*Una caracterización topológica de las involuciones en superficies de Klein**

Por E. Bujalance y A. F. Costa

Abstract

This note is a short survey on the topological properties of the involutions on Klein surfaces which determine the algebraic structure of the asociated non-euclidean crystallographic groups.

1. Sea X una superficie de Klein (compacta) de género g con $k \geq 0$ componentes conexas en el borde y tal que $\alpha g + k - 1 \geq 2$ ($\alpha = 2$ si X es orientable y $\alpha = 1$ si X no es orientable). Entonces $X = D/\Gamma$, donde D es el plano hiperbólico y Γ es un grupo cristalográfico no euclídeo (grupo NEC). Si Φ es una involución de X entonces existe otro grupo NEC Γ' tal que Γ es un subgrupo de índice dos de Γ' y la actuación natural de Γ'/Γ sobre D/Γ es equivalente a la actuación del grupo $\{id, \Phi\}$ sobre X.

En esta nota se estudia el problema de la determinación de la estructura algebraica del grupo NEC Γ' mediante propiedades topológicas de Φ. En el caso de superficies de Klein sin borde los resultados que enunciaremos son clásicos y presentaremos resultados nuevos para el caso de superficies de Klein con borde.

2. En este trabajo las superficies de Klein y sus involuciones se estudian mediante grupos NEC. Un grupo NEC es un subgrupo discreto de isometrías del plano hiperbólico D de modo que el espacio cociente D/Γ es una superficie compacta.

Los grupos NEC se clasifican mediante su signatura que es una expresión de la forma:

$$(g;\ \pm;\ [m_1, ..., m_r];\ \{(n_{11}, ..., n_{1s_1}), ..., (n_{t1}, ..., n_{ts_t})\}) \tag{2.1}$$

La signatura determina una presentación algebraica del grupo (véase [5]).

Si Γ tiene la signatura (2.1) entonces D/Γ es una superficie compacta de género g con t componentes conexas en el borde, D/Γ es orientable si el signo es $+$ y no orientable si el signo es $-$. Los enteros $m_1, ..., m_r$ se llaman los períodos propios y representan los índices de ramificación sobre puntos interiores de D/Γ en la proyección natural de D sobre D/Γ. Los paréntesis $(n_{i1}, ..., n_{is_i})$ $i = 1, ..., t$ son los llamados ciclo-períodos y los enteros $n_{i1}, ..., n_{is_i}$, que se llaman períodos de los ciclo-períodos, representan los índices de ramificación en los puntos de la i-ésima componente conexa del borde.

3. Las propiedades topológicas de las involuciones que determinan la estructura algebraica del grupo NEC asociado constituyen lo que llamaremos especie de la involución. Dichas propiedades incluyen la información completa sobre los puntos fijos de la involución. En algunos casos el conjunto de puntos fijos contiene familias

* Presentada en la Sesión Científica del 6 de abril de 1988.

de arcos situados en la superficie de un modo especial formando lo que hemos llamado collares. Un collar sobre una superficie X de longitud $2r$ es un conjunto C de r arcos disjuntos $a_1, ..., a_r$ bien encajados en X y de modo que para cada componente conexa B, de ∂X, se verifica: o bien $B \cap C = \emptyset$, o bien, $B \cap C = \{$un extremo de a_i, un extremo de $a_{i+1(\mathrm{mod}\ r)}\}$ para algún $i = 1, ..., r$. Las propiedades que constituyen la especie se expresan mediante el siguiente símbolo:

$$(\pm;\ q;\ s;\ r_1, ..., r_t;\ m) \tag{3.1.}$$

Si Φ es una involución de X con especie (3.1) entonces Φ deja fijos q puntos aislados de X, s curvas de Jordan disjuntas y t collares de longitudes $r_1, ..., r_t$ respectivamente. Además Φ deja invariantes y sin puntos fijos m componentes de ∂X y si el signo en (3.1) es $+$ la superficie cociente X/Φ es orientable si el signo es $-$ no lo es.

4. Distinguimos dos casos según la superficie sea orientable o no. Supongamos en primer lugar que la superficie es orientable, entonces la involución puede conservar o invertir la orientación. Si la involución conserva la orientación las especies posibles tienen la forma $(+;\ q;\ 0;\ -;\ m)$ y la solución a nuestro problema viene dada por los siguientes resultados:

Teorema 4.1. *Sea $X = D/\Gamma$ una superficie de Klein orientable de género g, con k componentes en el borde y tal que $2g + k - 1 \geq 2$. Entonces X admite una involución conforme Φ de especie*

$$(+;\ q;\ 0;\ -;\ m)$$

si y sólo si existe un grupo NEC Γ', tal que Γ es un subgrupo de índice dos de Γ' y Γ' tiene signatura:

$$\left(\frac{2g + 2 - (q + m)}{4};\ +;\ [2, \overset{q}{\ldots}, 2],\ \{(-), \overset{\frac{k+m}{2}}{\ldots}, (-)\}\right)$$

con m $\leq$ k.

Como consecuencia podemos establecer las condiciones que deben verificar las características topológicas de la especie de una involución:

Corolario 4.2. *Sea X una superficie de Klein orientable de género g y con k componentes en el borde, de modo que $2g + k - 1 \geq 2$. Si X tiene una involución de especie $(+;\ q;\ 0;\ -;\ m)$ entonces:*

$$\frac{2g + 2 - (q + m)}{4}$$

y

$$\frac{k + m}{2}$$

son enteros positivos y $m \leq k$.

Además todas las posibilidades son realizables:

Teorema 4.3. *Si g, k, q y m verifican las condiciones del corolario anterior, entonces existe una superficie de Klein orientable de género g con k componentes en el borde y que admite una involución de especie $(+;\ q;\ 0;\ -;\ m)$.*

Si la superficie no tiene borde los resultados anteriores son clásicos y existen pruebas recientes en [6] y [4]. Los resultados 4.1, 4.2 y 4.3 se establecen en toda su generalidad en [2].

5. Supongamos ahora que la superficie sea orientable pero que la involución invierta la orientación. En este caso la especie de la involución tiene la forma $(\pm; 0; s; r_1, \ldots, r_t; 0)$ y se han establecido los siguientes resultados:

Teorema 5.1. *Sea $X = D/\Gamma$ una superficie de Klein orientable de género g, con k componentes en el borde y tal que $2g + k - 1 \geq 2$. Entonces X tiene una involución anticonforme con especie:*

$$(\pm; 0; s; r_1, \ldots, r_t; 0)$$

si y sólo si existe un grupo NEC Γ' tal que $\Gamma \leq \Gamma'$, $[\Gamma' : \Gamma] = 2$ y Γ' tiene signatura, o bien:

$$\left(\frac{g - (s + t) + 1}{2}; +; [-]; \{(-)^{\frac{k}{2} - \sum_{i=1}^{t} \frac{r_i}{4} + s}_{\ldots} (-), (2\overset{r_i}{\ldots}2)_{i=1\ldots t}\}\right)$$

con $s + t > 0$ si la especie tiene signo $+$, o bien:

$$(g + 1 - (t + s); -; [-]; \{(-)^{\frac{k}{2} - \sum_{i=1}^{t} \frac{r_i}{4} + s}_{\ldots} (-)(2\overset{r_i}{\ldots} 2)_{i=1\ldots t}\})$$

si la especie tiene signo $-$.

Corolario 5.2. *Sea X una superficie de Klein orientable con k componentes en el borde y género g, tal que $2g + k - 1 \geq 2$. Si X tiene una involución conforme de especie:*

$$(\pm; 0; s; r_1, \ldots, r_t; 0)$$

entonces:

1. *Si el signo es $+$:*

$$\frac{g - (s + t) + 1}{2}$$

y

$$\frac{k}{2} - \Sigma \frac{r_i}{4}$$

son enteros positivos y $s + t > 0$.

2. *Si el signo es* $-$:

$$g - (s + t) + 1 > 0 \quad y \quad \frac{k}{2} - \Sigma\frac{r_i}{4} + s \text{ es un entero positivo.}$$

Teorema 5.3. *Dados* g, k, $\pm$, s, $r_1, \ldots, r_t$ *verificando las condiciones* 1 *ó* 2 *del corolario anterior, existe una superficie de Klein orientable de género* g *con* k *componentes en el borde y que admite una involución anticonforme de especie:*

$$(\pm;\ 0;\ s;\ r_1, \ldots, r_t;\ 0)$$

Para el caso $k = 0$ existe una prueba de los resultados anteriores usando grupos NEC en [1]. El corolario 5.2 para el caso de superficies sin borde se conoce clásicamente como el teorema de Harnack. El caso general se establece en [2].

6. Por último al considerar superficies no orientables hemos de utilizar a la vez la totalidad de las características topológicas de la especie:

Teorema 6.1. *Sea* $X = D/\Gamma$ *una superficie de Klein no orientable de género* g *con* k *componentes en el borde y tal que* $g + k - 1 \geq 2$. *Entonces* X *tiene una involución* Φ *de especie*

$$(\pm;\ q;\ s;\ r_1, \ldots, r_t;\ m)$$

si y sólo si existe un grupo NEC, Γ', *tal que* Γ *es un subgrupo de índice dos de* Γ' *y se verifica:*

1. *La signatura de* Γ' *es:*

$$\left(g' = \frac{g - (2s + 2t + m + q) + 2}{2\alpha};\ \pm;\ [2 \overset{q}{\ldots} 2];\ \left\{(-) \overset{\frac{k+m}{2} - \sum_{i=1}^{t} \frac{r_i}{4} + s}{\ldots} (-),\ (2 \overset{r_i}{\ldots} 2)_{i=1\ldots t}\right\}\right)$$

donde α *es* 1 *(respectivamente* 2*) si el signo es* $+$ *(resp.* $-$*).*

2. *Hay* s *reflexiones en* $\Gamma' - \Gamma$ *correspondientes a ciclo-períodos vacíos de* Γ'.

3. *Si* Γ' *tiene signo* $+$ *entonces* $s + t > 0$ *y si* Γ' *tiene signo* $-$ *y* $s + t = 0$ *entonces* $q + m$ *es par. En cualquier caso* $g' + q + m + s + t \geq 2$ *y* $m \geq k$.

Corolario 6.2. *Sea* X *una superficie de Klein no orientable de género* g *y con* k *componentes en borde. Si* X *tiene una involución con especie:*

$$(\pm;\ q;\ s;\ r_1, \ldots, r_t;\ m)$$

entonces:

1. *Si el signo es* $+$:

$$g' = \frac{g - (2s + 2t + m + q) + 2}{2}$$

y

$$\frac{k + m}{2} - \sum_{i=1}^{t} \frac{r_i}{4} + s$$

son enteros positivos,

$$g' + \quad q + m + s + t \geq 2$$

y

$$s + t > 0.$$

2. *Si el signo es* $-$*:*

$$g' = g - (2s + 2t + m + q) + 2 > 0$$

y

$$\frac{k + m}{2} - \sum_{i=1}^{t} \frac{r_i}{4} + s$$

es un entero positivo,

$$g' + q + m + s + t \geq 2$$

y si

$$s + t = 0$$

entonces $q + m$ *debe ser par.*

Teorema 6.3. *Dados* g, k, $\pm$, q, s, r_1, ..., r_t, m *con las condiciones del corolario anterior, existe una superficie de Klein no orientable de género g con k componentes en el borde y que admite una involución del tipo:*

$$(\pm;\ q;\ s;\ r_1, \ldots, r_t;\ m).$$

Si la superficie no tiene borde los resultados anteriores están demostrados en [8]. El caso general está establecido en [2].

Por aplicación del teorema de realización de Nielsen, ver [3], los corolarios 4.2, 5.2 y 6.2 imponen condiciones sobre la especie cualquier involución topológica sobre una superficie sin estructura dianalítica. Dichas condiciones son conocidas en el caso en que la superficie no tenga borde desde los años veinte [7].

BIBLIOGRAFIAS

[1] BUJALANCE, E., y SINGERMAN, D.: «The symmetry type of a Riemann surface», *Proc. London Math. Soc.*, (3)*51* (1985), págs. 501-519.

[2] BUJALANCE, E.; COSTA, A. F., y SINGERMANN, D.: «On the involutions of compact Klein surfaces with boundary» (en preparación).

[3] KERCKHOFF, P.: «The Nielsen Realization Problem», *Bull. AMS*, *2* (1980), págs. 452-454.

[4] KOSNIOWSKI, C.: «Symmetries of surfaces», *Math. Gazette*, vol. 62, núm. 422 (1978), págs. 233-245.

[5] MACBEATH, A. M.: «The classification of non-euclidean plane crystallographic groups», *Canad. J. Math.*, *19* (1966), págs. 1192-1205.

[6] MACBEATH, A. M.: «Action of automorphisms of a compact Riemann surface on the first homology group», *Bull. London Math. Soc.*, *5* (1973), págs. 103-108.

[7] SCHERRER, W.: «Zur theorie der endlichen Gruppen topologischer Abbidungen von gescholossenen Flächen in sich», *Comment. Math. Helv.*, *1* (1929), págs. 69-119.

[8] SINGERMAN, D.: «Fixed points of homeomorphisms of compact non-orientable surfaces», prepublicación.

Departamento de Matemáticas Fundamentales,
Facultad de Ciencias, UNED,
28040 Madrid.