Juego de intersección de intervalos finitos

Por P. Zoroa, N. Zoroa y J. M. Ruiz

Recibido: 20 mayo 1988

Presentado por el académico numerario D. Sixto Ríos García

Abstract

The object of this paper is to find a general solution to the game called the Number Hides Game (NHG). This game, solved in a particular case, appears in the work of Ruckle (1983) where the solution to the general problem is left unsolved.

El juego que vamos a estudiar y que llamaremos *Juego de intersección de intervalos finitos*, (JIIF), se ha resuelto en el caso particular que queda contenido en nuestro Teorema 2. Esta solución parcial puede verse en Ruckle (1983) donde deja abierto el problema de encontrar una solución general. En dicha obra este juego recibe el nombre de *Number Hides Game*, (NHG).

El objeto de este trabajo es encontrar dicha solución general.

En lo que sigue se supondrán dados tres números enteros positivos p, q y N tales que

$$1 \leqslant p \leqslant N, \qquad 1 \leqslant q \leqslant N$$

Denotaremos con

$$L = \{1, 2, 3, ..., N\}$$

el conjunto de los N primeros números naturales.

En este conjunto L llamaremos intervalo (finito) $[a, b]$, con $a \in L$, $b \in L$, $a \leqslant b$, al conjunto

$$[a, b] = \{r\colon\ r \in L,\ a \leqslant r \leqslant b\}$$

Denotaremos el cardinal de un conjunto C cualquiera por $|C|$.

En esta situación llamaremos *juego de intersección de intervalos finitos* (JIIF) al juego rectangular

$$\text{JIIF} = (X, Y, M)$$

donde los conjuntos de las estrategias de los jugadores I y II vienen definidos por

$$X = \{A:\ A = [a,b] \subset L,\ |A| \leqslant p\}$$
$$Y = \{B:\ B = [a,b] \subset L,\ |B| \geqslant q\}$$

y la función de pago, que representa la ganancia del jugador I y la pérdida del jugador II, viene definida por

$$M(A,B) = |A \cap B|, \qquad A \in X, \quad B \in Y$$

Un primer resultado que simplifica la resolucion del juego lo constituye el siguiente Teorema.

Teorema 1: En el juego JIIF los conjuntos

$$P = \{A:\ A \in X,\ |A| = p\}$$
$$Q = \{B:\ B \in Y,\ |B| = q\}$$

son clases completas de estrategias para los jugadores I y II respectivamente.

Demostración: Se omite por su sencillez. ∎

Introduciremos en lo que sigue las siguientes notaciones

$$m = |P| = N - p + 1$$
$$n = |Q| = N - q + 1$$
$$A_i = [i,\ i + p - 1], \qquad i = 1, 2, ..., m$$
$$B_j = [j,\ j + q - 1], \qquad j = 1, 2, ..., n$$

Una solución parcial del juego JIIF la da el siguiente Teorema.

Teorema 2: Si p y q son divisores de N las estrategias mixtas ξ, η para los jugadores I y II definidas por

$$\xi(A_i) = \frac{p}{N} \qquad \text{si } i \equiv 1\ (p)$$

$$\xi(A) = 0 \qquad \text{para el resto de } A \in X$$

$$\eta(B_j) = \frac{q}{N} \qquad \text{si } j \equiv 1\ (q)$$

$$\eta(B) = 0 \qquad \text{para el resto de } B \in Y$$

son óptimas y el valor del juego es pq/N.

Demostración: Puede verse en Ruckle (1983) o en Zoroa (1986). ∎

Para cada número real x denotaremos con $[x]$ su parte entera.

Para abordar la resolución general de este juego distinguiremos tres casos.

Primer caso:

$$q \geqslant \left[\frac{N+p+1}{2}\right] \tag{1}$$

Segundo caso:

$$p \leqslant q < \left[\frac{N+p+1}{2}\right] \tag{2}$$

Tercer caso:

$$q \leqslant p \tag{3}$$

Evidentemente estos tres casos cubren todas las posibilidades en vista de que siempre vale

$$p \leqslant \left[\frac{N+p+1}{2}\right]$$

Teorema 3: Supongamos que en el juego JIIF se verifica (1). Si llamamos

$$s = \left[\frac{N-p+1}{2}\right]$$

la estrategia pura

$$A_{s+1} = [s+1,\ s+p]$$

es óptima para el jugador I y cualquier estrategia $B_j \in Y$ es óptima para el jugador II. El valor del juego es $v = p$.

Demostración: Es evidente que para todo $A_i \in X$, $B_j \in Y$

$$M(A_i, B_j) = |A_i \cap B_j| \leqslant p \tag{4}$$

Por otra parte no es difícil comprobar que para cualquier $B_j \in Y$

$$M(A_{s+1}, B_j) = |A_{s+1} \cap B_j| = |A_{s+1}| = p \tag{5}$$

ya que $A_{s+1} \cap B_j = A_{s+1}$, ó lo que es lo mismo,

$$j \leqslant s+1, \qquad j+q-1 \geqslant s+p=\left[\frac{N+p+1}{2}\right] \tag{6}$$

La primera de las (6) resulta de

$$j \leqslant N-q+1 \leqslant N-p+1-s < 2s+2-s=s+2 \Rightarrow j \leqslant s+1$$

La segunda desigualdad de (6) es inmediata ya que $j-1 \geqslant 0$ y $q \geqslant s+p$. Las (4) y (5) prueban el Teorema.

■

Antes de pasar al segundo caso considerado anteriormente introduciremos estas nuevas notaciones

$$\begin{aligned}
h &= q-p \\
k &= [N/q] \\
r &= N-kq \\
w &= [\,(N-h)/q] \\
v_1 &= \frac{(k+1)\,p-[r-h]^+}{k\,(k+1)} \\
v_2 &= \frac{(2w-k+1)\,p-[r-h]^+}{w\,(w+1)}
\end{aligned} \tag{7}$$

donde para cada real x se define

$$[x]^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Con estas notaciones se puede definir la estrategia mixta ξ para el jugador I mediante

$$\begin{aligned}
&\xi\,(A_i)=a_i+b_i && i=1,2,\ldots,m \\
&\xi\,(A)=0 && \text{para el resto de } A \in X
\end{aligned} \tag{8}$$

donde

$$a_i = \begin{cases} \dfrac{w-(i-h-1)/q}{w\,(w+1)} & \text{si } i \equiv 1+h\ (q) \\ 0 & \text{si } i \not\equiv 1+h\ (q) \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} \dfrac{w-(n-i)/q}{w\,(w+1)} & \text{si } i \equiv n\ (q) \\ 0 & \text{si } i \not\equiv n\ (q) \end{cases} \tag{9}$$

y del mismo modo podemos definir la estrategia mixta η para el jugador II por

$$\begin{aligned} &\eta\,(B_j) = c_j + d_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n \\ &\eta\,(B) = 0 \qquad\quad \text{para el resto de } B \in Y \end{aligned} \tag{10}$$

donde

$$c_j = \begin{cases} \dfrac{k - (j-1)/q}{k\,(k+1)} & \text{si } j \equiv 1\ (q) \\ 0 & \text{si } j \not\equiv 1\ (q) \end{cases}$$

$$d_j = \begin{cases} \dfrac{k - (n-j)/q}{k\,(k+1)} & \text{si } j \equiv n\ (q) \\ 0 & \text{si } j \not\equiv n\ (q) \end{cases} \tag{11}$$

Teorema 4: En el juego JIIF, con las condiciones (2), las estrategias ξ y η definidas por (8), (9), (10) y (11) son óptimas para los jugadores I y II respectivamente, y el valor del juego es $v_1 = v_2$.

Demostración: La demostración requiere comprobar las tres relaciones siguientes

$$M\,(A, \eta) \leqslant v_1 \qquad \text{para todo } A \in X \tag{12}$$

$$M\,(\xi, B) \geqslant v_2 \qquad \text{para todo } B \in Y \tag{13}$$

$$v_1 = v_2. \tag{14}$$

Por el Teorema 1 para comprobar (12) y (13) es suficiente comprobar

$$M\,(A_i, \eta) \leqslant v_1 \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{15}$$

$$M\,(\xi, B_j) \geqslant v_2 \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{16}$$

Para la (15), fijado i, llamaremos

$$s = [(i-1)/q], \qquad t = i - 1 - sq$$

Con esto se puede escribir

$$M\,(A_i, \eta) = \sum_j \eta\,(B_j)\ |A_i \cap B_j| = S_1 + S_2$$

donde

$$S_1 = \sum_{j \equiv 1} c_j\ |A_j \cap B_j|, \qquad S_2 = \sum_{j \equiv 1 + r} d_j\ |A_i \cap B_j|$$

Teniendo en cuenta que si $A_i \cap B_j = \phi$ el término correspondiente al subíndice j en las sumas anteriores es nulo, la primera suma S_1 contiene a lo más dos términos no nulos que sólo pueden proceder de entre los valores de j

$$1 + sq, \qquad 1 + (s+1)q$$

Una sencilla discusión conduce a los siguientes casos con sus resultados correspondientes

$$1) \quad t \leqslant h, \quad S_1 = \frac{(k-s)\,\mathrm{p}}{k\,(k+1)}$$

$$2) \quad t > h, \quad S_1 = \frac{(k-s)p + h - t}{k\,(k+1)}$$

Del mismo modo, la segunda suma S_2 sólo puede contener dos términos no nulos a lo más, cuyos subíndices j deben ser algunos de los valores

$$1 + (s-1)q + r, \qquad 1 + sq + r, \qquad 1 + (s+1)q + r$$

lo que permite distinguir cuatro casos que dan los resultados siguientes

$$\text{A)} \quad r \leqslant t, \quad t \leqslant r + h, \quad S_2 = \frac{(s+1)p}{k\,(k+1)}$$

$$\text{B)} \quad r \leqslant t, \quad t > r + h, \quad S_2 = \frac{(s+1)p + t - r - h}{k\,(k+1)}$$

$$\text{C)} \quad t < r < t + p, \qquad S_2 = \frac{(s+1)p + t - r}{k\,(k+1)}$$

$$\text{D)} \quad t < r, \quad r \geqslant t + p \quad S_2 = \frac{sp}{k\,(k+1)}$$

Para calcular el valor de $S_1 + S_2$ se combinan los casos anteriores dando lugar a ocho posibilidades obteniéndose los resultados que muestra el siguiente cuadro

	caso 1), $t \leqslant h$	caso 2), $t > h$
caso A) $r \leqslant t, \quad t \leqslant r + h$	$\dfrac{(k+1)p}{k\,(k+1)}$	$\dfrac{(k+1)p + h - t}{k\,(k+1)}$
caso B) $r \leqslant t, \quad t > r + h$	imposible	$\dfrac{(k+1)p - r}{k\,(k+1)}$

	caso 1), $t \leqslant h$	caso 2), $t > h$
caso C) $t < r,\ r < t+p$	$\dfrac{(k+1)p+t-r}{k(k+1)}$	$\dfrac{(k+1)p+h-r}{k(k+1)}$
caso D) $r \geqslant t+p$	$\dfrac{(k+1)p-p}{k(k+1)}$	imposible

En cada una de estas posibilidades se comprueba inmediatamente que $S_1 + S_2 \leqslant v_1$ lo que prueba la (15).

Para probar la (16), fijado j, llamaremos

$$s = [(j-1)/q], \qquad t = j - 1 - sq,$$
$$(0 \leqslant t \leqslant q-1, \quad j = 1 + sq + t)$$

con lo que podemos escribir

$$M(\xi, B_j) = S_1 + S_2$$

donde ahora llamaremos

$$S_1 = \sum_{i \equiv 1+h} a_i \,|A_i \cap B_j|, \qquad S_2 = \sum_{i \equiv 1+r} b_i \,|A_i \cap B_j|$$

En la primera suma sólo pueden interesar para i alguno de los valores

$$1 + (s-1)q + h, \qquad 1 + sq + h, \qquad 1 + (s+1)q + h$$

y en la segunda

$$1 + (s-1)q + r, \qquad 1 + sq + r, \qquad 1 + (s+1)q + r$$

lo cual da lugar a los siguientes casos para S_1 y S_2

1) $h < t$, $\qquad S_1 = \dfrac{(w-s)p - t + h}{w(w+1)}$

2) $h \geqslant t$, $\qquad S_1 = \dfrac{(w-s)p}{w(w+1)}$

A) $r < t$, $\quad r + p < 1 + t$, $\qquad S_2 = \dfrac{(w-k+2+s)p}{w(w+1)}$

B) $r < t$, $\quad r + p \geqslant 1 + t$, $\qquad S_2 = \dfrac{(w-k+1+s)p + t - r}{w(w+1)}$

C) $r \geqslant t, \quad r + p \leqslant q + t, \quad S_2 = \dfrac{(w - k + 1 + s)\,p}{w\,(w + 1)}$

D) $r \geqslant t, \quad r + p > q + t, \quad S_2 = \dfrac{(w - k + s)\,p + q + t - r}{w\,(w + 1)}$.

Con lo cual se llega al siguiente cuadro de valores de $S_1 + S_2$

	caso 1), $h < t$	caso 2), $h \geqslant t$
caso A) $r < t, \; r + p < 1 + t$	$\dfrac{(2w - k + 1)p + p + h - t}{w\,(w + 1)}$	$\dfrac{(2w - k + 1)\,p + p}{w\,(w + 1)}$
caso B) $r < t, \; r + p \geqslant q + t$	$\dfrac{(2w - k + 1)p + h - r}{w\,(w + 1)}$	$\dfrac{(2w - k + 1)p + t - r}{w\,(w + 1)}$
caso C) $r \geqslant t, \; r + p \leqslant q + t$	$\dfrac{(2w - k + 1)\,p + h - t}{w\,(w + 1)}$	$\dfrac{(2w - k + 1)\,p}{w\,(w + 1)}$
caso D) $r \geqslant t, \; r + p > q + t$	$\dfrac{(2w - k + 1)p + 2h - r}{w\,(w + 1)}$	$\dfrac{(2w - k + 1)p + h + t - r}{w\,(w + 1)}$

Con estos valores se comprueba que la suma $S_1 + S_2 \geqslant v_2$ con lo cual queda probada la (16). Sólo falta probar la (14).

Según las notaciones utilizadas se tiene

$$w = [(N - h)/q] = [(N - q + p)/q] = [(kq + r - q + p)/q] =$$
$$= [k - 1 + (r + p)/q] = k - 1 + [(r + p)/q]$$

por lo que solo caben dos posibilidades

$$w = k - 1 \quad \text{si } r + p < q$$
$$w = k \quad \text{si } r + p \geqslant q \text{ ya que } r < q, \; p \leqslant q \Rightarrow r + p < 2q$$

o lo que es lo mismo

$$w = k - 1 \quad \text{si } r < h$$
$$w = k \quad \text{si } r \geqslant h$$

Con la primera posibilidad resulta

$$v_2 = \frac{(2\,(k - 1) - k + 1)\,p - [r - h]^+}{(k - 1)\,k} = \frac{(k - 1)\,p}{(k - 1)\,k} = \frac{p}{k} =$$

$$= \frac{(k + 1)\,p - [r - h]^+}{k\,(k + 1)} = v_1$$

y con la segunda

$$v_2 = \frac{(2k - k + 1)p - [r - h]^+}{k(k+1)} = \frac{(k+1)p - [r - h]^+}{k(k+1)} = v_1$$

con lo que (14) queda probada y la demostración del Teorema completa. ∎

Para resolver el caso que nos queda en que se cumple (3) vamos a cambiar algunas de las notaciones dadas en (7) por las siguientes.

Llamaremos

$$\begin{aligned} h &= p - q \\ k &= [N/p] \\ r &= N - kp \end{aligned} \tag{17}$$

Los valores de m y n se expresan ahora en la forma siguiente

$$\begin{aligned} m &= N - p + 1 = (k-1)p + r + 1 \\ n &= N - q + 1 = (k-1)p + h + r + 1 \end{aligned}$$

Estas igualdades muestran que las relaciones

$$i \equiv m\ (p), \qquad j \equiv n\ (p)$$

son equivalentes a las

$$i \equiv 1 + r\ (p), \qquad j \equiv 1 + h + r\ (p)$$

Definiremos ahora las estrategias mixtas ξ y η para los jugadores I y II, respectivamente, por

$$\begin{aligned} &\xi(A_i) = a_i + b_i, && \text{para } i = 1, 2, \dots, m \\ &\xi(A) = 0 && \text{para el resto de } A \in X \end{aligned} \tag{18}$$

donde

$$a_i = \begin{cases} \dfrac{k - (i-1)/p}{k(k+1)} & \text{si } i \equiv 1\ (p) \\ 0 & \text{si } i \not\equiv 1\ (p) \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} \dfrac{k - (m-i)/p}{k(k+1)} & \text{si } i \equiv m\ (p) \\ 0 & \text{si } i \not\equiv m\ (p) \end{cases} \tag{19}$$

y

$$\begin{aligned} &\eta\,(B_j) = c_j + d_j, && \text{para } j = 1, 2, \ldots, n \\ &\eta\,(B) = 0 && \text{para el resto de } B \in Y \end{aligned} \tag{20}$$

con

$$c_j = \begin{cases} \dfrac{k-(j-1)/p}{k\,(k+1)} & \text{si } j \equiv 1\ (p) \\ 0 & \text{si } j \not\equiv 1\ (p) \end{cases}$$

$$d_j = \begin{cases} \dfrac{k-(n-j)/p}{k\,(k+1)} & \text{si } j \equiv n\ (p) \\ 0 & \text{si } j \not\equiv n\ (p) \end{cases} \tag{21}$$

Con esta notación podemos enunciar el siguiente Teorema.

Teorema 5: En el juego JIIF, en el caso de cumplirse la condición (3), las estrategias ξ y η definidas por (18), (19), (20) y (21) son óptimas para los jugadores I y II respectivamente y el valor del juego es

$$v = \frac{kq + [q - r]^+}{k\,(k+1)}$$

Demostración: Seguiremos el método empleado en la demostración del Teorema 4.

Bastará demostrar que

$$M\,(A_i, \eta) \leqslant v \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m \tag{22}$$

$$M\,(\xi, B_j) \geqslant v \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n \tag{23}$$

Para comprobar (22) llamaremos

$$s = [(i-1)/p], \qquad t = i - 1 - sp$$

Se tiene

$$M\,(A_i, \eta) = S_1 + S_2$$

donde

$$S_1 = \sum_{j \equiv 1} c_j\,|A_i \cap B_j|, \qquad S_2 = \sum_{j \equiv r+h+1} d_j\,|A_i \cap B_j|$$

Ahora se pueden distinguir los casos siguientes

1) $q \leqslant t$, $\qquad S_1 = \dfrac{(k-s-1)\,q}{k\,(k+1)}$

2) $q > t$, $\qquad S_1 = \dfrac{(k-s-1)\,q + q - t}{k\,(k+1)}$

A) $r+h<t$, $\quad S_2 = \dfrac{(s+1)\,q+t-r-h}{k\,(k+1)}$

B) $r+h \geqslant t$, $\quad r \leqslant t$, $\quad S_2 = \dfrac{(s+1)\,q}{k\,(k+1)}$

C) $r+h<t+p$, $\quad t<r$, $\quad S_2 = \dfrac{(s+1)\,q+t-r}{k\,(k+1)}$

D) $r+h \geqslant t+p$, $\quad S_2 = \dfrac{sq}{k\,(k+1)}$

Combinando estos resultados se puede formar el siguiente cuadro de valores de $S_1 + S_2$

	caso 1), $q \leqslant t$	caso 2), $q > t$
caso A) $r+h<t$	$\dfrac{kq+t-r-h}{k\,(k+1)}$	$\dfrac{kq+q-r-h}{k\,(k+1)}$
caso B) $r+h \geqslant t$, $r \leqslant t$	$\dfrac{kq}{k\,(k+1)}$	$\dfrac{kq+q-t}{k\,(k+1)}$
caso C) $r+h<t+p$, $t<r$	$\dfrac{kq+t-r}{k\,(k+1)}$	$\dfrac{kq+q-r}{k\,(k+1)}$
caso D) $r+h \geqslant t+p$	$\dfrac{kq-q}{k\,(k+1)}$	$\dfrac{kq-t}{k\,(k+1)}$

Con estos valores se puede comprobar la validez de (22) en todos los casos.

De modo análogo para probar (23) escribiremos

$$M\,(\xi, B_j) = S_1 + S_2$$

donde

$$S_1 = \sum_{i=1} a_i \,|A_i \cap B_j|, \qquad S_2 = \sum_{i=1+r} b_i \,|A_i \cap B_j|$$

Se pueden distinguir las siguientes posibilidades para calcular los valores de S_1 y S_2.

1) $t \leqslant h$, $\quad S_1 = \dfrac{(k-s)\,p}{k\,(k+1)}$

2) $t > h$, $S_1 = \dfrac{(k-s)p + h - t}{k(k+1)}$

A) $r \leqslant t$, $t \leqslant h + r$ $S_2 = \dfrac{(s+1)q}{k(k+1)}$

B) $t > r + h$ $S_2 = \dfrac{(s+1)q + t - r - h}{k(k+1)}$

C) $r > t$, $r < t + q$ $S_2 = \dfrac{(s+1)q + t - r}{k(k+1)}$

D) $r \geqslant t + q$ $S_2 = \dfrac{sq}{k(k+1)}$

con lo cual se pueden obtener los valores de la suma $S_1 + S_2$ que se presentan en el siguiente cuadro

	caso 1), $t \leqslant h$	caso 2), $t > h$
caso A) $r \leqslant t$, $t \leqslant h + r$	$\dfrac{(k+1)q}{k(k+1)}$	$\dfrac{kq + p - t}{k(k+1)}$
caso B) $t > r + h$	imposible	$\dfrac{kq + q - r}{k(k+1)}$
caso C) $r > t$, $r < t + q$	$\dfrac{(k+1)q + t - r}{k(k+1)}$	$\dfrac{kq + p - r}{k(k+1)}$
caso D) $r \geqslant t + q$	$\dfrac{kq}{k(k+1)}$	imposible

Con estos valores se comprueba finalmente la validez de (23) lo que completa la demostración del Teorema.

■

Conviene advertir, finalmente, que los resultados encontrados resuelven el juego en todos los casos por lo que constituyen una solucion general. Sin embargo el juego en cada caso puede poseer otras soluciones diferentes de las encontradas. En este sentido debe notarse al comparar los resultados de los Teoremas 2, 4, 5 que si N es múltiplo de p y de q las estrategias ξ y η del Teorema 2 coinciden respectivamente con las estrategias ξ del Teorema 5 y η del Teorema 4.

BIBLIOGRAFIA

[1] RUCKLE, W. (1983): *Geometric games and their applications.* Pitman Advanced Publishing Program.

[2] ZOROA ALONSO, N. (1986): *Contribuciones a la teoría de los juegos geométricos.* Tesis. Universidad de Murcia.

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Universidad de Murcia