L , o sea, la probabilidad de que una celda elegida al azar entre las finitas que intersecan a K_0 , tenga N vértices, su área esté comprendida entre A y $A + dA$ y su perímetro entre L y $L + dL$. Hacemos la hipótesis de que para $t \rightarrow \infty$ esta densidad tiene un límite $dF(A, N, L)$. Sean $dF_A(A, N, L)$, $dF_N(A, N, L)$, $dF_L(A, N, L)$ las densidades correspondientes a los casos en que la celda se haya elegido al azar según uno de los métodos mencionados. Puesto que la probabilidad de elegir un punto en una celda es proporcional al área de la misma, debe ser $dF_A(A, N, L) = kAdF(A, N, L)$, de donde $k = 1/E(A)$, puesto que la integral del primer miembro extendida a todos los valores posibles de las variables, debe valer 1. De aquí

$$dF_A(A, N, L) = \frac{A dF(A, N, L)}{E(A)} \quad (\text{III.21})$$

y análogamente

$$\begin{aligned} dF_N(A, N, L) &= \frac{N dF(A, N, L)}{E(N)}, \\ dF_L(A, N, L) &= \frac{L dF(A, N, L)}{E(L)} \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

Multiplicando por A, N, L e integrando a todos los valores de A, N, L resulta

$$\begin{aligned} E(A^2) &= E(A) E_A(A), & E(AN) &= E(A) E_A(N), & E(AL) &= E(A) E_A(L), \\ E(AN) &= E(N) E_N(A), & E(N^2) &= E(N) E_N(N), & E(NL) &= E(N) E_N(L), \\ E(AL) &= E(L) E_L(A), & E(NL) &= E(L) E_L(N), & E(L^2) &= E(L) E_L(L). \end{aligned}$$

Estas relaciones permiten calcular todos los momentos de segundo orden a partir de los valores medios conocidos (III.9), (III.18), (III.20) y (III.15). Los resultados son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 E_A(A) &= 2\pi/\lambda^2, & E_A(N) &= \pi^2/2, & E_A(L) &= \pi^2/\lambda, \\
 E_N(A) &= \pi/2\lambda^2, & E_N(N) &= (\pi^2 + 24)/8, & E_N(L) &= (\pi^2 + 8)/4\lambda, \\
 E_L(A) &= \pi/\lambda^2, & E_L(N) &= (\pi^2 + 8)/4, & E_L(L) &= (\pi^2 + 4)/2\lambda, \\
 E(A^2) &= 8/\lambda^4, & E(AN) &= 2\pi/\lambda^2, & E(AL) &= 4\pi/\lambda^3, \\
 E(N^2) &= (\pi^2 + 24)/2, & E(NL) &= (\pi^2 + 8)/\lambda, & E(L^2) &= 2(\pi^2 + 4)/\lambda^2
 \end{aligned}$$

R. E. Miles ha obtenido otros importantes resultados sobre los mosaicos de Poisson [23]. Por ejemplo, las probabilidades de que una celda del mosaico sea un triángulo ($N=3$) o un cuadrilátero ($N=4$), valen

$$p(N=3) = 2 - \pi^2/6 = 0,355\dots$$

$$p(N=4) = -1/3 - (7/36)\pi^2 + 4 \int_0^{\pi/2} x^2 \cot x \, dx = 0,381\dots$$

3.4 Mosaicos de Voronoi

Los procesos de Poisson de puntos del plano pueden ser intuitivos de la siguiente manera. Sea un dominio plano K (no necesariamente convexo), de área F , contenido en un dominio convexo K_0 de área F_0 . La probabilidad de que un punto elegido al azar en K_0 pertenezca también a K se define por F/F_0 y si se dan n puntos al azar, la probabilidad de que exactamente m de ellos pertenezcan a K será

$$p_{m,n} = \binom{n}{m} (F/F_0)^m (1 - F/F_0)^{n-m}$$

(ley binomial). Si K_0 se expande hasta cubrir todo el plano y al mismo tiempo n crece de manera que se cumpla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n/F_0) = \lambda \quad (\lambda = \text{constante}) \quad (\text{III.23})$$

la probabilidad $p_{m,n}$ tiende a

$$p_m = ((\lambda F)^m / m!) \exp(-\lambda F), \quad (\text{III.24})$$

de donde $E(m) = \lambda F$.

Un conjunto discreto de infinitos puntos del plano, dados al azar de manera que se cumpla (III.24) para cualquier conjunto de área F y, además, los números de puntos pertenecientes a conjuntos disjuntos sean variables aleatorias independientes entre sí, se dice que constituyen un proceso de Poisson de puntos (homogéneo) de intensidad λ . Para detalles se puede ver Miles [19] y la bibliografía allí mencionada.

Dado un proceso de Poisson de puntos, asignemos a cada uno de sus puntos, sea P_1 , todos los puntos del plano que distan del mismo menos que de cualquier otro punto del proceso. Estos puntos forman una celda, correspondiente a P_1 , cuyo contorno está formado por segmentos de rectas, parte de las mediatrices de los segmentos que unen P_1 con otros puntos del proceso y, además, es convexa por ser intersección de semiplanos. Queda así el plano dividido en celdas que forman lo que se llama un *mosaico de Voronoi* de parámetro λ . A veces se llaman también *mosaicos de Dirichlet* [11] (Fig. 22).

En realidad los mosaicos de Voronoi [37] pueden definirse de manera análoga a la anterior siempre que se tenga en el plano un conjunto de puntos, aunque no sean una realización de un proceso de Poisson. Tienen muchas aplicaciones, por ejemplo para delimitar en una ciudad las zonas a las que corresponde un determinado centro público (escuela, hospital, estación de subterráneo, ...), entendiéndose que cada zona está formada por los puntos que tienen dicho centro como el más próximo entre todos los demás.

Cada nodo de un mosaico de Voronoi es un punto en el que concurren 3 mediatrices de segmentos que unen puntos del proceso de Poisson asociado. Por tanto, excluyendo posibles conjuntos de medida nula, con la notación de 1.2, es $E(N^+) = 3$. Por otra parte, los ángulos de los triángulos $P_1P_2P_3$ son igualmente probables y por tanto su valor medio es $\pi/3$. Por

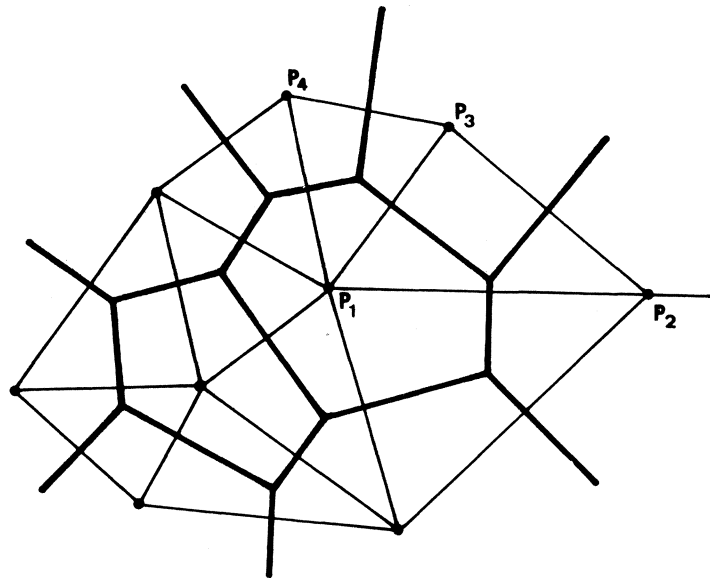


FIGURA 22.

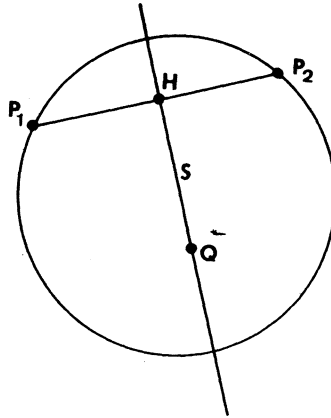


FIGURA 23.

consiguiente, a cada punto del proceso de Poisson corresponden 6 vértices del mosaico de Voronoi, o sea, es $E(N) = 6$. Como no hay juntas, es $N^* = N$. Además, puesto que por unidad de área, según (III.24), el número medio de puntos del proceso de Poisson es igual a λ , y a cada uno de estos puntos corresponde una celda del mosaico de Voronoi, resulta que el valor medio del área de las celdas será $E(A) = 1/\lambda$.

Más complicado es el cálculo de $E(L)$, o sea, del valor medio del perímetro de las celdas. Vamos a hacerlo por un método dado por Miles [19]. Para que un punto Q de la mediatriz de P_1P_2 (Fig. 23) pertenezca al contorno de la celda que contiene a P_1 , no debe haber ningún punto del proceso de Poisson dentro del círculo de centro Q y radio QP_1 , puesto que si hubiera uno, sea P_3 , el punto Q pertenecería a la celda correspondiente a P_3 . Si llamamos $2r$ a la distancia P_1P_2 y s a la distancia HQ (siendo H el punto medio de P_1P_2), la probabilidad de que dicho círculo no contenga ningún punto del proceso de Poisson, según (III.24) para $m = 0$, vale $\exp(-\lambda\pi(r^2 + s^2))$ y por tanto, el valor medio de la longitud de la parte de mediatriz de P_1P_2 que pertenece al contorno de la celda que contiene a P_1 , vale

$$E(L, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\lambda\pi(r^2 + s^2)) ds = \lambda^{-1/2} \exp(-\lambda\pi r^2). \quad (\text{III.25})$$

El valor medio del número de puntos P_2 cuya distancia a P_1 está comprendida entre $2r$ y $2(r + dr)$, por ser $E(m) = \lambda F$ según (III.24), vale $8\lambda\pi r dr$ y, por tanto, el valor medio del perímetro L será

$$E(L) = 8\lambda\pi^{1/2} \int_0^{\infty} r \exp(-\lambda\pi r^2) dr = 4/\sqrt{\lambda}. \quad (\text{III.26})$$

En definitiva, tenemos que las características de un mosaico de Voronoi de parámetros λ , valen

$$\begin{aligned}
 E(A) &= 1/\lambda, & E(L) &= 4/\sqrt{\lambda}, \\
 E(N) E(N^*) &= 6, & E(N^+) &= 3.
 \end{aligned}
 \tag{III.27}$$

Se conoce muy poco de los momentos de orden superior y momentos mixtos de las características A , L , N de los mosaicos de Voronoi. Gilbert calculó numéricamente $E(A^2) = 1.280/\lambda^2$ (ver [23], [37, p. 275]). Otros resultados, por el método de Monte Carlo han sido obtenidos por Hinde y Miles [15] y Green y Sibson [11]. Ver también Miles-Maillardet [24].

Miles [19], ha generalizado los mosaicos de Voronoi al caso de considerar como celdas los puntos del plano que tienen un mismo conjunto de n puntos de un proceso de Poisson como los primeros n más próximos. Las celdas son en este caso también polígonos convexos, cuyas características fundamentales son

$$\begin{aligned}
 E(A) &= 1/(2n-1)\lambda, & E(N) &= 6, \\
 E(L) &= (2n)!/n!(n-1)!(2n-1)2^{2n-3}\lambda^{1-2}.
 \end{aligned}
 \tag{III.28}$$

Para $n=1$ resultan los mosaicos de Voronoi propiamente dichos. Miles ha estudiado también los mosaicos de Voronoi en espacios de más dimensiones y las secciones de los mismos por subvariedades lineales [22].

Como ya dijimos, la misma idea de los mosaicos de Voronoi puede aplicarse a procesos de puntos diferentes de los procesos de Poisson, lo que da lugar a mosaicos diversos. Sobre ellos es interesante el siguiente teorema de Levy-Matschinski [16]: Dado en el plano un proceso de puntos, en condiciones muy generales, existe un solo mosaico tal que: a) cada celda contiene uno y uno sólo de los puntos; b) cada lado es un segmento de puntos equidistantes de dos puntos del proceso; c) cada vértice es el centro de una circunferencia que pasa por tres (a lo sumo) de los puntos del proceso.

Bibliografía referente a aplicaciones de los mosaicos de Voronoi a distintas ramas de la ciencia y de la técnica (agricultura, silvicultura, astrofísica, biología celular, cristalografía, geografía, geología y metalografía) puede verse en la *Stochastic Geometry* de Stoyan-Kendall-Mecke [37, p. 260].

Sería interesante estudiar los mosaicos de Voronoi en el plano hiperbólico. Para los mosaicos de Poisson, ver [34].

Ejercicio: Dado en el plano el conjunto de puntos de coordenadas enteras, se mantiene o se elimina cada uno de ellos con probabilidad $1/2$. Queda así un conjunto aleatorio de puntos. Estudiar el correspondiente mosaico de Voronoi.

3.5. Otros mosaicos

Aparte de los mosaicos de Poisson y los de Voronoi y sus generalizaciones, son muy pocos los mosaicos aleatorios que han sido estudiados. Se plantea como interesante el problema de idear procesos aleatorios, depen-

dientes de un número finito de parámetros, que permitan engendrar mosaicos y calcular luego los valores medios y los momentos, y de ser posible las funciones de distribución, de las características de estos mosaicos, en función de los parámetros que sirven para definirlos. En virtud de las dificultades teóricas, muchas veces se recurre al método de Monte Carlo [11], [15]. Vamos a dar algunos ejemplos de los pocos que se encuentran en la literatura.

Mosaicos de Delaunay. Los segmentos que unen los centros de celdas contiguas de un mosaico de Voronoi, forman un mosaico triangular, llamado mosaico de Delaunay (Fig. 22) [23], [19]. Miles ha estudiado con detalle estos mosaicos en [19], calculando entre otros resultados los valores medios

$$\begin{aligned} E(A) &= 1/2\lambda, & E(L) &= 32/3\pi\sqrt{\lambda}, \\ E(N^*) &= E(N) = 3, & E(N^+) &= 6 \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

donde λ es la intensidad del proceso de puntos de Poisson de partida.

Mosaicos radiales de Gilbert o mosaicos de rotura. Supongamos un proceso de Poisson de puntos de intensidad λ y por cada uno de sus puntos elegida de manera independiente y con distribución uniforme, una recta. Supongamos también que en un mismo instante, sobre estas rectas, a partir del punto original, empieza a crecer un segmento en ambas direcciones y con la misma velocidad constante para todos los puntos. Cada segmento va creciendo hasta que encuentra a otro segmento del proceso, en cuyo instante se detiene. Queda así engendrado en el plano un mosaico de polígonos convexos (Fig. 24), que Cowan [3] llama *mosaico radial de Gilbert* y Stoyan-Kendall-Mecke [37, p. 262], llaman *mosaicos de rotura (crack tessellations)*. Para ellos se demuestra que es

$$E(A) = 1/\lambda, \quad E(N^*) = 6, \quad E(N) = 4, \quad E(N^+) = 3 \quad (\text{III.30})$$

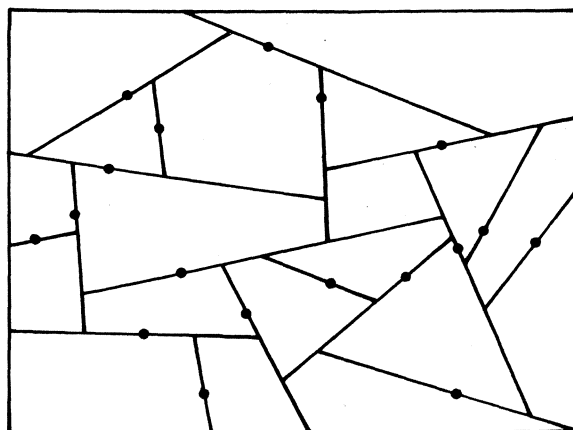


FIGURA 24.

pero otros valores medios no son conocidos. Obsérvese en la figura 24 que los puntos gruesos son los puntos del proceso de Poisson que genera el mosaico, pero no son nodos ni vértices del mismo.

Una manera experimental de obtener mosaicos aleatorios, fue dada por Matschinski [17].

IV. MOSAICOS ALEATORIOS EN GENERAL

4.1. Definiciones y parámetros fundamentales de un mosaico aleatorio

Las definiciones precisas para la teoría de mosaicos aleatorios puede verse en los trabajos de R. V. Ambartzumian [1], R. Cowan [3], [4] y en el libro de Stoyan-Kendall-Mecke [37, Cap. 10], en los cuales se cita otra bibliografía. Nosotros vamos a adaptar la nomenclatura y puntos de vista de Cowan.

Un mosaico aleatorio es una realización de un proceso de mosaicos aleatorios, es decir, una aplicación del espacio muestral de un espacio de probabilidad (Ω, F, P) ($F = \sigma$ -álgebra de los subconjuntos de Ω (sucesos), $P =$ probabilidad de los sucesos) en el conjunto de las particiones localmente finitas del plano en polígonos convexos acotados (mosaicos).

Sea $M(\omega)$, con $\omega \in \Omega$, una realización de un proceso de mosaicos aleatorios del plano. Vamos a recordar lo dicho en 1.2, sobre mosaicos determinados, pero cambiando un poco la notación para adaptarla a la de Cowan, que es más cómoda para los fines que nos proponemos. Sea D un dominio convexo, elegido independientemente del proceso. Considerando el mosaico como un grafo, sea $C_k(D, \omega)$, para $k \geq 3$, el número de nodos contenidos en D a los cuales concurren k arcos. Si alguno de los ángulos formados por dos arcos consecutivos de un nodo es igual a 180° , como dijimos en 1.1 el nodo se llama una *juntura* (por ejemplo, todos los nodos de las figuras 24 y 25 son junturas). Sea $J_k(D, \omega)$ el número de junturas pertenecientes a D a las cuales concurren k arcos (por ejemplo, para B y C de la figura 1 es $k = 3$ y para H es $k = 4$). Sea $S(D, \omega)$ la longitud total de los arcos de $M(\omega)$ contenidos en D . Si, como siempre, E indica valor medio o esperanza matemática y $m(D)$ es el área o medida de D , Cowan establece las siguientes relaciones (para $k \geq 3$)

$$\begin{aligned} ES(D) &= \alpha m(D), & EC_k(D) &= \beta_k m(D), \\ EJ_k(D) &= \gamma_k m(D) \end{aligned} \tag{IV.1}$$

que definen los parámetros $\alpha, \beta_k, \gamma_k$ fundamentales del proceso de mosaicos aleatorios considerado.

Vamos a calcular estos parámetros para algunos mosaicos particulares ya conocidos.

Para los mosaicos de Poisson es $\gamma_k = 0$, puesto que no hay junturas. Como en todos los vértices concurren 4 arcos, es también $\beta_k = 0$, excepto

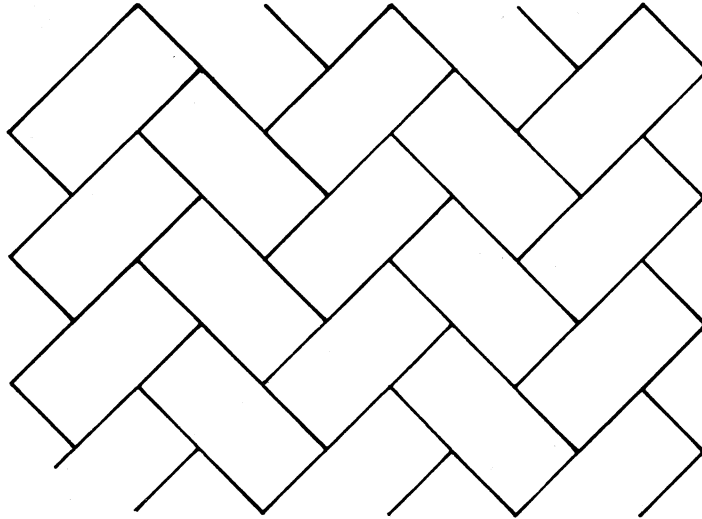


FIGURA 25.

para $k = 4$. Para calcular el valor medio del número de nodos contenidos en un dominio convexo D , observemos que para n rectas G_i se verifica (para detalles ver [30, p. 30])

$$E(C_k(D, n)) = L^{-n} \int (\sum \delta_{ij}) dG_1 \wedge \dots \wedge dG_n = \\ = L^{-2} n(n-1) \int s_i dG_i = n(n-1) L^{-2} \pi F,$$

donde $\delta_{ij} = 1$ si la recta G_i corta a la G_j en un punto de D y $\delta_{ij} = 0$ en el caso contrario, e indicando por s_i la longitud de la cuerda que G_i determina en D . Teniendo en cuenta (III.23), para $n \rightarrow \infty$, resulta

$$E(C_k(D)) = (\lambda^2/4) \pi F$$

y por tanto

$$\beta_4 = (\lambda^2/4) \pi.$$

Para calcular α , observemos que para n rectas G_i es

$$E(S(D, n)) = L^{-n} \int (\sum s_i) dG_1 \wedge \dots \wedge dG_n = (n/L) \pi F$$

siendo s_i la longitud de la cuerda que G_i determina en D . Para $n \rightarrow \infty$, teniendo en cuenta (III.3) resulta $E(S(D)) = (\pi\lambda/2) F$.

Teniendo en cuenta (IV.1) resulta $\alpha = \pi\lambda/2$. Por tanto, en definitiva, para mosaicos de Poisson es

$$\alpha = \pi\lambda/2, \quad \beta_4 = \pi\lambda^2/4, \quad \gamma_k = 0, \quad \beta_k (k \neq 4) = 0. \quad (IV.2)$$

Para los mosaicos de Voronoi observemos que $\gamma_k = 0$ y $\beta_k (k \neq 3) = 0$. Además, a cada vértice le corresponde un triángulo formado por puntos del

proceso de Poisson generador (Fig. 22) y a cada uno de estos puntos le corresponden 6 triángulos, de manera que 3 veces el número de vértices de Voronoi es igual a 6 veces el número de puntos del proceso de Poisson, y como éste contiene λ puntos por unidad de área, será $\beta_3 = 2\lambda$. En cuanto a α , observemos que el mosaico contiene λ puntos del proceso de Poisson generador por unidad de área y a cada punto corresponde una celda cuyo perímetro medio es $E(L) = 4\sqrt{\lambda}$ (según (III.27)), de manera que la longitud total de los lados por unidad de área será $(1/2)\lambda E(L) = 2\sqrt{\lambda}$. Es decir, para los mosaicos de Voronoi se tiene

$$\alpha = 2\sqrt{\lambda}, \quad \beta_3 = 2\lambda, \quad \gamma_k = 0, \quad \beta_k (k \neq 3) = 0. \quad (\text{IV.3})$$

Para los mosaicos de Delaunay, es $\gamma_k = 0$, $\beta_k (k \neq 6) = 0$. Como el número de nodos es igual al número de puntos del proceso de Poisson, o sea, λ por unidad de área, resulta $\beta_6 = \lambda$. El valor de α ha sido calculado por Miles [19] y vale $\alpha = 32\sqrt{\lambda}/3\pi$, de manera que en definitiva, para los mosaicos de Delaunay, se tiene

$$\alpha = 32\sqrt{\lambda}/3\pi, \quad \beta_6 = \lambda, \quad \gamma_k = 0, \quad \beta_k (k \neq 6) = 0. \quad (\text{IV.4})$$

4.2. Características de las celdas de un mosaico aleatorio

Se plantea el problema de hallar los valores medios de ciertas características de las celdas del mosaico a partir de los parámetros fundamentales α , β_k , γ_k . Para simplificar la notación y unificarla con la de Cowan, ahora vamos a representar por a al área media (antes era $E(A)$), por u el perímetro medio (antes era $E(L)$), por w el número medio de lados (antes era $E(N^*)$) y por v el número medio de vértices (antes $E(N)$), de las celdas del mosaico. Obsérvese que cuando existen junturas, w y v pueden ser distintos. Por ejemplo, en la figura 5 las celdas son pentágonos y por tanto $v = 5$, mientras que $w = 6$. Para el mosaico de rectángulos de la figura 25 es $v = 4$, $w = 6$.

Los valores medios anteriores corresponden a lo que Cowan llama una "celda tipo" y deben entenderse, como en 1.2 de la siguiente manera. Se considera un dominio grande D , que por comodidad de cálculo puede ser un círculo B_r de radio r y se calculan los valores medios mencionados para la parte del mosaico interior a B_r (hallando la media aritmética de estos valores). El límite de los mismos para $r \rightarrow \infty$ son las características a , u , w , v buscadas. El resultado es el mismo tanto si se cuentan como si no las celdas que cortan al contorno de B_r (ver 1.2).

El resultado fundamental de Cowan, en los trabajos [3], [4] es que estos valores medios pueden calcularse a partir de los parámetros α , β_k , γ_k por las fórmulas

$$a = \frac{2}{\sum (k-2)\beta_k}, \quad u = \frac{4\alpha}{\sum (k-2)\beta_k}$$

$$w = \frac{2 \sum k \beta_k}{\sum (k-2) \beta_k}, \quad v = \frac{2 \sum (k \beta_k - \gamma_k)}{\sum (k-2) \beta_k} \quad (\text{IV.5})$$

Obsérvese la relación $\alpha = u/2a$.

Ejemplos:

1. Para los mosaicos de Poisson según (IV.2) resulta

$$a = 4/\pi\lambda^2, \quad u = 4/\lambda, \quad w = v = 4 \quad (\text{IV.6})$$

como ya sabíamos (III.9).

2. Para los mosaicos de Voronoi, teniendo en cuenta (IV.3) resulta

$$a = 1/\lambda, \quad u = 4/\sqrt{\lambda}, \quad w = v = 6. \quad (\text{IV.7})$$

de acuerdo con (III.27).

3. Para los mosaicos triangulares de Delaunay, según (IV.4) será

$$a = 1/2 \lambda, \quad u = 32/3\pi \sqrt{\lambda}, \quad w = v = 3. \quad (\text{IV.8})$$

como ya vimos en (III.29).

4.3. Otros ejemplos

Vamos a ver las características de algunos mosaicos determinados.

1. Para el mosaico de paralelogramos de la figura 26, supuestos de área a_1 y perímetro u_1 , es

$$\alpha = u_1/2a_1, \quad \beta_4 = 1/a_1, \quad \gamma_k = 0, \quad \beta_k (k \neq 4) = 0$$

$$a = a_1, \quad u = u_1, \quad w = v = 4. \quad (\text{IV.9})$$

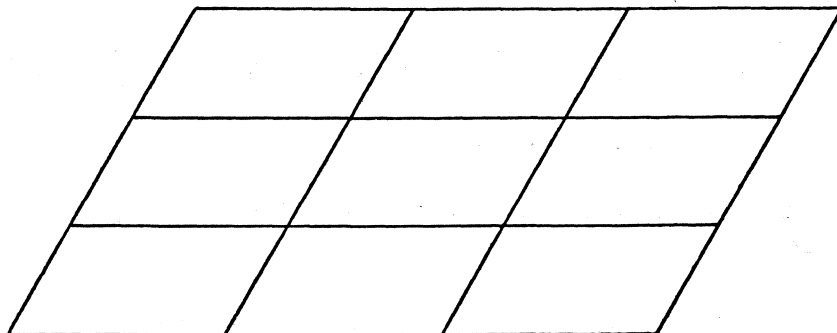


FIGURA 26.

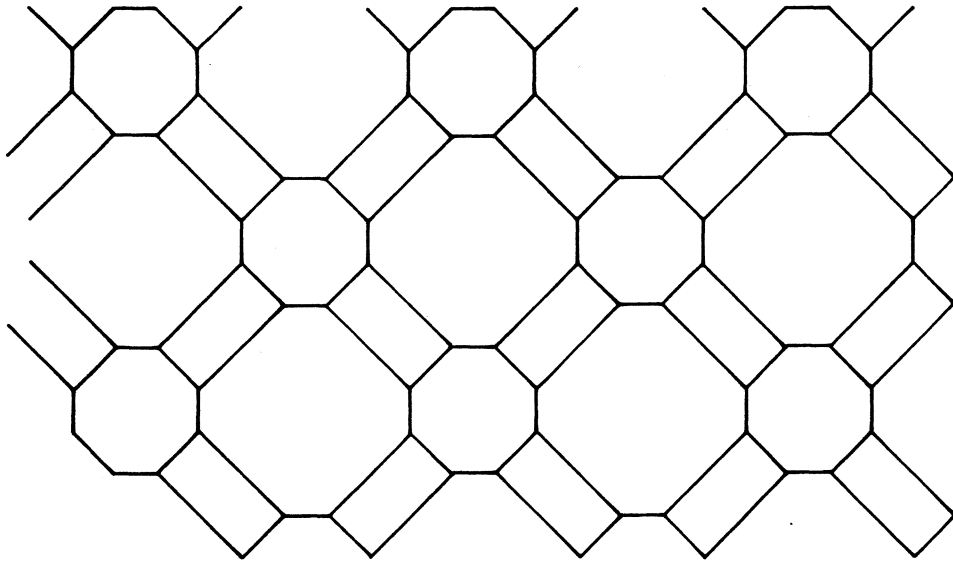


FIGURA 27.

2. Para el mosaico de la figura 27, supuesto que los octógonos tengan áreas a_1, a_2 y perímetros u_1, u_2 y los rectángulos tengan área a_3 y perímetro u_3 es

$$a = (1/4)(a_1 + a_2 + 2a_3), \quad u = (1/4)(u_1 + u_2 + 2u_3), \quad w = v = 6.$$

3. Para el mosaico de rectángulos, supuestos de lados p, q de la figura 25 es

$$\alpha = (p + q)/pq, \quad \beta_3 = 2/pq, \quad \gamma_3 = 2/pq, \quad \gamma_k = \beta_k = 0 \text{ si } k \neq 3$$

$$a = pq, \quad u = 2(p + q), \quad w = 6, \quad v = 4. \quad (\text{IV.10})$$

4. Para el mosaico de pentágonos de la figura 5, suponiendo que tengan área a_1 y perímetro u_1 , es

$$\alpha = u_1/2a_1, \quad \beta_3 = 2/a_1, \quad \gamma_3 = 1/a_1, \quad (\beta_k, \gamma_k = 0 \text{ si } k \neq 3)$$

$$a = a_1, \quad u = u_1, \quad w = 6, \quad v = 5. \quad (\text{IV.11})$$

5. Para el mosaico de rectángulos de la figura 2, supuestos de lados p, q , será

$$\alpha = (p + q)/pq, \quad \beta_3 = 2/pq, \quad \gamma_3 = 2/pq, \quad \beta_k = \gamma_k = 0 \text{ si } k \neq 3$$

$$a = pq, \quad u = 2(p + q), \quad w = 6, \quad v = 4. \quad (\text{IV.12})$$

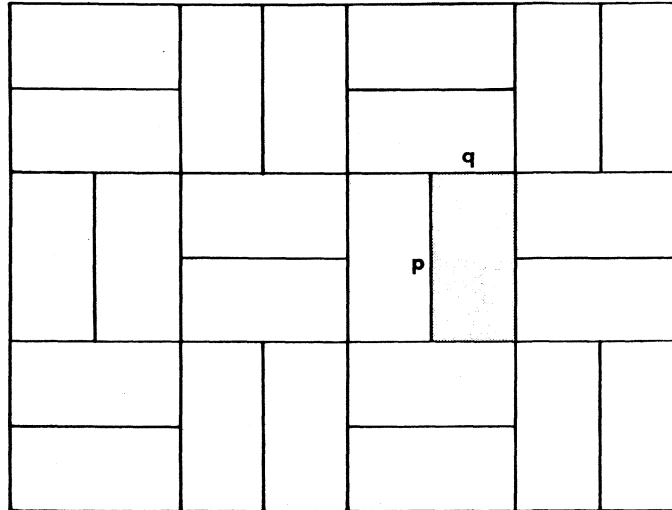


FIGURA 28.

6. Para el mosaico de rectángulos de la figura 28 de lados p, q , es

$$\alpha = (p + q)/pq, \quad \beta_3 = \gamma_3 = 1/pq, \quad \beta_4 = 1/2pq;$$

los demás β_k, γ_k , nulos.

$$a = pq, \quad u = 2(p + q), \quad w = 5, \quad v = 4. \quad (\text{IV.13})$$

4.4. Intersección de una curva rectificable con los arcos de un mosaico: Un valor medio

Sea Q una curva rectificable de longitud L , móvil en el plano con la densidad cinemática dQ de la Geometría Integral [30, Cap. 6]. Si $S(D_1, \omega_1)$ es la longitud total de los arcos de una realización ω_1 de un mosaico aleatorio M_1 que son interiores a un dominio convexo D_1 y $N = N(Q \cap M_1)$ indica el número de puntos de la intersección de Q con los arcos del mosaico interiores a D_1 , se sabe que vale (fórmula de Poincaré, [30])

$$\int N dQ = 4LS(D_1, \omega_1) \quad (\text{IV.14})$$

donde la integral está extendida a todas las posiciones de Q . Por tanto, como la medida total de las posiciones de Q en las que tiene punto común con D_1 vale $2\pi m(D_1)$ (salvo posiciones en el contorno que no influyen en los límites que van a seguir), aplicando (IV.1) resulta

$$EN(Q \cap M_1) = 2L \alpha_1/\pi.$$

Si en (IV.14), en vez de la curva Q consideramos los arcos de la realización ω_2 de otro mosaico aleatorio M_2 que están contenidos en un dominio

convexo D_2 , cuya longitud total representaremos por $S(D_2, \omega_2)$ y representamos por $D_2(\omega_2)$ la parte de M_2 contenida en D_2 , tendremos

$$EN(D_2(\omega_2) \cap M_1) = 2\alpha_1 S(D_2, \omega_2)/\pi. \quad (\text{IV.16})$$

Dividiendo por $m(D_2)$ y haciendo expandir D_2 a todo el plano, en el límite resulta

$$EN(M_1 \cap M_2, \text{unidad de área}) = 2\alpha_1\alpha_2/\pi. \quad (\text{IV.17})$$

Si D es un dominio cualquiera de área $m(D)$ y N_{12} indica el número de puntos de la intersección $M_1 \cap M_2$ contenidos en D , (IV.17) se puede escribir

$$EN_{12}(D) = 2\alpha_1\alpha_2 m(D)/\pi. \quad (\text{IV.18})$$

Para más detalles, ver [32].

4.5. Superposición de mosaicos aleatorios [32], [33]

Supongamos que tenemos dos realizaciones M_1, M_2 de dos mosaicos aleatorios y los superponemos al azar, con densidad uniforme. Si $\alpha_i, \beta_k^i, \gamma_k^i$ ($i = 1, 2$) son los parámetros fundamentales de M_i , definidos por (IV.1), los parámetros del mosaico resultante serán (salvo posiciones de medida nula)

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_k &= \beta_k^1 + \beta_k^2, \quad k \neq 4 \\ \beta_4 &= \beta_4^1 + \beta_4^2 + n_{12} \\ \gamma_k &= \gamma_k^1 + \gamma_k^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

donde n_{12} está definido por la relación $EN_{12}(D) = n_{12}m(D)$, en la cual $N_{12}(D)$ tiene el significado de (IV.18) y por tanto es

$$n_{12} = 2\alpha_1\alpha_2/\pi. \quad (\text{IV.20})$$

De (IV.19), (IV.20) y (IV.5), se deduce que los parámetros fundamentales del mosaico que resulta al superponer M_1 con M_2 o sea, del mosaico $M_1 \cup M_2$, son

$$a_{12} = \frac{2\pi a_1 a_2}{2\pi(a_1 + a_2) + u_1 u_2}, \quad u_{12} = \frac{2\pi(a_1 u_2 + a_2 u_1)}{2\pi(a_1 + a_2) + u_1 u_2}$$

$$\begin{aligned}
 w_{12} &= \frac{2\pi (w_1 a_2 + w_2 a_1) + 4u_1 u_2}{2\pi (a_1 + a_2) + u_1 u_2}, \\
 v_{12} &= \frac{2\pi (a_2 v_1 + a_1 v_2) + 4u_1 u_2}{2\pi (a_1 + a_2) + u_1 u_2} \quad (\text{IV.21})
 \end{aligned}$$

Ejemplos:

1. Si M_1, M_2 son mosaicos de Poisson de intensidades λ_1, λ_2 , calculando (IV.21) con los valores (IV.6), resulta que por superposición de los mismos se obtiene un nuevo mosaico de Poisson de intensidad $\lambda_1 + \lambda_2$, como debe ser, pues la superposición de procesos de Poisson es un nuevo proceso de Poisson de intensidad igual a la suma de las intensidades.

2. Si M_1, M_2 son mosaicos de Voronoi de intensidades λ_1, λ_2 , aplicando (IV.7) resulta

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= \frac{\pi}{\pi (\lambda_1 + \lambda_2) + 8\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}, \\
 u_{12} &= \frac{4\pi (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2})}{\pi (\lambda_1 + \lambda_2) + 8\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}, \\
 w_{12} = v_{12} &= 6 - \frac{16\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\pi (\lambda_1 + \lambda_2) + 8\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}
 \end{aligned}$$

Si las intensidades son iguales $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, resulta

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= \frac{\pi}{(2\pi + 8)\lambda}, \quad u_{12} = \frac{4\pi}{(\pi + 4)\sqrt{\lambda}}, \\
 w_{12} = v_{12} &= 6 - \frac{8}{\pi + 4} = 4,87.
 \end{aligned}$$

3. La figura 29 representa una realización de la superposición de un mosaico de Voronoi de intensidad λ y un mosaico de cuadrados de lado p . Teniendo en cuenta las características de ambos mosaicos y aplicando (IV.21) resulta

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= \frac{\pi p^2}{\pi (1 + \lambda p^2) + 8p\sqrt{\lambda}} \quad u_{12} = \frac{4\pi (1 + p\sqrt{\lambda}) p}{\pi (1 + \lambda p^2) + 8p\sqrt{\lambda}} \\
 w_{12} = v_{12} &= 4 + \frac{2\pi \lambda p^2}{\pi (1 + \lambda p^2) + 8p\sqrt{\lambda}}
 \end{aligned}$$

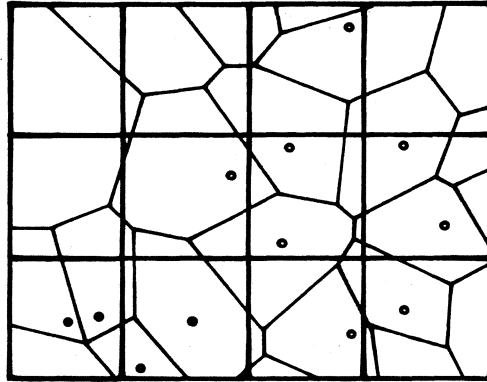


FIGURA 29.

3. Si M_1, M_2 son dos mosaicos determinados, formados por rectángulos como los de la figura 30, de lados p_1, p_1 y p_2, q_2 respectivamente, al superponerlos al azar resulta un mosaico aleatorio cuyas características son

$$a_{12} = \frac{\pi p_1 q_1 p_2 q_2}{\pi (p_1 q_1 + p_2 q_2) + 2 (p_1 + q_1) (p_2 + q_2)}$$

$$u_{12} = \frac{2\pi (p_1 q_1 (p_2 + q_2) + p_2 q_2 (p_1 + q_1))}{\pi (p_1 q_1 + p_2 q_2) + 2 (p_1 + q_1) (p_2 + q_2)}$$

$$w_{12} = v_{12} = 4.$$

Si p_1, q_1, p_2 se mantienen fijos y $q_2 \rightarrow \infty$, se tiene el caso de un mosaico rectangular de lados p_1, q_1 al cual se superpone al azar un haz de rectas paralelas a distancia p_2 . El resultado es un mosaico aleatorio de características

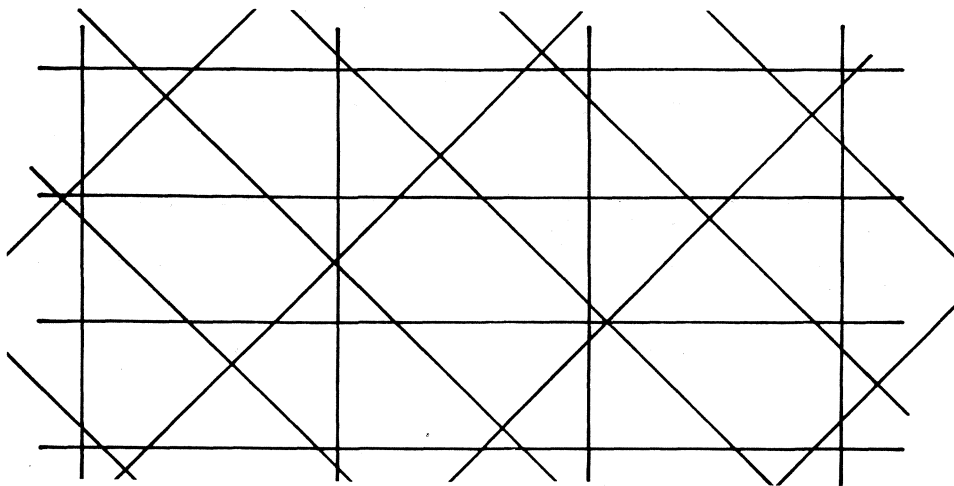


FIGURA 30.

$$a_{12} = \frac{\pi p_1 q_1 p_2}{\pi p_2 + 2(p_1 + q_1)}$$

$$u_{12} = \frac{2\pi(p_1 q_1 + p_2 p_1 + p_2 q_1)}{\pi p_2 + 2(p_1 + q_1)}$$

$$w_{12} = v_{12} = 4.$$

Si también $q_1 \rightarrow \infty$, resulta el caso de dos haces de paralelas a distancias p_1, p_2 que se superponen al azar. El resultado es el mosaico aleatorio de características

$$a_{12} = (\pi/2) p_1 p_2, \quad u_{12} = \pi(p_1 + p_2), \quad w_{12} = v_{12} = 4.$$

4. Consideremos el mosaico determinado M formado por paralelogramos de lados p, q que forman entre sí un ángulo φ (Fig. 26). Evidentemente es

$$a = pq \operatorname{sen} \varphi, \quad u = 2(p + q), \quad w = v = 4.$$

Al superponer sobre el mismo un mosaico de Poisson de intensidad λ , resulta un mosaico aleatorio de características

$$a_{12} = \frac{4pq \operatorname{sen} \varphi}{\pi pq \operatorname{sen} \varphi \lambda^2 + 4\lambda(p + q) + 4}$$

$$u_{12} = \frac{4\pi pq \lambda \operatorname{sen} \varphi + 8(p + q)}{\pi pq \lambda^2 \operatorname{sen} \varphi + 4\lambda(p + q) + 4}$$

$$w_{12} = v_{12} = 4.$$

Si $q \rightarrow \infty$, el mosaico de paralelogramos se transforma en un haz de paralelas a distancia $d = p \operatorname{sen} \varphi$ y los valores anteriores se reducen a

$$a_{12} = \frac{4d}{\pi \lambda^2 d + 4\lambda}, \quad u_{12} = \frac{4\pi \lambda d + 8}{\pi \lambda^2 d + 4\lambda}, \quad w = v = 4.$$

Estas son, por tanto, las características del mosaico que resulta al superponer un haz de rectas paralelas a distancia d con un mosaico de Poisson de intensidad λ (Fig. 31) (ver [31]).

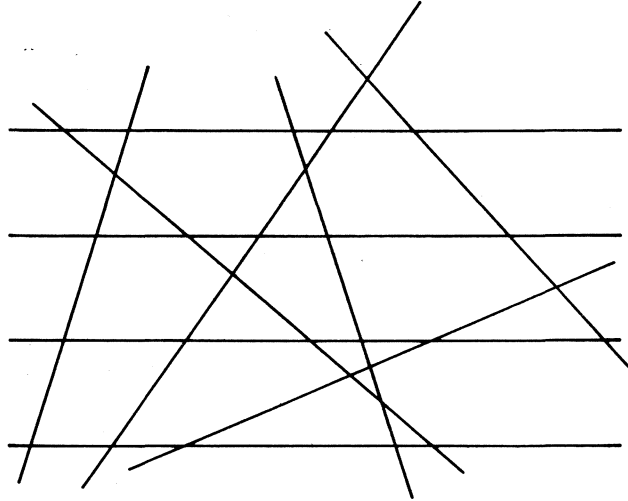


FIGURA 31.

4.6. Superposición de más de dos mosaicos aleatorios

Las características de los mosaicos que resultan al superponer m mosaicos aleatorios, se calculan fácilmente por inducción, a partir de las fórmulas (IV,21), [33]. El resultado es

$$\begin{aligned}
 a_{1\dots m} &= H^{-1} 2\pi a_1 a_2 \dots a_m \\
 u_{1\dots m} &= H^{-1} 2\pi \{u_1 | a_2 \dots a_m\} \\
 w_{1\dots m} &= H^{-1} (2\pi \{w_1 | a_2 \dots a_m\} + 4 \{u_1 u_2 | a_3 \dots a_m\}) \\
 v_{1\dots m} &= H^{-1} (2\pi \{v_1 | a_2 \dots a_m\} + 4 \{u_1 u_2 | a_3 \dots a_m\}), \quad (\text{IV.22})
 \end{aligned}$$

donde

$$H = 2\pi \{a_1 \dots a_{m-1}\} + \{u_1 u_2 | a_3 \dots a_m\}$$

y los paréntesis $\{\dots\}$ indican "funciones simétricas" así

$$\{a_1 \dots a_{m-1}\} = a_1 a_2 \dots a_{m-1} + a_1 \dots a_{m-2} a_m + \dots + a_2 a_3 \dots a_m$$

$$\{u_1 | a_2 \dots a_m\} = u_1 a_2 \dots a_m + a_1 u_2 \dots a_m + \dots + a_1 \dots a_{m-1} u_m$$

$$\{u_1 u_2 | a_3 \dots a_m\} = u_1 u_2 a_3 \dots a_m + u_1 a_2 u_3 \dots a_m + \dots + a_1 \dots u_{m-1} u_m$$

Si todos los mosaicos tienen las mismas características a, u, w, v resulta

$$a_{1\dots m} = 4 (mH)^{-1} \pi a^2$$

$$u_{1\dots m} = 4H^{-1} \pi a u$$

$$w_{1\dots m} = 4H^{-1} (\pi a w + (m - 1) u^2)$$

$$v_{1\dots m} = 4H^{-1} (\pi a v + (m - 1) u^2)$$

con

$$H = 4\pi a + (m - 1) u^2.$$

Consecuencias:

1. Si $v = 4$, es $v_{1\dots m} = 4$ para todo m y lo mismo ocurre para w .
2. Para $m \rightarrow \infty$ se cumple siempre que $w_{1\dots m} = v_{1\dots m} \rightarrow 4$.
3. Si se superponen al azar m mosaicos determinados, formados por rectángulos congruentes de lados p_i, q_i ($i = 1, 2, \dots, m$) como los de la figura 30 para $m = 2$, se tiene $a_i = p_i q_i$, $u_i = 2(p_i + q_i)$, $w_i = v_i = 4$ y el mosaico aleatorio obtenido tiene las características

$$a_{1\dots m} = \pi H^{-1} p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_m q_m$$

$$u_{1\dots m} = 2\pi H^{-1} \{(p_1 + q_1) | p_2 q_2 \dots p_m q_m\}$$

$$w_{1\dots m} = v_{1\dots m} = 4$$

siendo

$$H = \pi \{p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_{m-1} q_{m-1}\} + 2 \{(p_1 + q_1) (p_2 + q_2) | p_3 q_3 \dots p_m q_m\}$$

Si todos los rectángulos son congruentes, $p_i = p$, $q_i = q$ resulta

$$a_{1\dots m} = \frac{\pi p^2 q^2}{\pi m p q + m(m-1)(p+q)^2}$$

$$u_{1\dots m} = \frac{2\pi (p+q) p q}{\pi p q + (m-1)(p+q)^2}$$

$$w_{1\dots m} = v_{1\dots m} = 4$$

y para mosaicos cuadrados de lado p

$$a_{1\dots m} = \pi p^2 / (\pi m + 4m(m-1)),$$

$$u_{1\dots m} = 4\pi p / (\pi + 4(m-1)), \quad w_{1\dots m} = v_{1\dots m} = 4.$$

Si $q_1, q_2, \dots, q_m \rightarrow \infty$ resultan haces de rectas paralelas a distancias p_1, p_2, \dots, p_m y por superposición al azar de los mismos resulta (ver figura 32 para $m = 4$),

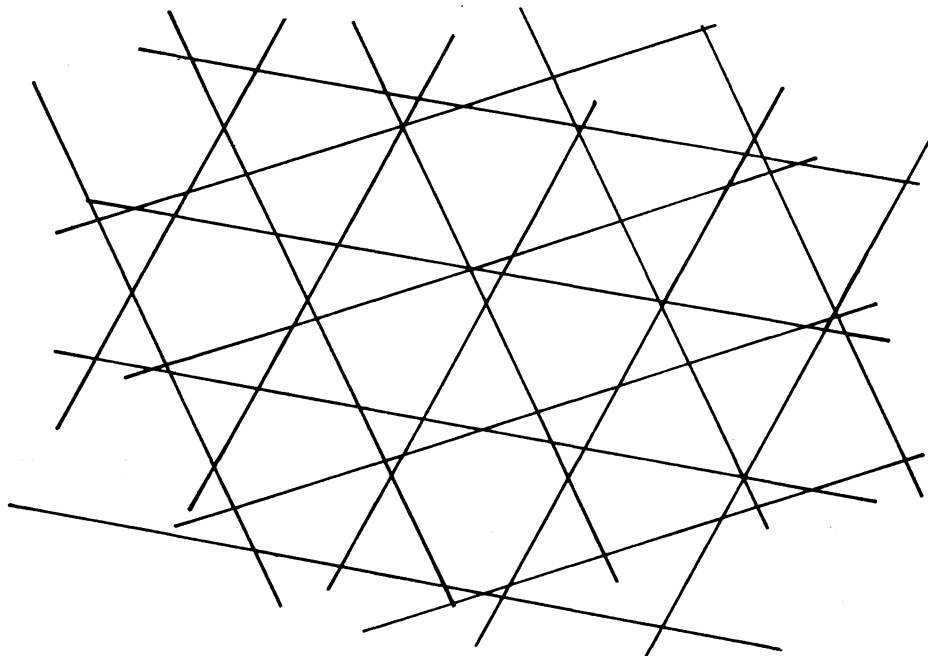


FIGURA 32.

$$a_{1\dots m} = \pi H^{-1} p_1 p_2 \dots p_m$$

$$u_{1\dots m} = 2\pi H^{-1} \{p_2 \dots p_m\}$$

$$w_{1\dots m} = v_{1\dots m} = 4$$

siendo

$$H = 2 \{p_1 p_2 \dots p_{m-2}\}.$$

La teoría de mosaicos aleatorios se ha generalizado al espacio euclidiano de n dimensiones, pero son pocos los resultados obtenidos. Para bibliografía y perspectivas futuras se puede ver Miles [23] y Stoyan-Kendall-Mecke [37]. La generalización al espacio esférico fue iniciada por Miles [20] y al espacio hiperbólico por Santaló-Yáñez [34], pero ninguna de las dos generalizaciones ha sido proseguida, a pesar de constituir, posiblemente, un vasto e interesante campo de investigación.

Finalmente, se podrían estudiar dos cuestiones: a) Como problema de "reconstrucción de imágenes" cabría pensar en la manera de averiguar si un mosaico dado es la superposición al azar de otros mosaicos, determinados o aleatorios; b) Considerar las propiedades específicas de los mosaicos que resultan por superposición al azar de mosaicos representativos de los 17 grupos cristalográficos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AMBARTZUMIAN, R. V.: *Convex polygons and radom tessellations, Stochastic Geometry* (Ed. E. F. Harding - D. G. Kendall). J. Wiley & Sons. Londres, 1974.
- [2] BONNESEN, T. AND FENCHEL, W.: *Theory of Convex Bodies*, traducción inglesa. BCS Associates, Moscow, Idaho, U.S.A., 1987.
- [3] COWAN, R.: *The use of ergodic theorem in radom Geometry*. Suppl. Adv. Appl. Probab. 10, 1978, 47-57.
- [4] COWAN, R.: *Properties of ergodic random mosaic processes*. Math. Nachr. 97, 1980, 89-102.
- [5] COXETER, H. S. M.: *Introduction to Geometry*. J. Wiley & Sons. New York, 1961 (443 páginas).
- [6] ESCHER, M. C.: *Le monde de Escher*. Edition française, Chene, París, 1972.
- [7] FEDOROV, E. S.: *Zapiski Mineralogicheskogo Imperatorskogo. S. Petersburgskogo Obshchestva* (2), 28, 1891, 345-390.
- [8] FEJES TOTH, L.: *Regular Figures*. Macmillan, New York, 1964.
- [9] GEORGE, E. I.: *Sampling random polygons*. J. Appl. Probab. 24, 1987, 557-573.
- [10] GOUDSMIDT, S.: *Random distribution of lines in a plane*. Rev. Mod. Phys. 17, 1945, 321-322.
- [11] GREEN, P. J. AND SIBSON, R.: *Computing Dirichlet tessellations in the plane*. Comput. J. 21, 1978, 168-173.
- [12] GRUNBAUM, B. AND SHEPHARD, G. C.: *Isohedral tiling of the plane by polygons*. Comm. Math. Helvetici, 53, 1978, 522-571.
- [13] GRUNBAUM, B. AND SHEPHARD, G. C.: *Tillings and Patterns*. W. H. Freeman. New York, 1986 (700 páginas).
- [14] GUGGENHEIMER, H. W.: *Plane Geometry and its Groups*. Holden-Day Inc. San Francisco, 1967 (288 páginas).
- [15] HINDE, A. L. AND MILES, R. E.: *Monte Carlo estimates of the distributions of the random polygons of the Voronoi tessellation with respect to a Poisson process*. J. Statist. Comput. Simul. 10, 1980, 205-223.
- [16] LEVY, P. AND MATSCHINSKI, M.: *Un théorème sur les reseaux poligonaux planes*. Bull. Sc. Math. 2^a Serie, 91, 1967.
- [17] MATSCHINSKI, M.: *Considerations statistiques sur les polygones et les polyhedres*. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 3, 1985, 179-201.
- [18] MILES, R. E.: *Radom polygons determined by random lines in a plane*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 52, 1964, 901-907, 1157-1160.
- [19] MILES, R. E.: *On the homogeneous planar Poisson point process*. Math. Biosciences, 6, 1970, 85-127.
- [20] MILES, R. E.: *Random points, sets and tessellations on the surface o a sphere*. Sankhya, A 33, 1971, 145-174.
- [21] MILES, R. E.: *The various aggregates of random polygons determined by random lines in a plane*. Adv. Math. 10, 1973, 256-290.
- [22] MILES, R. E.: *Sectional Voronoi tessellations*. Rev. Unión Mat. Argentina, 29, 1984, 310-327.
- [23] MILLES, R. E.: *Random Tessellations*. Encyclopedia of Statistical Sciences. John Wiley & Sons, 1986, 567-572.
- [24] MILES, R. E. AND MAILLARDET, R. J.: *The basic structures of Voronoi and generalised Voronoi polygons*. Essays in Statistical Sciences (ed. Gani-Hannan). Appl. Prob. Trust. J. Appl. Probab. 19A, 1982, 97-111.

-
- [25] MONTESINOS AMILIBIA, JOSE MARIA: *Caleidoscopios en la Alhambra*. Memorias de la Real Acad. de C. Exactas, Fis. Nat. de Madrid, tomo XXIII, Madrid, 1987.
- [26] MONTESINOS AMILIBIA, JOSE MARIA: *Classical Tessellations and Three-Manifolds*. Springer-Verlag, Berlín, 1987.
- [27] PEREZ GOMEZ, R.: *The four regular mosaics missing in the Alhambra*. Comput. Math. Appl. 14, 1987, 133-137.
- [28] POLYA, G.: *Ueber die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene*. Kristallographie und Mineralogie, 60, 278-282.
- [29] RICHARDS, P. I.: *Averages for Polygons formed by random lines*. Proc. Nat. Acad. Sc. USA, 52, 1964, 1160-1164.
- [30] SANTALO, L. A.: *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison-Wesley, Reading, 1976.
- [31] SANTALO, L. A.: *Random Lines and tessellations in a plane*. Stochastica IV, 1980, 3-13.
- [32] SANTALO, L. A.: *Mixed random mosaics*. Math. Nachr. 117, 1984, 129-133.
- [33] SANTALO, L. A.: *On the superposition of random mosaics*. Acta Stereológica 6, 1987, 141-145.
- [34] SANTALO, L. A. AND YAÑEZ, I.: *Averages for polygons formed by random lines in Euclidean and Hyperbolic planes*. J. Appl. Probab. 9, 1972, 140-157.
- [35] SCHATTSCHNEIDER, D.: *The plane symmetry groups: their recognition and notation*. Amer. Math. Monthly, 85, 1978, 439-450.
- [36] SOLOMON, H.: *Geometric probability*. CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math. 28, SIAM Philadelphia, 1978.
- [37] STOYAN, D., KENDALL, W. S. AND MECKE, J.: *Stochastic Geometry and its Applications*. J. Wiley & Sons, 1987.
- [38] TANNER, J. C.: *The proportion of quadrilaterals formed by random lines in a plane*. J. Appl. Prob. 20, 1983, 400-404, 778-787.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires, Argentina.