

# *Problemas actuales de la Geodesia física*

POR FERNANDO SANZO

Conferencia pronunciada el 4 de febrero de 1987(\*)

*Instituto de Topografía, Fotogrametría y Geodesia de Milán*

La Geodesia es una Ciencia muy antigua que, en el sentido moderno (Newton) aparece junto con la Mecánica, la Astronomía y la Teoría del Potencial. De los problemas de la Geodesia se han ocupado científicos tan ilustres como Huygens, Clairant, Legendre, Poisson, Laplace, Gauss, etc.

El objeto de la Geodesia es la determinación de la forma de la Tierra, de su campo de gravedad y de sus variaciones temporales. Sobre la base de la metodología empleada, la clasificación actual de la Geodesia es la siguiente:

1. **Geodesia física.** Que incluye y utiliza la teoría del potencial, teoría de la aproximación, problemas de contorno, procesos estocásticos y Mecánica Celeste.

2. **Geodesia geométrica.** Con el cálculo diferencial exterior, teoría de errores y Estadística, teoría de la representación, Relatividad general.

3. **Geodesia dinámica.** También llamada Geodinámica, en la que interviene la teoría de la elasticidad, mecánica de medios continuos, dinámica de rotación y análisis de deformaciones.

4. **Geodesia computacional.** Incluyendo la Informática para la gestión de bancos de datos, resolución de grandes sistemas de ecuaciones lineales, filtros numéricos y transformada de Fourier.

Las ideas básicas que cabe destacar en Geodesia son, por una parte la *cuantificación de métodos* (por ejemplo en la estimación simultánea de campo de gravedad y de la posición de puntos) y por otra el *paso del continuo al discreto* y viceversa (por ejemplo la discretización de los problemas de contorno y el estudio de redes continuas).

Los factores que han intervenido en el desarrollo moderno de la Geodesia en los últimos treinta años, podemos clasificarlos en los tres bloques siguientes:

a) *Desarrollo de los instrumentos de medida*

Este desarrollo ha sido tal que hoy en día, con respecto a los instrumentos clásicos, disponemos de precisiones relativas de  $10^{-6}$  en medidas distancio-

---

(\*) Resumen de la conferencia redactado por los profesores Miguel Sevilla y Jesús Otero, de la Universidad Complutense.

métricas, de  $10^{-4}$  en medidas del tiempo y de  $10^{-9}$  en medidas gravimétricas. En relación con los instrumentos de medida espaciales el avance ha sido considerable ( $10^{-8}$ ) gracias a las modernas técnicas de seguimiento de satélites artificiales desde tierra, seguimiento satélite a satélite y radiointerferometría de muy larga base.

b) *Desarrollo de la teoría*

Los estudios teóricos en Geodesia se han visto fortalecidos gracias a las aplicaciones del Análisis funcional, de la teoría de procesos estocásticos, de la Mecánica de medios continuos y de la Estadística en general.

c) *Desarrollo de los medios de cálculo y tratamiento de datos*

El gran desarrollo experimentado en potentes ordenadores permite tratar la gran cantidad de datos generados con los últimos avances de las técnicas de medida, particularmente con el advenimiento de los satélites artificiales. Entre estos datos geodésicos destacamos los siguientes:

- Datos de altimetría por radar.
- Datos proporcionados por técnicas Doppler o GPS para posicionamiento de puntos.
- Gran aumento de observaciones gravimétricas.
- Gran cantidad de observaciones de seguimiento de satélites con implicaciones tanto en Geodesia como en Geodinámica (posicionamiento preciso de puntos y sus variaciones en el tiempo) y en la Geofísica (datos sobre el potencial anómalo).
- Posibilidad de adquisición de un gran número de datos sobre el campo anómalo en áreas todavía sin medidas o inaccesibles, por medio de gradiometría.
- Finalmente, disponibilidad de grandes bancos de datos con modelos digitales de altitudes y de batimetría.

El crecimiento de la densidad de datos disponibles producido por la moderna tecnología, hace que el paso de una descripción discreta a una continua en la forma de *problemas de contorno* haya crecido en número e importancia.

Los principales problemas de contorno considerados en Geodesia física, pueden ser divididos en *estáticos* y *cinemáticos*, dependiendo de si en su formulación se consideran variaciones temporales (de la posición de las estaciones de observación y del campo de gravedad) o no. A su vez cada uno de estos problemas puede considerarse en forma *estocástica* o *determinista*; en el primero de los casos se considera la presencia inevitable de los errores de observación. En la figura 1 se muestra esta clasificación general de los problemas de contorno de la geodesia, indicando además para cada una de las diferentes formulaciones –no lineal, lineal, aproximación esférica y contorno esférico– el estado actual de su investigación.

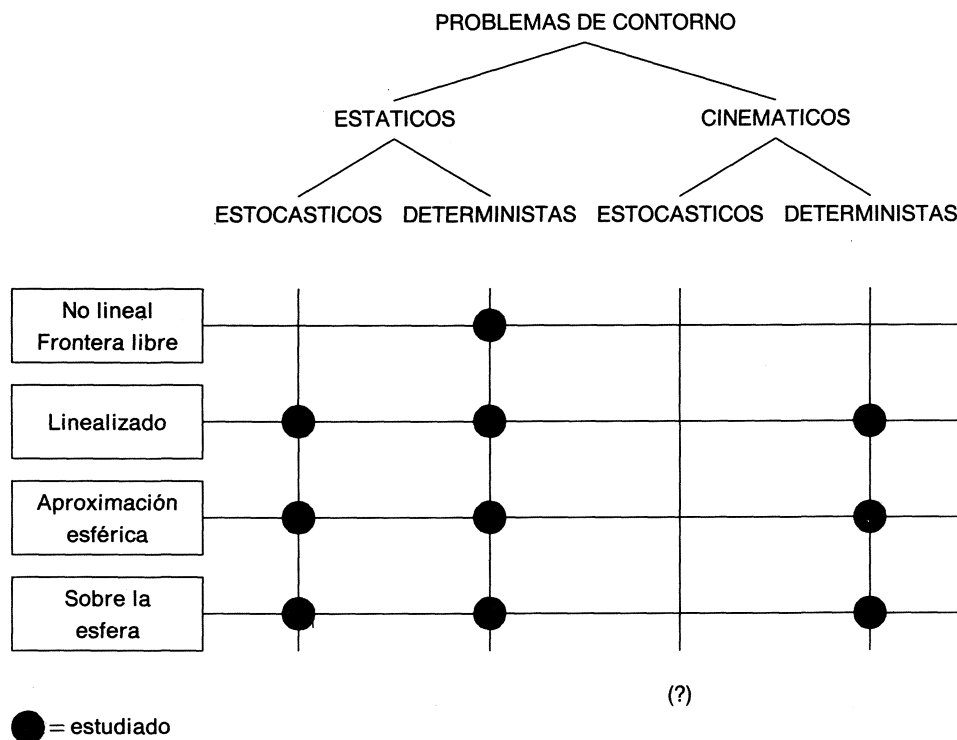


Figura 1.

Por lo que respecta a los problemas de contorno estáticos, distingamos los llamados *gravimétrico* (vectorial, escalar y de frontera fija) y los *problemas de altimetría-gravimetría* (I y II). A continuación indicamos en forma esquemática cuáles son los datos y las incógnitas de estos problemas.

PROBLEMA	DATOS	INCOGNITAS
Gravimétrico vectorial	$g _S, w _S$	$S, w$ en $\Omega$
Gravimétrico escalar	$\zeta, \lambda, g, w$	$S(h(\zeta, \lambda)), w$ en $\Omega$
Gravimétrico contorno fijo	$S, g _S$	$w$ en $\Omega$
Altimetría - gravimetría I	sobre el mar: $S, w$ sobre tierra: $g, w$	$s$ sobre tierra $w$ en $\Omega$
Altimetría - gravimetría II	sobre el mar: $S, g$ sobre tierra: $g, w$	$w$ en $\Omega$ $S$ sobre tierra

donde hemos empleado la notación:

- $S$  : superficie de la Tierra,
- $\Omega$  : exterior a la Tierra,
- $w$  : potencial gravífico terrestre,
- $g$  : vector gravedad,
- $g = |g|$  : módulo del vector gravedad,
- $\zeta, \lambda$  : coordenadas elipsoidicas latitud y longitud,
- $h$  : altitud elipsoidica.

Los *problemas abiertos* en el estudio de los problemas geodésicos de contorno son, a grandes rasgos, los siguientes:

- a) Análisis de existencia, unicidad y estabilidad de solución bajo condiciones realistas: espacios de funciones con derivadas segundas no acotadas,  $S$  con puntos de cono y aristas.
- b) Evaluación de la contribución debida a la no linealidad.
- c) Estudio de técnicas eficientes de resolución numérica directa de problemas de contorno más complejos.

El estudio de problemas estocásticos en geodesia es muy reciente y se basa en describir el error de observación por medio de un campo de medida de Wiener sobre el borde, pudiendo así definir problemas de contorno lineales, también en los casos *sobredeterminados*. El problema abierto, como vemos en la figura 1, es generalizar este procedimiento al caso no lineal.

Termina esta conferencia hablando brevemente de la formulación matemática de problemas que combinan diversos tipos de datos sobre el contorno y sobre el dominio de armonicidad (problemas mal propuestos). La manera de estudiar correctamente este tipo de problemas es mediante *colocación* que es una técnica de aproximación derivada de los procesos estocásticos, y en donde la solución es del tipo Tychonof con una elección de la norma de estabilización mediante la función de covarianza.

La fórmula clásica para la estimación del potencial anómalo en un punto  $P$  mediante colocación es

$$\hat{T}(P) = \sum_{i,k}^N L_i C(P, P_i) \{L_i L_k C(P_i, P_k) + \sigma_v^2 \delta_{iw}\} (L_L T(P_k))$$

$$C(P, Q) = E \{T(P) T(Q)\}$$

donde  $C$  es la función covarianza. La media se define de tal modo que se refiere a un proceso isótropo, mediante una distribución uniforme sobre el *grupo de las rotaciones*.

Los problemas abierto en colocación son:

- a) Dar una definición coherente de la estimación empírica de la función de covarianza.
- b) Estudiar el problema de la convergencia cuando  $N \rightarrow \infty$ ,  $\sigma_v \rightarrow 0$ .
- c) Incluir en la teoría las correcciones de tipo topográfico y geológico considerando también el DEM y como procesos estocásticos.
- d) Estabilizar numéricamente la solución cuando la distancia entre los puntos disminuye.
- e) Encontrar fórmulas aproximadas para el caso en que  $N$  sea muy elevado.
- f) Integrar el tratamiento del campo con la teoría de las correcciones de las órbitas de los satélites en modo computacional.