Ordenes de los automorfismos de las superficies de Klein con borde, de género topológico dos

Por J. A. BUJALANCE*

Recibido: 3 febrero de 1988

Presentado por el académico correspondiente D. Joaquín Arregui

Abstract

In this work we obtain all possible orders of the automorphisms of bordered Klein surfaces of genus 2, and besides the signatures of NEC groups associated to those automorphisms are characterized.

1. Un grupo NEC [12] Γ es un subgrupo discreto del grupo de isometrías del plano no euclídeo U, con espacio cociente U/Γ compacto.

Los grupos NEC se clasifican de acuerdo con su signatura [8], que es una expresión de la forma:

$$(g; \pm; [m_1, ..., m_t]; \{(n_{i1}, ..., n_{is_i})\, i = 1, ..., k\}),$$

donde g es el género topológico de la superficie U/Γ, el signo "+" ó "−" indica si la superficie es orientable o no, los $m_i \geqslant 2$ (períodos propios) representan el orden de ramificación de los puntos del interior de la superficie para la proyección canónica p: $U \to U/\Gamma$, los $n_{ij} \geqslant 2$ (períodos de los ciclos períodos) representan los órdenes de ramificación de los puntos de la frontera de la superficie para la aplicación canónica anterior, y k es el número de agujeros de la superficie.

La signatura de un grupo NEC determina una presentación del mismo dada por los generadores

i) $x_1, ..., x_t$
ii) $e_1, ..., e_k$
iii) $c_{10}, ..., c_{1s_1}, ..., c_{k0}, ..., c_{ks_k}$
iv) (si el signo es +) $a_1, b_1, ..., a_g, b_g$
(si el signo es −) $d_1, ..., d_g$,

* Parcialmente ayudado por la CAICYT.

y las relaciones

i) $x_i^{m_i} = 1, \quad i = 1, ..., t$
ii) $c_{ij-1} = c_{ij} = (c_{ij-1}c_{ij})^{n_{ij}} = 1 \qquad (i = 1, ..., k; \; j = 1, ..., s_i)$
iii) $e_i^{-1} c_{i0} e_i c_i = 1, \quad i = 1, ..., k$
iv) (si el signo es +) $x_1, ..., x_t e_1, ..., e_k a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}, ..., a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$
(si el signo es −) $x_1, ..., x_t e_1, ..., e_k d_1^2, ..., d_g^2 = 1$.

A partir de ahora las letras x, a, b, c, d y e se usarán para designar los generadores del grupo.

Una superficie de Klein (S.K.) [1] es una superficie con o sin frontera dotada de una estructura dianalítica; los automorfismos de estas superfices son homeomorfismos dianalíticos.

La relación entre grupos NEC y S.K. es una consecuencia de los resultados siguientes debidos a Preston [11], Alling-Greenleaf [1] y May [9]:

– Si X es una S.K. de género algebraico $p \geqslant 2$, entonces X puede ser representada por U/Γ, donde Γ es un grupo NEC con signatura $(g; \pm; [-]; \{(-), \overset{k}{\ldots}, (-)\})$ (grupo de superficie con k componentes en la frontera).
– Un grupo H es un grupo de automorfismos de una S.K. U/Γ si y sólo si $H \approx \Gamma'/\Gamma$ donde Γ' es un grupo NEC tal que $\Gamma \lhd \Gamma'$.

II. En este trabajo se obtienen todos los órdenes de los automorfismos de las S.K. con borde $X = U/\Gamma$ de género topológico dos, así como la caracterización de las signaturas de los grupos NEC Γ' tal que Γ'/Γ nos dé el automorfismo de X de orden deseado.

Estas cuestiones han sido estudiadas por Heins [6] y Bujalance [3] para las superficies de género cero ypor May [10] y Bujalance [4] para las de género uno.

Los resultados que obtenemos en este trabajo están expresados en los cuatro teoremas siguientes (en ellos se hace uso especialmente de ciertas cotas –obtenidas en [4]– para el género, número de períodos propios y de ciclo períodos de las signaturas de Γ', así como de resultados de [2]); todos los cuales se utilzan para relacionar las signaturas de Γ y Γ' cuando $\Gamma \lhd \Gamma'$):

Teorema 1.– Sea $X = U/\Gamma$ la suma conexa de dos planos proyectivos con k componentes en la frontera y con estructura de S.K. Si X posee un automorfismo Φ de orden N, N impar, entonces $N|K$ y la signatura de Γ', tal que $\langle\Phi\rangle \approx \Gamma'/\Gamma$, es:

$$(2; -; [-]; \{(-)^s\}), \qquad s = k/N$$

Demostración.– Puesto que $X = U/\Gamma$ tiene k componentes en el borde, Γ debe tener la siguiente signatura

$$(2; -; [-]; \{(-), \overset{k}{\ldots}, (-)\}).$$

Como N es impar, la signatura de Γ' tiene signo menos, entonces por [2] tiene la forma

$$(g'; -; [N/k_1, ..., N/k_t] \{(-), \overset{s}{\ldots}, (-)\}),$$

con

$$k = s - t' + \sum_{\substack{n|N \\ n \neq N}} t_n (N/n), \qquad t' = \sum_{\substack{n|N \\ n \neq N}} t_n;$$

además, a partir de la relación de áreas de las regiones fundamentales (v. [2]), se tiene

$$g'N - 2 + (N-1)(s - t' - 2) + Y = 0, \tag{1}$$

donde

$$Y = \sum_{\substack{n|N \\ n \neq 1, N}} N(1 - 1/n)\, t_n + \sum_{i=1}^{t} (N - k_i) \geqslant 0.$$

A continuación se van a encontrar en primer lugar las posibles soluciones de la ecuación (1) (obsérvese que estas soluciones determinan el orden de e_i módulo Γ, donde e_i son los generadores de conexión para cada uno de los ciclo períodos vacíos de Γ'), después se establece un epimorfismo θ: $\Gamma' \to Z_N$ con $\ker\theta \approx \Gamma$, tenindo en cuenta las condiciones obtenidas para los e_i. Si existe este epimorfismo se tiene que $\Gamma'/\ker\theta \approx Z_N$ es un grupo de automorfismos de orden N de $U/\ker\theta$.

Utilizando los resultados obtenidos en [4], se tienen las siguientes cotas para g' y t: $g' \leqslant 2$ y $t \leqslant 4$. Si $g' = 2$, (1) toma la forma

$$2N - 2 + (N-1)(s - t' - 2) + Y = 0$$

de donde se obtiene necesariamente que

$$\begin{aligned} s - t' &= 0 \\ Y &= 0 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} t_n &= 0, \quad n \neq 1, N \\ k_i &= N, \quad i = 1, ..., t \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$k = t'N,$$

es decir, la signatura de Γ' es

$$(2; -; [-] \{(-)^{t'}\}).$$

Puesto que $k = t'N$, entonces (v. [5])

$$\theta(e_i) = \theta(c_i) = \bar{0}, \quad i = 1, ..., t'.$$

Como θ tiene que ser un epimorfismo, debe existir algún elemento de Γ' tal que su imagen bajo θ genere Z_N, además se tiene que conservar la relación básica entre los generadores

$$\theta\ (e_1, \ldots, e_t d_1^2 d_2^2) = \bar{0},$$

esto ocurre si $\theta\ (d_1) = \bar{1}$ y $\theta\ (d_2) = \overline{N-1}$. Puesto que en este caso $\theta\ (d_1^N)$ es un elemento que invierte la orientación y pertenece a $\ker\theta$, por [7] la signatura de $\ker\theta$ tendrá signo menos.

Para los otros valores de g' y t no existen en la ecuación (1) soluciones para las que se pueda establecer un epimorfismo.

Un razonamiento análogo al efectuado en el teorema anterior, nos permite obtener los siguientes resultados en los que $r_i' \geqslant 2$ y se tengan valores enteros para t':

Teorema 2.— Sea $X = U/\Gamma$ la suma conexa de dos planos proyectivos con k componentes en la frontera y con estructura de S.K. Si X posee un automorfismo Φ de orden N, N par, entonces $N = 2$ ó $N|k$ y la signatura de Γ', tal que $\langle\Phi\rangle \approx \Gamma'/\Gamma$, es una de las siguientes,

Si $N = 2$

$(0; +; [2]; \{(-)^{t'+1}\ (2, \overset{r_1'}{\ldots}, 2)\}),$	$t' = (2\,(k-1) - r_1')/4$
$(0; +; [2, 2]; \{(-)^{t'}\ (2, \overset{r_1'}{\ldots}, 2)\}),$	$t' = (2k - r_1')/4$
$(0; +; [2]; \{(-)^{t'+2}\}),$	$t' = (k-1)/2$
$(0; +; [-]; \{(-)^{t'+2}\ (2, \overset{r_1'}{\ldots}, 2)\}),$	$t' = (2k - 4 - r_1')/4$
$(0; +; [-]; \{(-)^{t'+3}\}),$	$t' = (k-2)/2$
$(0; +; [2, 2]; \{(-)^{t'+1}\}),$	$t' = k/2$
$(1; -; [-]; \{(-)^{t'+2}\}),$	$t' = (k-2)/2$
$(1; -; [2]; \{(-)^{t'+1}\}),$	$t' = (k-1)/2$
$(1; -; [2, 2]; \{(-)^{t'}\}),$	$t' = k/2$

Si $N|k$

$(0; +; [-]; \{(-)^{t'}\ (2, \overset{r_1'}{\ldots}, 2)\ (2, \overset{r_2'}{\ldots}, 2)\}),$	$t' = (4k - N\,(r_1' + r_2'))/4N$
$(0; +; [-]; \{(-)^{t'+1}\ (2, \overset{r_1'}{\ldots}, 2)\}),$	$t' = (4k - r_1' N)/4N$
$(0; +; [-]; \{(-)^{t'+2}\}),$	$t' = k/N$
$(1; -; [-]; \{(-)^{t'+1}\}),$	$t' = k/N, N = 2$ ó $N = \dot{4}$
$(1; -; [-]; \{(-)^{t'}\ (2, \overset{r_1'}{\ldots}, 2)\}),$	$t' = (4k - r_1' N)/4N, N = \dot{4}$
$(2; -; [-]; \{(-)^{t'}\}),$	$t' = k/N, N = \dot{2}$ y $N \neq \dot{4}$

Teorema 3.— Sea $X = U/\Gamma$ la suma conexa de dos toros con k componentes en la frontera y estructura de S.K. Si X posee un automorfismo Φ de orden N, N impar, entonces N es 3 ó 5 y la signatura de Γ', tal que $\langle\Phi\rangle \approx \Gamma'/\Gamma$, es una de las siguientes:

Si $N = 3$

$(0; +; [3, 3]; \{(-)^{t'+2}\})$,	$t' = (k-2)/3$
$(0; +; [3, 3, 3]; \{(-)^{t'+1}\})$,	$t' = (k-1)/3$
$(0; +; [3, 3, 3, 3]; \{(-)^{t'}\})$,	$t' = k/3$

Si $N = 5$

$(0; +; [5]; \{(-)^{t'+2}\})$,	$t' = (k-2)/5$
$(0; +; [5, 5]; \{(-)^{t'+1}\})$,	$t' = (k-1)/5$
$(0; +; [5, 5, 5]; \{(-)^{t'}\})$,	$t' = k/5$.

Teorema 4.— Sea $X = U/\Gamma$ la suma conexa de dos toros con k componentes en la frontera y estructura de S.K. Si X posee un automorfismo Φ de orden N, N par, entonces N es 2, 4, 6, 8 ó 12 y la signatura de Γ', tal que $\langle\Phi\rangle \approx \Gamma'/\Gamma$, es una de las siguientes:

Si $N = 2$

$(1; +; [-]; \{(-)^{t'+2}\})$,	$t' = (k-2)/2$
$(1; +; [2]; \{(-)^{t'+1}\})$,	$t' = (k-1)/2$
$(1; +; [2, 2]; \{(-)^{t'}\})$,	$t' = k/2$
$(1; +; [-]; \{(-)^{t'} (2, \overset{r_1'}{\ldots}, 2)\})$,	$t' = (k - (r_1'/2))/2$
$(1; +; [-]; \{(-)^{t'+1}\})$,	$t' = k/2$
$(0; +; [2, 2, 2, 2]; \{(-)^{t'+2}\})$,	$t' = (k-2)/2$
$(0; +; [-]; \{(-)^{t'+3}\})$,	$t' = k/2$
$(0; +; [-]; \{(-)^{t'+2} (2, \overset{r_1'}{\ldots}, 2)\})$,	$t' = (k - (r_1'/2))/2$
$(0; +; [-]; \{(-)^{t'+1} (2, \overset{r_1'}{\ldots}, 2)(2, \overset{r_2'}{\ldots}, 2)\})$,	$t' = (2k - (r_1' + r_2'))/4$
$(0; +; [-]; \{(-)^{t'} (2, \overset{r_1'}{\ldots}, 2)(2, \overset{r_2'}{\ldots}, 2)(2, \overset{r_3'}{\ldots}, 2)\})$	$t' = (2k - (r_1' + r_2' + r_3'))/4$
$(2; -; [-]; \{(-)^{t'} (2, \ldots, 2)\})$,	$t' = (2k - r_1')/4$
$(2; -; [-]; \{(-)^{t'+1}\})$,	$t' = k/2$

Si $N = 4$

$(1;+;[-];\{(-)^{t'+2}\})$, $t' = (k-4)/4$
$(1;-;[2,2,2];\{(-)^{t'}\})$, $t' = k/4$
$(1;-;[-];\{(-)^{t'+3}\})$, $t' = (k-6)/4$
$(1;-;[2,2];\{(-)^{t'+1}\})$, $t' = (k-2)/4$
$(1;-;[2];\{(-)^{t'+2}\})$, $t' = (k-4)/4$

Si $N = 6$

$(1;-;[-];\{(-)^{t'+2}\})$, $t' = (k-4)/6$
$(1;-;[3,3];\{(-)^{t'}\})$, $t' = k/6$
$(1;-;[3];\{(-)^{t'+1}\})$, $t' = (k-2)/6$

Si $N = 8$

$(1;-;[4,2];\{(-)^{t'}\})$, $t' = k/8$
$(1;-;[-];\{(-)^{t'+2}\})$, $t' = (k-6)/8$
$(1;-;[4];\{(-)^{t'+1}\})$, $t' = (k-4)/8$
$(1;-;[2];\{(-)^{t'+1}\})$, $t' = (k-2)/8$

Si $N = 12$

$(1;-;[3,2];\{(-)^{t'}\})$, $t' = k/12$
$(1;-;[3];\{(-)^{t'+1}\})$, $t' = (k-6)/12$
$(1;-;[-];\{(-)^{t'+2}\})$, $t' = (k-10)/12$
$(1;-;[2];\{(-)^{t'+1}\})$, $t' = (k-4)/12$

BIBLIOGRAFIA

[1] ALLING, N. L., GREENLEAF, N.: *Foundation of the theory of Klein surfaces.* Lect. Notes in Math. Vol. 219, Springer-Verlag. Berlin.

[2] BUJALANCE, E.: *Normal subgroups of NEC groups.* Math. Zeit. 178 (1981), 331-341.

[3] BUJALANCE, E.: *Automorphism groups of compact planar Klein surfaces.* Manuscripta Math. 56, 1986, 105-124.

[4] BUJALANCE, J. A.: *Ordenes de los automorfismos de las superficies de Klein con borde, de género topológico uno.* Rev. R. Acad. Ci. (por aparecer).

[5] ETAYO, J. J.: *Sobre grupos de automorfismos de superficies de Klein.* Tesis doctoral, Universidad Complutense, Madrid (1983).

[6] HEINS, M.: *On the number of 1-1 directely conformal maps which a multiply-connected plane region of finite connectivity p* (>2) *admits onto it self.* Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 454-457.

[7] HOARE, A. H. M., SINGERMAN, D.: *The orientability of subgroups of plane groups.* London Math. Soc. Lecture Note Series 71 (1982), 221-227.

[8] MACBEATH, A. M.: *The classification of non-euclidean plane crystallographic groups.* Can. J. Math. 19 (1967), 1192-1205.

[9] MAY, C. L.: *Large automorphism groups of compact Klein surface with boundary.* Glasgow Math. J. 18 (1977), 1-10.

[10] MAY, C. L., GREENLEAF, N.: *Bordered Klein surfaces with maximal symmetry.* Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), 265-283.

[11] PRESTON, R.: *Projective structures and fundamental domains on compact Klein surfaces.* Ph. D. Thesis Univ. of Texas (1975).

[12] WILKIE, H. C.: *On non-euclidean crystallographic groups.* Math Z. 91 (1976), 87-102.

Departamento de Matemáticas
Colegio Universitario de Toledo
Toledo (Spain)