Sobre la categoría semi-convexa de hiperplanos y productos de espacios vectoriales topológicos de Baire

Por JOSE ORIHUELA*

Recibido: 12 mayo 1985

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia Ureña

Abstract

We prove in this paper that any dense hiperplane in a topological vector Baire space or any topological product of a family of topological vector Baire spaces cannot be covered by a sequence of closed semiconvex subsets without an interior point. In such a way, extensions of the known results for convex subsets of M. Valdivia, (7), are obtained. We reach this results dealing with the class of Baire semiconvex spaces which is related to the Baire–convex spaces of M. Valdivia. Proving their stability properties we obtain our conclusions. We give examples, even in the category of normed spaces, for distinguishing between Baire, Baire semi–convex and Baire–convex spaces. Our results are related to the negative anwers to the Wilansky–Klee conjeture, asking if every dense hiperplane of a Banach space must be of second category, and to the general problem of stability of Baire spaces by topological products, (1), (2), (5), (8), (9).

I. INTRODUCCION Y NOTACIONES

Los espacios vectoriales que utilizaremos están definidos sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de los números reales o complejos. La palabra "espacio" significará "espacio vectorial topológico de Hausdorff". Para un espacio vectorial E y un vector $x \in E$, una semirrecta que parte de x diremos que es un rayo que parte de x, esto es, un conjunto de la forma $\{x + \alpha y : \alpha \geqslant 0\}$ para algún $y \in E$. Si $x, y \in E$ denotemos con $[x, y]$ al segmento de extremos x, y y con (x, y) a $[x, y] \sim \{x, y\}$. Sea $p \in (0, 1]$, un subconjunto A de E es p-convexo si para $x, y \in A$, $\tau, \mu \geqslant 0$ con $\tau^p + \mu^p = 1$, es $\tau x + \mu y \in A$. Si A es además equilibrado diremos que A es absolutamente p-convexo. Si $0 < q < p < 1$, todo subconjunto p-convexo es q-convexo. Si A es convexo y contiene al origen, entonces A es p-convexo. Denotaremos por $C_p(A)$ la envoltura p-convexa de un conjunto A en E. Para $p = 1$ pondremos simplemente $C(A)$. Un subconjunto A de un espacio vectorial E se dice semi-convexo si es p-convexo para algún $p \in (0, 1]$. Para un estudio detallado de los conjuntos semiconvexos nos referenciamos a (3). Referencias estandar para notaciones y conceptos son (3) y (4).

(*)El presente trabajo constituye parte de la tesis doctoral del autor, realizada bajo la dirección del profesor M. Valdivia.

Un espacio E es Baire–convexo si no se puede recubrir por una unión numerable de subconjuntos convexos cerrados sin punto interior, (7). Esta noción fue introducida por M. Valdivia, quien prueba la estabilidad de los espacios Baire-convexos frente a subespacios de codimensión numerable y productos arbitrarios. Es nuestro propósito en este artículo extender estos resultados cuando trabajamos con conjuntos p-convexos y en espacios no necesariamente localmente convexos; hablaremos de espacios Baire p-convexos. Nuestra extensión será más amplia pues trabajaremos con conjuntos semi-convexos, sin fijar el índice de convexidad de todos ellos, y hablaremos de espacios Baire semi-convexos. Estos resultados nos permiten obtener nuevas propiedades para hiperplanos densos y productos arbitrarios de espacios de Baire, refinando de esta forma las respuestas negativas, que a la conjetura de Wilanski-Klee sobre la categoría de hiperplanos densos en espacios de Banach, y al problema del producto de espacios localmente convexos de Baire, han dado recientemente J. Arias de Reyna, (1) y M. Valdivia, (8), (9).

Las construcciones que realizamos siguen de cerca las ideas del caso convexo, expuestas por M. Valdivia en (7), si bien las extensiones realizadas requieren de nuevas consideraciones geométricas sobre conjuntos semiconvexos no siempre ligadas a las pruebas del caso convexo.

II. ESPACIOS BAIRE–SEMICONVEXOS

Sea E un espacio vectorial topológico. Diremos que E es Baire semiconvexo si, y sólo si, dada una sucesión (A_n) de subconjuntos semiconvexos y cerrados de E, cubriendo E, existe un entero positivo q tal que Aq tiene punto interior. Obviamente cada espacio de Baire es Baire-semiconvexo y un espacio Baire-semiconvexo es Baire-convexo, (7).

Para estudiar las propiedades de los conjuntos de primera categoría en espacios Baire semi-convexos asi como las propiedades de estabilidad, que pondrán de manifiesto la importancia de esta noción, precisamos en todo lo que sigue del siguiente resultado:

Lema 1

Sea A un subconjunto p-conveso del espacio vectorial E. Sea $x \in E$ tal que un rayo M que parte de x corta a A en dos puntos al menos. Entonces existen $a \in M$ y enteros positivo m y n tales que $C_p(A, x) \subset m(nA - a) + a$.

Demostración.

Supongamos $0 < p < 1$. Sea $M = \{x + \alpha y\colon \alpha \geqslant 0\}$ con $x + y \in A$, $x + hy \in A$, $h > 1$. Sea $\rho \geqslant 1$ tal que $[x + y, x + hy] \subset \rho A$. Llamemos $B = \rho A$ y sea $a = x + \dfrac{h+1}{2}y$. Si m es un entero positivo tal que

$m(h - 1) > 2h$ resulta inmediato determinar un b en $[x + y, x + hy]$ tal que $x = m(b - a) + a$. Ahora es fácil comprobar que $C_p(A, x) \subset m(2^{1/p} B - a) + a$. Tomando un entero positivo n mayor que $2^{1/p} \rho$ obtenemos la conclusión. En el caso $p = 1$ el mismo razonamiento nos da $B = A$, $x \in m(A - a) + a$ y $A \subset m(A - a) + a$ de donde se sigue la conclusión al ser $m(A - a) + a$ un convexo. Q.E.D.

Obtenemos ahora la siguiente caracterización para espacios Baire-semi-convexos:

Proposición 2.— Para un espacio vectorial topológico E son equivalentes:

(i) E es Baire semi-convexo.

(ii) Si (A_n) es una sucesión cualquiera de subconjuntos semi-convexos cerrados y sin punto interior, entonces $\cup \{A_n : n = 1, 2, \ldots\}$ tiene interior vacío.

Demostración.—

Solamente debemos probar que $(i) \Rightarrow (ii)$. Sea z un punto interior a $\cup \{A_n : n = 1, 2, \ldots\}$ donde cada A_n es semiconvexo y cerrado en E. Probaremos bajo la hipótesis (i) que algún A_n tiene punto interior. Si $z = 0$ el resultado es claro. Si $z \neq 0$ razonamos como sigue. Sea P el subconjunto de enteros positivos tal que $p \in P$ si, y sólo si, A_p es convexo o algún rayo que parte de $-z$ corta a A_p en más de un punto. Para cada $p \in P$ sea $C_p = A_p - z$ si A_p es convexo y en caso contrario, sea $r_p \in (0, 1)$ tal que A_p es r_p—convexo y C_p la envoltura r_p-convexa de A_p y $-z$. La familia $\{mC_p : p \in P, m = 1, 2, \ldots\}$ cubre al espacio E. En efecto, si $x \in E$, $x \neq 0$, existirá un número real ϵ con $0 < \epsilon < 1$ y tal que $hx \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - z)$ si $0 \leqslant h < \epsilon$. Sea q un entero positivo y h_1, h_2 escalares con $0 < h_1 < h_2 < \epsilon$ tales que $h_i\, x \in (A_q - z)$ $i = 1, 2$,. Sea $b_i = z + h_i x$. Entonces $q \in P$ pues si A_q no es convexo, el rayo $N = \{-z + \gamma(b_1 + z) : \gamma \geqslant 0\}$, que parte de $-z$ y pasa por b_1, corta al segmento abierto $(0, b_2)$ ya que

$$-z + \frac{h_2}{2h_2 - h_1}(b_1 + z) = \frac{h_1}{2h_2 - h_1} b_2$$

y como $(0, b_2) \subset A_q$ por la semi-convexidad de A_q, será $q \in P$. Además $x \in \frac{1}{h_i}(A_q - z)$ con lo que $x \in mC_q$ para algún entero positivo m. Por la hipótesis (i) existirá algún $q \in P$ tal que C_q tiene punto interior, pero como A_q es cerrado es claro que el lema 1 asegura que A_q tiene punto interior. Q.E.D.

En los espígrafes III y IV trataremos las propiedades de estabilidad de espacios Baire semi-convexos en cuanto a subespacios de codimensión numerable y productos arbitrarios. Remarquemos ahora algunas más sencillas.

Proposición 3.— Sea E un espacio vectorial topológico.

(a) Si F es un subespacio denso de E y Baire semi-convexo, E es Baire semi-convexo.

(b) Si E es Baire semi-convexo y F es un cociente separado de E, entonces F es Baire semi-convexo.

(c) Si $\{E_n: n= 1, 2,...\}$ es una sucesión de subespacios de E que cubre E y E es Baire semi-convexo, existe un entero positivo p tal que E_p es denso y Baire semi-convexo.

Demostración

(a) y (b) son fáciles de comprobar. En cuanto a (c) el lema de las familias de Saxon, (6), nos asegura que la subfamilia de subespacios E_n densos en E cubre a E. Si ninguno de ellos fuera semi-convexo se obtiene una contradicción de manera clara. Q.E.D.

III. SUBESPACIOS DE CODIMENSION NUMERABLE EN UN ESPACIO BAIRE SEMICONVEXO

En esta sección probaremos la estabilidad de los espacios Baire semi-convexos por subespacios de codimensión numerable. Como consecuencia, cualquier hiperplano denso de un espacio de Fréchet no puede recubrirse por una unión numerable de subconcuntos semi-convexos, cerrados y sin punto interior. Este resultado afirmativo, junto con la respuesta negativa de la conjetura de Wilansky y Klee, (1), justifican por sí solos el estudio de los espacios Baire semi-convexos. Precisamos de algunos resultados previos que desarrollados en las proposiciones 4, 5, 6 y 7.

Proposición 4.— Sea $\{A_n:n\ 1,2,...\}$ una sucesión de subconjuntos semi-convexos del espacio E que cubre E de manera que cada A_n es denso en ninguna parte; existe entonces una familia $B_n:n = 1, 2,...$ de subconjuntos semiconvexos de E cubriendo a E y de manera que el origen de E está en B_n y B_n sea denso en niguna parte $n = 1, 2,...$

Demostración

Sea P el conjunto de enteros positivos p para los que existe un rayo en E que parte del origen y corta a A_p en más de un punto. Para cada p en P sea $r_p \in (0, 1)$ tal que A_p es r_p-convexo y denotemos por C_p a la envoltura

r_p-convexa del origen y A_p. El lema 1 asegura que cada C_p es denso en ninguna parte. Denotando a la familia numerable $\{mC_p : p \in P,\ m = 1, 2,\dots\}$ como $\{B_n : n = 1, 2,\dots\}$ obtenemos el resultado. Q.E.D.

Proposición 5.– Sea E un espacio vectorial topológico tal que si $\{E_n : n = 1, 2,\dots\}$ *es una sucesión de subespacios de E cubriendo a E, debe existir un entero positivo p tal que* E_p *es denso en E. Sea* $\{A_n : n = 1, 2\dots\}$ *una sucesión de subconjuntos semi-convexos de E que cubren E, de maneraque cada* A_n *es denso en niguna parte. Existe entonces una familia* $\{B_n : n = 1, 2,\dots\}$*de subconjuntos semi-convexo de E, que cubre E, de manera que el origen de E está en* B_n, B_n *es denso en ninguna parte y la envoltura lineal de* B_n *es densa en E n = 1, 2,...*

Demostración.

Aplicando la proposición 4 podemos suponer que cada A_n contiene al origen de E. Sea P el subconjunto de enteros positivos tal que $p \in P$ si y sólo si E_p es denso en E, donde E_p es la envoltura lineal de A_p. Sea $F = \cup\ \{E_n : n \notin P\}$ y $x \in E \sim F$. Sea Q el subconjunto de P formado por los $q \in P$ tales que algún rayo que parte de x corta a A_q en más de un punto. Claramente $Q \neq \emptyset$ al tener un rayo una cantidad no numerable de puntos y x pertenecer a $E \sim F$. Para cada $q \in Q$ sea $r_q \in (0, 1]$ tal que A_q es r_q-convexo. Después del lema 1 la envoltura r_q-convexa de A_q y x es denso en ninguna parte. Denotemos por C_q a dicha envoltura y observemos que la familia $\{mC_q : q \in Q,\ m = 1, 2,\dots\}$cubre a E verificando las condiciones del resultado. Q.E.D.

Valdivia prueba en (7), pág. 18, que si A es un subconjunto convexo de un espacio localmente convexo E que no tiene punto interior y su envoltura convexa con algún x sí lo tiene, A debe estar contenido en un hiperplano real cerrado. Su prueba con ligeras modificaciones vale en espacios vectoriales topológicos. Teniendo en cuenta que para un subconjunto p-convexo A, $0 < p < 1$, $C(A) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} mA$ obtenemos la siguiente extensión:

Proposición 6.– Si A es un subconjunto p-convexo, $0 < p \leqslant 1$, *de un espacio E que no tiene punto interior y su envoltura p-convexa B con un vector x tiene punto interior, entonces existe un hiperplano real cerrado de E que contiene a A.*

Demostración.

Sea $0 < p < 1$ y supongamos, sin pérdida de generosidad, que el origen de E está en A. Como $C(A) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} mA$ y $mA \subset (m+1)A$, $m = 1, 2,\dots$, el lema 1 nos asegura que cada rayo que parte de x corta a $C(A)$ lo más en un punto. Resulta entonces que $C(A)$ tiene interior vacío y su envoltura convexa con x, que contiene a B, tiene punto interior. El resultado de Valdivia asegura que $C(A)$ está contenida en un hiperplano real cerrado que también contiene a A. Q.E.D.

Valdivia prueba en (7), pág. 20, que para un espacio localmente convexo E, si $\{H_n: n = 1, 2,\ldots\}$es una familia de hiperplanos de E cerrados que cubre E, entonces existe una familia $\{K_n: n = 1, 2,\ldots\}$ de subespacios cerrados de codimensión dos en E que cubren a E. El resultado es válido en espacios vectoriales topológicos y nos permite obtener la siguiente

Proposición 7.— Sea E un espacio tal que sí $\{E_n: n = 1, 2,\ldots\}$es una sucesión de subespacios de E que cubren E, debe existir un entero positivo p tal que E_p sea denso en E. Si F es un hiperplano de E y $\{F_n: n = 1, 2,\ldots\}$es una familia de subespacios de F, que cubre F, existirá un entero positivo q tal que F_q es denso en F.

Demostración

Si el resultado fuera falso sería posibe encontrar una sucesión

$$\{F_n: n = 1, 2,\ldots\}$$

de subespacios cerrados de F con $F_n \neq F$ $n = 1, 2,\ldots$ que cubren F. Probaremos ahora que la subfamilia de $\{F_n: n = 1, 2,\ldots\}$formada por los subespacios de codimensión uno en F también cubre F. Sea $x \in E \sim F$ y E_n la envoltura lineal de F_n y x. Claramente $E = \cup \{E_n: n = 1, 2,\ldots\}$y por el lema de las familias de Saxon, (6), la subfamilia de subespacios E_n densos en E cubre E, ahora es facil comprobar que los correspondientes F_n son hiperplanos de F. Existirá una subfamilia numerable $\{K_n: n = 1, 2,\ldots\}$de subespacios cerrados de F, de codimensión dos en F y que cubren F. Si L es el subespacio de E generado por x, H_n la clausura en E de K_n y $M_n = H_n + L$ $n = 1,2,\ldots,$ M_n es cerrado en E, tiene codimensión uno o dos en E y no son densos en E; por otra parte es obvio que $E = \cup \{M_n: n = 1, 2,\ldots\}$lo que es una contradicción y termina la prueba. Q.E.D.

La proposición 7 para espacios localmente convexos está probada por Valdivia en (7), pág. 24.

Podemos probar ahora el resultado fundamental de esta sección:

Teorema 8.— Sea E un espacio Baire semi-convexo y F un subespacio de codimensión numerable, entonces F es Baire semi-convexo.

Demostración.

Un razonamiento de inducción y la proposición 3 nos permite reducirnos al caso en que F sea un hiperplano denso en E espacio vectorial real. Supongamos que $\{A_n: n = 1, 2,\ldots\}$es una sucesión de subconjuntos semiconvexos y cerrados de F cubre F y de manera que cada A_n tenga interior vacío en F. De acuerdo con las proposiciones 5 y 7 se obtiene en F una familia $\{B_n: n = 1, 2, \ldots\}$ de subconjuntos semi-convexos y cerrados en F que cubren F, de manera que B_n tiene interior vacío en F, la envoltura lineal de B_n es densa en F y el origen está en B_n, $n = 1, 2, \ldots$ Sea M_n la clausura de B_n en E, M_n no tiene punto interior en E. Sea $r_n \in (0, 1]$ tal que M_n es r_n-convexo. Sea $z \in E \sim F$ y $P_{n,m}$ la envoltura r_n-convexa de $M_n \cup \{mz\}$. La familia numerable de semi-convexos $\{rP_{n,m}: m = -1, +1, -2, +2, \ldots, n, r = 1, 2, \ldots\}$ cubre E y así existirán dos enteros q y s tales que $\overline{P}_{q,s}$ tiene punto interior. Como M_q es cerrado y contiene al origen de E, $\overline{P}_{q,s} \subset 2^{1/r_q} P_{q,s}$ y así $P_{q,s}$ tiene punto interior en E. La proposición 6 nos asegura que existe un hiperplano real cerrado S de E que contiene a M_q. Puesto que F es denso en E, $S \cap F$ es un hiperplano cerrado de F que contiene a B_q. Llegamos a una contradicción recordando que la envoltura lineal de B_q era densa en F. Q.E.D.

Corolario 8.1.— Sea H un hiperplano denso de un espacio de Baire E. Sea $\{A_n: n = 1,2,\ldots\}$ una sucesión de subconjuntos semi-convexos y cerrados de E cuya unión cubre H. Entonces existe un entero positivo p tal que A_p tiene interior no vacío.

IV PRODUCTOS DE ESPACIOS BAIRE SEMI–CONVEXOS.

Probaremos ahora que los espacios Baire semi-convexos son estables por productos arbitrarios. Como Valdivia prueba en (9), este resultado no es cierto para espacios normados de Baire y obtenemos, como en el caso de los subespacios de codimensión numerable, nuevas propiedades de tipo de "categoría de Baire" para los productos de espacios de Baire. Los razonamientos que utilizamos están fuertemente relacionados, como anteriormente, con las ideas de Valdivia para el caso convexo, (7). Necesitamos varios resultados previos que expondremos sucesivamente.

Proposición 9.— Sea F un subespacio del espacio vectorial topológico E y A un subconjunto semi-convexo de E. Sean x, y, dos puntos de E tales que $(x + F) \cap A$ tiene un punto interior v en $x + F$ e $(y + F) \cap A \neq \emptyset$. Entonces existen enteros positivos m y n tales que $y \in m(nA - v) + v$.

Demostración.

El caso en que A es convexo se corresponde con la proposición 4. (1) de (7), pág. 26, que es cierta de forma clara en el caso no localmente convexo. Para el caso en que A es p-convexo basta tener en cuenta que $C(A) \subset \cup \{mA: m\ 1, 2, \ldots\}$. Q.E.D.

Sea P un subconjunto de enteros positivos. Sea T un subconjunto numerable del espacio E. Dado un subespacio F de E, $F \neq \{0\}$, consideremos una familia $\mathscr{B} = \{B_n : n \in P\}$de subconjuntos semiconvexos y cerrados de E conteniendo al origen y tal que, para cada $x \in T$, cada $\epsilon \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$, y cada $n \in P$, $(\epsilon x + F) \cap B_n$ no tiene punto interior en $\epsilon x + F$. Para $n \in P$ sea $p_n \in (0, 1]$ tal que B_n es p_n-convexo.

Proposición 10.– Si F es Baire semi-convexo, existe un subespacio real L de F, de dimensión uno, tal que el conjunto

$$\cup \{(x + L) \cap B_n : x \in T,\ n \in P\}$$

es numerable.

Demostración.

Dado un x cualquiera de T, sea $P(x)$ el subconjunto de P tal que $p \in P(x)$ si, y sólo sí, cada rayo que parte de x contenido en $x + F$ corta a lo sumo en un punto a B_p.Para cada $n \in P \sim P(x)$ el lema 1 nos asegura que $C_{p_n}(B_n, x) \cap (F + \epsilon x)$ no tiene punto interior en $F + \epsilon x$ para cada $\epsilon \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Definimos $P(n, x)$ como la clausura en F de la envoltura p_n-convexa de $B_n \cap (x + F) - x$ y $\{0\}$. Claramente,

$$P(n, x) \subset ((2^{1/p_n})\, C_{p_n}(B_n, x) - x) \cap F$$

y por lo dicho anteriormente, $P(n, x)$ tiene interior vacio en F. Como F es Baire semi-convexo, $\cup\ \{ mP(n, x) : n \in P \sim P(x), x \in T, m$ entero $\}$ no cubre F, por consiguiente existe un vector u de F que no está en dicha unión. Si L es el espacio real generado por u, L corta a dicha unión sólo en el origen y de aquí sigue que $\cup\ \{(x + L) \cap B_n : x \in T, n \in P\}$es numerable. Q.E.D.

Para las proposiciones 11, 12 y 13 consideremos una familia $\{E_i : i \in I\}$ de espacios Baire semi-convexos. Si $E = \Pi\ \{E_i : i \in I\}$y H es un subconjunto de I, $E(H)$ es el subespacio de E formado por los elementos que tienen nulas sus coordenadas de índices en $I \sim H$.

Sea $\mathscr{P}$ una familia numerable de subconjuntos semi-convexos y cerrados de E que contienen al origen. Sea $\mathscr{B}$ la subfamilia de $\mathscr{P}$ tal que $B \in \mathscr{B}$ si, y sólo sí, existe un índice i_B en I, dependiendo de B, con $(x + E(\{i_B\})) \cap B$ sin punto interior en $x + E(\{i_B\})$ para cada $x \in E$. Ponemos $\mathscr{B} = \{B_n : n \in M\}$, de manera que $M = \{1, 2, \ldots, s\}$ si $\mathscr{B}$ es finito no vacío y $M = \{1, 2, \ldots\}$ si $\mathscr{B}$ es infinito.

Si $\mathscr{B}$ es no vacío, tomamos $i_1 = i_{B_1}$. Sea $\mathscr{B}_1$ la subfamilia de $\mathscr{B}$ tal que $B \in \mathscr{B}_1$ si, y sólo sí $(x + E(\{i_1\}) \cap B$ tiene interior vacío en $x + E(\{i_1\})$ para todo $x \in E$.

Procediendo por recurrencia, supongamos que hemos obtenido $i_r \in I$ y $\mathscr{B}_r \subset \mathscr{B}$, $1 \leqslant r \leqslant n$. Si $\mathscr{B} \sim \cup\ \{\mathscr{B}_r : \leqslant r \leqslant n\}$ no es vacío, sea q el primer entero tal que B_q está en dicha familia. Tomamos $i_{n+1} := i_{B_q}$. Denotemos por $\mathscr{B}_{n+1}$ la subfamilia de $\mathscr{B}$ tal que $B \in \mathscr{B}_{n+1}$ si, y sólo sí, $(x + E(\{i_{n+1}\})) \cap B$ tiene interior vacío en $x + E(\{i_{n+1}\})$ para cada x de E. De esta forma determinemos un conjunto P de enteros positivos, que coincide con N cuando es infinito, que verifica $\mathscr{B} = \cup\ \{\mathscr{B}_n : n \in P\}$.

Proposición 11.— Dado un $x \in E$, existe, para cada $p \in P$, un suespacio real L_p en $E(\{i_p\})$, de dimensión uno, de manera que si L es la encoltura lineal cerrada de $\cup \{L_p : p \in P\}$ $(x + L) \cap B_n$, $n \in M$, no tiene punto interior en $x + L$.

Demostración.

Sea $n \in P$, definimos $\mathcal{N}_n = \{mB : B \in \mathcal{B}_n, m = 1, 2,... \}$. Sea $\mathcal{M}_n$ la famila de aquellos $D \in \mathcal{B}_n$ tales que $(z + E(\{i_p\})) \cap D$ no tiene punto interior en $z + E(\{i_p\})$ para cada $p \in P$ y cada $z \in E$. Si $B \in \mathcal{B}_n \sim \mathcal{M}_n$, sea $H(n, B)$ el subconjunto de P tal que si $s \in H(n, B)$, existe un vector $x(s, B)$ en E interior a$(x(s, B) + E(\{i_s\})) \cap B$ en $x(s, B) + E(\{i_s\})$. Sea T el subconjunto numerable de E formado por las sumas finitas de elementos del conjunto

$$\{x\} \cup \{qx(s, B): B \in \mathcal{B}_n \sim \mathcal{M}_n, \quad s \in H(n, B), \quad q \in \mathbb{Q}, \quad n \in P\}$$

Tomamos $F = E(\{i_1\})$ y la familia $\mathcal{N}_1$, aplicando la proposición 10 obtenemos un subespacio real L_1 de $E(\{i_1\})$, de dimensión uno, de forma que

$$\cup \{(y + L_1) \cap B : \mathcal{B} \in \mathcal{N}_1, \quad y \in T\}$$

es numerable. Determinamos así un subconjunto $S_1 \subset L_1$ numerable y denso, de forma que para $y \in T$, $B \in \mathcal{N}_1$ es $(y + S_1) \cap B = \phi$.

Procediendo por recurrencia, supongamos que hemos obtenido un subespacio real L_m de $E(\{i_m\})$, de dimensión uno $1 \leqslant m \leqslant n$, y el subconjunto numerable denso S_n de $L_1 + L_2 + ... + L_n$, de forma que para cada $y \in T$ y $A \in \mathcal{N}_m$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $(S_n + y) \cap A = \phi$. Sea ahora $u \in S_n$, $y \in T$ y $A \in \mathcal{N}_m$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Tenemos que para cada $\epsilon \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $(\epsilon(u + y) + E(\{i_{n+1}\})) \cap A$ no tiene punto interior en $\epsilon(u + y) + E(\{i_{n+1}\})$. En efecto, si lo tuviera, como $A \in \mathcal{N}_m$, $A = kB$ con $k \in \{1, 2,...\}$ y $B \in \mathcal{B}_m$; resultaría que $(\frac{\epsilon}{k}(u + y) + E(\{i_{n+1}\})) \cap B$ tiene punto interior en $\frac{\epsilon}{k}(u + y) + E(\{i_{n+1}\})$. Así $n + 1 \in H(m, B)$ y como $x(n + 1, B)$ es interior a

$$(x(n + 1, B) + E(\{i_{n+1}\})) \cap B$$

en $x(n + 1, B) + E(\{i_{n+1}\})$, la proposición 9 asegura la existencia de enteros positivos r y s tales que

$$\frac{\epsilon}{k}(u + y) \in r(sB - x(n + 1, B)) + x(n + 1, B)$$

De esta forma $u + y + \frac{r-1}{\epsilon} k\,(x(n + 1, B)) \in \frac{skr}{\epsilon} B \subset pB$ para un entero positivo $p > \frac{skr}{\epsilon}$, resulta entonces que

$$u + y + \frac{r-1}{\epsilon} k\,(x(n + 1, B)) \in pB \in \mathcal{N}_m$$

lo que es una contradicción, pues $y + \dfrac{r-1}{\epsilon} k\ (x(n+1, B)) \in T$ y $u \in Sn$. Aplicando de nuevo la proposición 10 para el conjunto numerable $S_n + T$, el espacio $E(\{i_{n+1}\})$ y la familia de semiconvexos cerrados $\cup \{ \mathcal{N}_m : m = 1, 2, \ldots, n+1\}$, obtenemos un subespacio real L_{n+1} de $E(\{i_{n+1}\})$, de dimensión uno, de forma que el conjunto

$$\cup \ \{(u + y + L_{n+1}) \cap A : u \in S_n,\ y \in T,\ A \in \mathcal{N}_m ; m = 1, 2, \ldots, n+1\}$$

es numerable.

Existe entonces un subconjunto R_n numerable y denso en L_{n+1}, de forma que si $S_{n+1} := \{u + v : u \in S_n, v \in R_n\}$, será $(S_{n+1} + y) \cap A = \phi$ para todo $y \in T$ y $A \in \mathcal{N}_m$, $m = 1, 2, \ldots, n+1$. Obviamente, S_{n+1} es numerable y denso en $L_1 + L_2 + \cdots + L_n + L_{n+1}$.

Sea L la envoltura lineal real cerrada de $\cup \{L_p : p \in P\}$. Supongamos que existe un $B \in \mathcal{B}$ de forma que $(x + L) \cap B$ tiene un punto interior z en $x + L$. Hallamos un subconjunto finito J de I y un entorno equilibrado y abierto U_i del origen en E_i, $i \in J$, de forma que si $U_i = E_i$, $i \in I \sim J$, y $U = \Pi\ \{U_i : i \in I\}$ sea

$$(z + U) \cap (x + L) \subset B \cap (x + L)$$

Si P es finito, sea q el mayor de sus elementos, $L = L_1 + \ldots + L_q$, y así resulta que $B \cap (x + L_1 + \ldots + L_q)$ tiene punto interior en $x + L_1 + \ldots + L_q$. Si p es infinito, determinamos q suficientemente grande para que $B \in \cup \{\mathcal{N}_n : 1 \leqslant n \leqslant q\}$ e $i_n \notin J$ si $n \geqslant q$. Entonces

$$(z + U) \cap (x + L_1 + \ldots + L_q) \neq \phi$$

con lo que

$$B \cap (x + L_1 + \ldots + L_q)$$

tiene punto interior en $x + L_1 + \ldots + L_q$. Como $S_q + x$ es denso en

$$x + L_1 + \ldots + L_q$$

debe ser

$$(S_q + x) \cap B \neq \phi$$

lo que contradice la construcción que hicimos de S_q y termina la prueba. Q.E.D.

Proposición 12.— Si $B \in \mathcal{P} \sim \mathcal{B}$, dado un subconjunto finito cualquiera J de I, existe un $x \in E$ interior a $(x + \Sigma\{E(\{i\}) : i \in J\}$ $\cap B$ en $x + \Sigma\ \{E(\{i\}) : i \in J\}$.

Demostración

Después de la definición de B, la propiedad es obvia cuando J tiene un único elemento. Un razonamiento por inducción nos da la prueba para cualquier J finito. Q.E.D.

Entonces para cada $B \in \mathscr{S} \sim \mathscr{B}$ y cada $n \in P$, se puede hallar un vector $u(n, B)$ en E interior a $(u(n, B) + \Sigma \{E(\{i_p\}): p = 1,2,... n\}) \cap B$ en

$$u(n, B) + \Sigma \{E(\{i_p\}): p = 1,... n\}$$

Denotemos con p_B un número real en $(0, 1]$ tal que B es p_B-convexo. Sea $\mathscr{R}$ la familia de subconjuntos semi-convexos y cerrados

$$\{mC_{p_B}(B, \{-u(n, B)\}): n \in P, B \in \mathscr{S} \sim \mathscr{B}, m = 1,2,...\}$$

llegamos así al siguiente resultado:

Proposición 13.— Si $\mathscr{S}$ cubre E, entonces $\mathscr{R}$ cubre E.

Demostración.

Supongamos que existe un elemento x de E que no esté en ningún elemento de $\mathscr{R}$. Aplicando la proposición 11 obtenemos, para cada $p \in P$, un subespacio real L_p, de dimensión uno, en $E(\{i_p\})$, de manera que $(x + L) \cap B_n$ $n \in M$, no tiene punto interior en $x + L$, siendo L la envoltura lineal real cerrada de $\cup \{L_p: p \in P\}$. Puesto que $\mathscr{S}$ cubre E y L es isomorfo al espacio de Fréchet $\Pi \{L_p: p \in P\}$ se aplica el teorema de la Categoría de Baire y se obtiene un elemento $B \in \mathscr{B}$ tal que $(x + L) \cap B$ tiene un punto interior z en $x + L$. Entonces $B \in \mathscr{S} \sim \mathscr{B}$ y razonando como el final de la proposición 11, determinemos un entero positivo q de forma que $B \cap (x + L_1 + ... + L_q)$ tiene punto interior en $x + L_1 + ... + L_q$. Se aplica ahora la proposición 9 para determinar enteros positivos r y s tales que

$$x \in r(sB - u(q, B)) + u(q, B)$$

y así $x \in mC_{p_B}(B, -u(q, B))$ para algún entero positivo m, esto es una contradicción y termina la prueba. Q.E.D.

Para la proposición siguiente los E_i son espacios vectoriales topológicos arbitrarios y $\mathscr{A} = \{\mathscr{B}_n: n = n\ 1, 2,...\}$ una familia de subconjuntos semi-convexos y cerrados de E que cubren a E y que contienen al origen de E.

Proposición 14.— Existe un subconjunto finito J de I y un entero positivo s de manera que $\mathscr{B}_s \supset E(I \sim J)$.

Demostración

Será suficiente encontrar un subconjunto finito J de I y entero positivo s tal que si $i \in I \sim J$, entonces $E(\{i\}) \subset B_s$. Suponiendo que esto último no se verifica, y razonando por recurrencia, determinamos sucesiones de elementos distintos de I $\{i_{r,p}: p = 1, 2,...\}$ tales que

$$E(\{i_{r,p}\}) \not\subset B_r,\ p = 1,2,...; \quad r = 1,2,...$$

$$i_{n+1}, p \neq i_{r,q} : r,\ q = 1,2,...,n \quad p = 1, 2,... \quad n = 1,2,...$$

Para cada par de enteros positivos n y p hallamos un elemento $x_{n,p} \in E(\{i_{n,p}\})$ con $x_{n,p} \notin B_n$. Sea L la envoltura lineal cerrada de $\{x_{n,p}: n,\ p = 1,2,...\}$ con la topología inducida por la de E, es fácil comprobar que L es un espacio de Fréchet al ser isomorfo a un producto numerable de subespacios de dimensión finita contenidos en algún $E(\{j\})$. Por el teorema de la Categoría de Baire se obtiene un entero positvo q tal que $B_q \cap L$ tiene punto interior x en L. Determinamos un subconjunto finito R de I y u entorno del origen U_i en E_i, $i \in R$, de manera que si $U_i = E_i$ para $i \notin R$ y $U = \Pi\ \{U_i: i \in I\}$, $(x + U) \cap L \subset B_q$. En la sucesión $\{i_{q,p}: p = 1,2,...\}$determinamos un elemento $i_{q,m}$ que no esté en R, entonces $x + nx_{q,m} \in B_q$,

$n = 1,2,...$ y como B_q es semi-convexo que contiene al origen, $\frac{1}{n}x + x_{q,m} \in B_q$

$n = 1, 2,...$ y al ser B_q cerrado

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} x + x_{q,m} = x_{q,m} \in B_q$$

lo que es una contradicción con la elección de $x_{q,m}$. Q.E.D.

Estamos ahora en condiciones de probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 15.— Sea $\{E_i: i \in I\}$ *una familia de espacios Baire semi-convexos, entonces* $E = \Pi\ \{E_i: i \in I\}$ *es Baire semi-convexo.*

Demostración.

Supongamos que E no es Baire semi-convexo. Podemos determinar una familia numerable $\mathscr{F}$ de subconjuntos semi-convexos cerrados y sin punto interior que contengan al origen y que cubran E (prop. 4). Sabemos por la proposición 13 que $\mathscr{R}$ cubre E. Aplicando la proposición 14 obtenemos un subconjunto finito J de I y un elemento D de $\mathscr{R}$ de manera que $E(I \sim J) \subset D$. De acuerdo con la proposición 12 existe un vector x de E interior a $(x + \Sigma\ \{E(\{i\}): i \in J\}) \cap B$ en $x + \Sigma\ \{E(\{i\}): i \in J\}$. Consecuentemente $(\Sigma\ \{E(\{i\}): i \in J\}) \cap (D - x)$ es un entorno del origen en $\Sigma\ \{(E(\{i\}): i \in J\}$. Por otra parte $E(I \sim J) \subset D - x$ pues si $z \in E(I \sim J)$,

$$\frac{1}{n}(nz) + (1 - (\frac{1}{n})^p)^{1/p}\, x \in D,$$

donde $p \in (0, 1]$ se elige de forma que D sea p-convexo, y como D es cerrado

$$z + x = \lim_{n \to \infty} (z + (1 - (\frac{1}{n})^p)^{1/p} x) \in D$$

Como E es la suma directa topológica de Σ $\{E(\{i\}): \in J\}$ y $E(I \sim J)$, es inmediato que $2^{1/p} D - 2x$ es un entorno del origen en E y en definitiva D tiene punto interior, lo cual es una contradicción que termina la prueba. Q.E.D.

Corolario.— Sea $\{E_i: i \in I\}$ una famila de espacios de Baire. Entonces su producto $E = \Pi$ $\{E_i: i \in I\}$ no puede recubrirse con una unión numerable de subconjuntos semiconvexos y cerrados sin punto interior.

V. ESPACIOS BAIRE p-CONVEXOS Y EJEMPLOS DISTINGUIDO LAS CLASES INTRODUCIDAS

Sea E un espacio vectorial topológico. Diremos que E es Baire p-convexo, $0 < p \leqslant 1$, si y sólo sí, dada una sucesión (A_n) de subconjuntos p-convexos y cerrados de E, cubriendo a E, existe un entero positivo q tal que A_q tiene punto interior. Obviamente cada espacio Baire semi-convexo es Baire p-convexo para cada $p \in (0, 1]$. Además si $0 < q < p \leqslant 1$, un espacio Baire q-convexo es Baire p-convexo. Para $p = 1$ obtenemos los espacios Baire-convexos de M. Valdivia, (7). Todos los resultados probados anteriormente para conjuntos semi-convexos y espacios Baire semi-convexos siguen siendo válidos, con las mismas pruebas, en las que se fija un índice de convexidad para todos los conjuntos consideramos, para los espacios Baire p-convexos. De esta forma se obtienen extensiones de los teoremas de Valdiva para el caso $p = 1$.

UN ESPACIO BAIRE CONVEXO QUE NO ES BAIRE p-CONVEXO

Sea $p \in (0, 1)$ y para una sucesión (x_n) de números reales ponemos

$$\|(x_n)\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p.$$

Sea λ el espacio vectorial de todas las sucesiones (x_n) con $\|(x_n)\|_p < +\infty$. $\| \ \|_p$ es una p-norma sobre λ y al espacio de p-Banach asociado lo denotamos por 1^p. Consideremos λ con la topología inducida por $\| \ \|_1$. Valdivia prueba en (7), pág. 281, que λ es Baire-convexo. Veamos ahora que λ no es Baire p-convexo. Para ello basta observar que $\{x \in \lambda: \|x\|_p \leqslant 1\}$ es un cerrado sin punto interior en λ que es absolutamente p-convexo y absorbente.

UN ESPACIO BAIRE p-CONVEXO QUE NO ES BAIRE q-CONVEXO

Sea $0 < q < p < 1$. Sea λ el espacio vectorial de todas las sucesiones (x_n) con $\|(x_n\|_q < +\infty$. Supongamos a λ dotado con la topología inducida por $\| \ \|_p$. Como la inmersión de l^q en l^p es contínua, la topología de λ es más gruesa que la topología de l^q. Es fácil probar que $\{x \in \lambda: \|x\|_q \leqslant 1\}$ es un cerrado sin punto interior en λ que es absolutamente q-convexo y absorbente. En consecuencia λ no es Baire q-convexo. Probaremos ahora que λ es

Baire p-convexo. Denotemos por T_p la topología de λ y por T_q la de l^q. Sea T'_q la topología localmente p-convexa más fina sobre λ de entre todas las topologías localmente p-convexas menos finas que T_q. Los entornos p-convexos del origen para T_q forman una base de entornos del origen para T'_q. No es difícil probar que $T'_q = T_p$. Ahora podemos probar que λ es Baire p-convexo. En efecto, sea $\{A_m : m = 1,2,\dots\}$ una sucesión de subconjuntos p-convexos cerrados de λ que cubren λ. Como l^q es de Baire, existirá un entero positivo r tal que A_r tiene punto interior x en l^q. Entonces $A_r - x$ es un entorno del origen para T_q y $A_r - x \subset 2^{1/p} C_p(A_r, -x)$, así $C_p(A_r, -x)$ es un entorno del origen para $T'_q = T_p$. El lema 1 asegura que A_r tiene punto interior para T_p y esto termina el razonamiento.

UN ESPACIO BAIRE p-CONVEXO QUE NO ES BAIRE SEMI-CONVEXO

El espacio λ del punto anterior no puede ser Baire semi-convexo y nos proporciona el ejemplo mencionado. Para $p = 1$ obtenemos la separación de los espacios Baire-convexos y Baire semi-convexos dentro de la categoría de los espacios normados.

UN ESPACIO BAIRE SEMI-CONVEXO QUE NO ES DE BAIRE

Los hiperplanos densos de primera categoría construídos por J. Arias de Reyna en cualquier espacio de Banach separable, (1), y por Valdivia en espacios de Baire separables, (8), proporcionan ejemplos de espacios Baire semi-convexos que no son de Baire. Los productos de espacios normados de Baire que no son de Baire construidos por Valdivia, (9), suministran nuevos ejemplos.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARIAS DE REYNA, J. "Dense hyperplanes of category". *Math. Ann.* 249, 111-114 (1980).

[2] ARIAS DE REYNA, J. "Normed Barely Baire spaces". *Isr. J. Math.* 42, 1-2, 33-36 (1982).

[3] JARCHOW, H. "Locally convex spaces". B. G. Teubner, Stuttgart. (1981).

[4] KOTHE, G. "Topological vector spaces I". *Springer.* Berlín. Heidelberg. New York (1969).

[5] POL, R. Y VAN MILL. Y. "Note on the Baire category in the cartesian products of non separable Banach spaces". Preprint.

[6] SAXON, S. Y TOOD, A. R. "A property of localy convex Baire spaces". *Math Ann.* 206, 23-24 (1973).

[7] VALDIVIA, M. "Topics in localy convex spaces" North. Holland Math. Studies, 67. Amsterdam. New York. Oxford (1982).

[8] VALDIVIA, M. "On certan subspaces of first category in topological vector Baire spaces". Preprint.

[9] VALDIVIA, M. "Products of Baire topological vector spaces". *Fund. Math.* 125,71-87 (1987)

Dpto. de Matemáticas
Universidad de Murcia