Criterio de elección entre sistemas de información difusos con estados difusos

Por M. LUISA MENENDEZ

Recibido: 14 enero 1987

Presentado por el académico numerario D. Francisco Azorín

Abstract

In this paper we state and study a criterion in order to compare fuzzy information systems when we require only information about certain vague states (fuzzy states). This criterion is based on the class of f^*-Divergence measures associated to the fuzzy information systems and concerning the fuzzy state space. This class is defined on the basis of the notion of f^*-Divergence (Csiszar, 1967) adapted by Morales, Pardo and Quesada to the context where there exists a prior knowledge about the states of the system.

1. INTRODUCCION

Sea $A = (X, \beta_X, P_s)$ un experimento o sistema de información probabilístico donde P_s está definida sobre el espacio medible (X, β_X) y s pertenece a un espacio de estados S. Designaremos por $f(x/s)$ la densidad de P_s respecto de una medida conveniente ν_1 $(f(x/s) = dP_s(x) / d\nu_1(x))$ y supondremos dando un enfoque Bayesiano, que el estado s es el resultado de una variable aleatoria cuyo espacio de probabilidad asociado es (S, β_S, T), siendo T una distribución de probabilidad tal que su densidad respecto de una medida conveniente λ se designa por $p(s) = dT(s) / d\lambda(s)$. Finalmente, denotaremos por $p(s/x)$ la densidad "a posteriori" de s observado x y por $f(x)$ la densidad predictiva o marginal respecto de la medida ν_1. En este contexto Bayesiano, Morales, Pardo y Quesada (1986) han adaptado el concepto de f^*-Divergencia dado por Csiszar (1967) con el objeto de cuantificar la información que un sistema de información probabilístico proporcionará acerca del estado desconocido.

Cuando la información que proporciona el sistema de información probabilístico sólo puede conocerse de forma aproximada surge un nuevo tipo de problema que ha sido tratado en trabajos previos, sobre la base de los conceptos "Información Difusa" y "Sistema de Información Difuso" (Tanaka, Okuda y Asai, 1976). Admitiremos entonces que la información que proporciona el sistema de información probabilístico puede expresarse mediante un subconjunto difuso sobre X, denotado bien por X ó bien por su función de pertenencia μ_X denominada información difusa. Toda partición difusa X^* sobre el espacio de observaciones $\mathcal{X}$ mediante informaciones difusas X se denominará sistema de información difuso

$$\sum_{X \in X^*} \mu_X (x) = 1, \quad \forall\, x \in \mathcal{X}$$

Con estas hipótesis, Menéndez (1986), ha establecido una clase de medidas de información basadas en la f^*-Divergencia de Csiszar, para cuantificar la información que un sistema de información difuso proporciona acerca de los estados del sistema.

El propósito de este artículo es cuantificar la cantidad de información conseguida a partir de un sistema de información difuso acerca de determinados estados vagos o imprecisos del sistema y establecer un criterio de elección para sistemas de información difusos con estados difusos, basado en la f^*-Divergencia y que contenga como caso particular al establecido por M. A. Gil y P. Gil (1985) para este mismo problema. Para ello supondremos que sobre el espacio de estados $\mathcal{S}$ hay definida una partición de sucesos difusos S^*; cada suceso difuso S de esta partición recibirá el nombre de estado difuso y su función de pertenencia se denotará por μ_S.

2. CUANTIFICACION DE LA INFORMACION DIFUSA

En este apartado se establece una clase de medidas de información para cuantificar la cantidad de información que proporciona un sistema de información probabilístico en relación a los estados difusos del sistema.

***Definición** 2.1.*– Sea A un sistema de información probabilístico del cual se obtiene información difusa perteneciente al sistema de información difuso X^*. Se denomina f^*-Divergencia esperada del sistema de información difuso X^* en relación a los estados difusos a la expresión:

$$D_{f^*} (X^*, S^*) = \sum_{X \in X^*} \underset{\sim}{P} (X) \sum_{S \in S^*} \left[\underset{\sim}{P} (S) f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P} (S/X)}{\underset{\sim}{P} (S)} \right) + \right.$$

$$\left. + \underset{\sim}{P} (\bar{S}) f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P} (\bar{S}/X)}{\underset{\sim}{P} (\bar{S})} \right) \right]$$

donde f^* es una función convexa y definida en $(0, \infty)$ satisfaciendo

$$f^* (0) = \lim_{u \to 0^+} f^* (u), \qquad 0 f^* (0/0) = 0,$$

$$0 f^* (a/0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon f^* (a/\varepsilon) = a \lim_{u \to \infty} f^* (u)/u$$

y

$$\underset{\sim}{P}(X) = \sum_{S \in S^*} \underset{\sim}{P}(X, S) = \int_X \mu_X(x) f(x)\, d\nu_1(x)$$

$$\underset{\sim}{P}(S) = \int_S \mu_S(s)\, p(s)\, d\lambda(s) \qquad \forall\, S \in S^*$$

$$\underset{\sim}{P}(S/X) = \int_S \int_X \frac{\mu_X(x)\,\mu_S(s)\, f(x/s)\, p(s)\, d\nu_1(x)\, d\lambda(s)}{\underset{\sim}{P}(X)}$$

$$\underset{\sim}{P}(\bar{S}) = 1 - \underset{\sim}{P}(S)$$

$$\underset{\sim}{P}(\bar{S}/X) = 1 - \underset{\sim}{P}(S/X)$$

Este concepto permite cuantificar la información que se espera obtener de la observación de un sistema de información probabilístico cuando ésta no viene dada de forma nítida en relación con determinados estados difusos del sistema.

Si la función f^* viene dada por $f^*(x) = x \log x$, se tiene entonces:

$$D_{f^*}(X^*, S^*) = \sum_{X \in X^*} \sum_{S \in S^*} [\underset{\sim}{P}(X, S) \log \underset{\sim}{P}(S/X) + \underset{\sim}{P}(X, \bar{S}) \log \underset{\sim}{P}(\bar{S}/X)] -$$

$$- \sum_{S \in S^*} [\underset{\sim}{P}(S) \log \underset{\sim}{P}(S) + \underset{\sim}{P}(\bar{S}) \log \underset{\sim}{P}(\bar{S})]$$

que corresponde a la "Cantidad de información de un sistema de información difuso en relación a los estados difusos" dada por Tanaka, Okuda y Asai (1979) y estudiada ampliamente por M. A. Gil y P. Gil (1985).

3. CRITERIO DE ELECCION ENTRE SISTEMAS DE INFORMACION DIFUSOS CON ESTADOS DIFUSOS

En este apartado se establece un criterio de elección entre sistemas de información difusos en relación a los estados difusos basado en la definición 2.1.

Definición 3.1.— Sean A y B dos sistemas de información probabilísticos que proporcionan información difusa y que ésta pertenece a los sistemas de información difusos X^* e Y^*. Se dice que el sistema de información difuso X^* es preferido o indiferente al sistema de información difuso Y^* en relación a los estados difusos según el criterio de la f^*-Divergencia si y sólo si

$$D_{f^*}(X^*, S^*) \geqslant D_{f^*}(Y^*, S^*)$$

denotándose

$$X^* \overset{D_{f^*}}{\geqslant} Y^*.$$

Si en el criterio que se acaba de definir se toma como función f^*, la función $f^*(x) = x \log x$ se obtiene el criterio propuesto por M. A. Gil, M. T. López y P. Gil (1985).

La relación así establecida entre sistemas de información difusos en relación a los estados difusos es un preorden completo, por lo cual siempre es posible elegir entre dos sistemas de información difusos aquel que proporcione mayor cantidad de información.

3.2. Propiedades

En este apartado se establecen las propiedades más importantes de este criterio.

En la práctica, existen sistemas de información difusos que no proporcionan información alguna acerca de los estados difusos en los cuales se está interesado, es decir, son sistemas para los cuales la probabilidad de obtener una información difusa es independiente del estado difuso. Estos sistemas de información difusos se denominan sistemas de información difusos nulos en relación a los estados difusos. A continuación vamos a establecer una propiedad que afirma que cualquier sistema de información difuso es preferido o indiferente a cualquier sistema de información difuso nulo en relación a los estados difusos.

Teorema 3.2.1.– Sea N^* un sistema de información difuso nulo en relación a los estados difusos. Sea X^* cualquier sistema de información difuso, entonces

$$X^* \overset{D_{f^*}}{\geqslant} N^*$$

cualquiera que sea la distribución sobre los estados difusos.

Demostración.– A través del concepto de sistema de información difuso nulo en relación a los estados difusos se sigue que:

$$\underset{\sim}{P}(S/N) = \underset{\sim}{P}(S), \qquad \underset{\sim}{P}(\bar{S}/N) = \underset{\sim}{P}(\bar{S}) \qquad \forall S \in S^* \quad \forall N \in N^*$$

por tanto:

$$D_{f^*}(N^*, S^*) = \sum_{N \in N^*} \underset{\sim}{P}(N) \cdot \sum_{S \in S^*} [\underset{\sim}{P}(S) f^*(1) + \underset{\sim}{P}(\bar{S}) f^*(1)] =$$

$$= f^*(1) + f^*(1) \cdot \sum_{S \in S^*} \underset{\sim}{P}(S) = l\, f^*(1)$$

siendo $l = \text{card}\ S^*$.

Por otra parte al ser:

$$\sum_{X \in X^*} \frac{\underset{\sim}{P}(S/X)}{\underset{\sim}{P}(S)} \underset{\sim}{P}(X) = 1, \qquad \sum_{X \in X^*} \frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}/X)}{\underset{\sim}{P}(\bar{S})} \underset{\sim}{P}(X) = 1$$

y

$$\sum_{X \in X^*} \underset{\sim}{P}(X) = 1$$

se sigue aplicando la desigualdad de Jensen que:

$$\sum_{X \in X^*} f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(S/X)}{\underset{\sim}{P}(S)} \right) \underset{\sim}{P}(X) \geqslant f^* \left(\sum_{X \in X^*} \frac{\underset{\sim}{P}(S/X)}{\underset{\sim}{P}(S)} \underset{\sim}{P}(X) \right) = f^*(1)$$

$$\sum_{X \in X^*} f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}/X)}{\underset{\sim}{P}(\bar{S})} \right) \underset{\sim}{P}(X) \geqslant f^* \left(\sum_{X \in X^*} \frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}/X)}{\underset{\sim}{P}(\bar{S})} \underset{\sim}{P}(X) \right) = f^*(1)$$

Multiplicando en la primera igualdad por $\underset{\sim}{P}(S)$, en la segunda por $\underset{\sim}{P}(\bar{S})$ y sumando sobre S^* resulta:

$$\sum_{S \in S^*} \underset{\sim}{P}(S) \cdot \sum_{X \in S^*} f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(S/X)}{\underset{\sim}{P}(S)} \right) \underset{\sim}{P}(X) \geqslant f^*(1)$$

$$\sum_{S \in S^*} \underset{\sim}{P}(\bar{S}) \sum_{X \in X^*} f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}/X)}{\underset{\sim}{P}(\bar{S})} \right) \underset{\sim}{P}(X) \geqslant f^*(1)(l-1)$$

de donde:

$$D_{f^*}(X^*, S^*) \geqslant f^*(1) + f^*(1)(l-1) = l f^*(1)$$

En resumen, la cantidad de información que proporciona un sistema de información difuso, en relación a los estados difusos es siempre superior o igual a la cantidad de información proporcionada por un sistema de información difuso nulo.

Teorema 3.2.2.–

a) Sea N^* el sistema de información difuso asociado a un sistema de información probabilístico nulo N, entonces $N^* \geqslant Y^*$ en relación a los estados difusos, cualquiera que sea el sistema de información difuso.

b) Sea Y^* un sistema de información completamente difuso, entonces $X^* \geqslant Y^*$ en relación a los estados difusos, cualquiera que sea el sistema de información difuso, entendiendo por sistema de información completamente difuso aquel en el que la función de pertenencia de cualquier información difusa es constante.

Demostración.–

a) Al ser N un sistema de información probabilístico nulo se tiene que:

$$\underset{\sim}{P}(N/s) = \underset{\sim}{P}(N) \qquad \forall\, N \in N^*, \quad \forall\, s \in S$$

Veamos basándonos en ello que N^* es un sistema de información difuso nulo en relación a los estados difusos, en efecto:

$$\underset{\sim}{P}(N/S) = \frac{1}{\underset{\sim}{P}(S)} \int_S \int_N \mu_S(s)\, \mu_N(n) f(n/s)\, p(s)\, d\nu(n)\, d\lambda(s) =$$

$$= \frac{1}{\underset{\sim}{P}(S)} \int_S \underset{\sim}{P}(N)\, \mu_S(s)\, p(s)\, d\lambda(s) = \underset{\sim}{P}(N) \qquad \forall\, N \in N^*$$

por tanto, por el teorema anterior resulta:

$$D_{f^*}(X^*, S^*) \geqslant D_{f^*}(N^*, S^*)$$

b) Si Y^* es completamente difuso entonces es inmediato que es nulo, con lo cual se sigue el apartado b).

En resumen no son aconsejables los sistemas de información difusos nulos o completamente difusos en relación a los estados difusos ya que la cantidad de información que proporcionan es mínima.

***Definición** 3.2.–* Sean X^* e Y^* dos sistemas de información difusos sobre A y B respectivamente. Se denomina sistema de información difuso combinado al sistema de información difuso

$$X^* \times Y^* = \{(X, Y) \,/\, X \in X^*, \ Y \in Y^*\}.$$

La siguiente propiedad establece que cualquier sistema de información difuso combinado $X^* \times Y^*$ es preferido o indiferente a cada uno de los sistemas de información difusos X^* e Y^*.

***Teorema** 3.2.3.–* Sean X^* e Y^* dos sistemas de información difusos asociados a los sistemas de información probabilísticos A y B. Entonces:

$$D_{f^*}(X^* \times Y^*, S^*) \geqslant D_{f^*}(X^*, S^*)$$

Además si $\underset{\sim}{P}(Y/X, S)$ no depende de S, $\forall\, X \in X^*$, $\forall\, Y \in Y^*$, entonces $D_{f^*}(X^* \times Y^*, S^*) = D_{f^*}(X^*, S^*)$ y además si $\underset{\sim}{P}(y/X, s)$ no depende de s, $\forall\, y \in Y$, $\forall\, X \in X^*$ ó Y^* es un sistema de información completamente difuso, entonces

$$D_{f^*}(X^* \times Y^*, S^*) = D_{f^*}(X^*, S^*)$$

Demostración.– Sabemos que:

$$\sum_{Y \in Y^*} \frac{\underset{\sim}{P}(S/X, Y)}{\underset{\sim}{P}(S)} \underset{\sim}{P}(Y/X) = \frac{\underset{\sim}{P}(S/X)}{\underset{\sim}{P}(S)},$$

$$\sum_{Y \in Y^*} \frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}/X, Y)}{\underset{\sim}{P}(\bar{S})} \underset{\sim}{P}(Y/X) = \frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}/X)}{\underset{\sim}{P}(\bar{S})}$$

y

$$\sum_{Y \in Y^*} \underset{\sim}{P}(Y/X) = 1$$

Por la desigualdad de Jensen se tiene entonces:

$$\sum_{Y \in Y^*} \underset{\sim}{P}(Y/X) \cdot f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(S/X, Y)}{\underset{\sim}{P}(S)}\right) \geqslant f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(S/X)}{\underset{\sim}{P}(S)}\right)$$

$$\sum_{Y \in Y^*} \underset{\sim}{P}(Y/X) \cdot f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}/X, Y)}{\underset{\sim}{P}(\bar{S})}\right) \geqslant f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}/X)}{\underset{\sim}{P}(\bar{S})}\right)$$

Multiplicando en la primera desigualdad por $\underset{\sim}{P}(S)$, en la segunda por $\underset{\sim}{P}(\bar{S})$ y sumando sobre S^* resulta:

$$\sum_{S \in S^*} \sum_{Y \in Y^*} \underset{\sim}{P}(Y/X) \cdot f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(S/X, Y)}{\underset{\sim}{P}(S)}\right) \cdot \underset{\sim}{P}(S) \geqslant \sum_{S \in S^*} f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(S/X)}{\underset{\sim}{P}(S)}\right) \cdot \underset{\sim}{P}(S)$$

$$\sum_{S \in S^*} \sum_{Y \in Y^*} \underset{\sim}{P}(Y/X) \cdot f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}/X, Y)}{\underset{\sim}{P}(\bar{S})}\right) \cdot \underset{\sim}{P}(\bar{S}) \geqslant \sum_{S \in S^*} f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}/X)}{\underset{\sim}{P}(\bar{S})}\right) \cdot \underset{\sim}{P}(\bar{S})$$

Volviendo a multiplicar ambas desigualdades por $\underset{\sim}{P}(X)$ y sumando sobre X^* se sigue una vez sumadas las desigualdades resultantes que:

$$D_{f^*}(X^* \times Y^*, S^*) \geqslant D_{f^*}(X^*, S^*)$$

Cuando $\underset{\sim}{P}(Y/X, S)$ no depende de S se tiene que:

$$\underset{\sim}{P}(S/X, Y) = \underset{\sim}{P}(S/X) \qquad \underset{\sim}{P}(\bar{S}/X, Y) = \underset{\sim}{P}(\bar{S}/X)$$

por tanto:

$$D_{f^*}(X^* \times Y^*, S^*) = \sum_{S \in S^*} \sum_{X \in X^*} \underset{\sim}{P}(X) \cdot \underset{\sim}{P}(S) \cdot f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(S/X)}{\underset{\sim}{P}(S)}\right) +$$

$$+ \sum_{S \in S^*} \sum_{X \in X^*} \underset{\sim}{P}(X) \cdot \underset{\sim}{P}(\bar{S}) \cdot f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}/X)}{\underset{\sim}{P}(\bar{S})}\right) = D_{f^*}(X^*, Y^*)$$

Por otra parte, si $\underset{\sim}{P}(y/X, s)$ no depende de s, $\forall y \in Y$, $\forall X \in X^*$

$$\underset{\sim}{P}(y, s/X) = \underset{\sim}{P}(s/X)\, \underset{\sim}{P}(y/X)$$

y por tanto:

$$\underset{\sim}{P}(S, Y/X) = \underset{\sim}{P}(S/X) \cdot \underset{\sim}{P}(Y/X)$$

luego:

$$\underset{\sim}{P}(Y/X, S) = \underset{\sim}{P}(Y/X)$$

y estamos en el caso anterior.

Finalmente si Y^* es completamente difuso, la función de pertenencia μ_Y es constante y se sigue que

$$\underset{\sim}{P}(Y/X, S) = \frac{\underset{\sim}{P}(Y, X, S)}{\underset{\sim}{P}(X, S)} = \mu_Y(y)$$

es decir no depende de S, con lo cual nos encontramos en el caso anterior y se verifica la igualdad.

Como consecuencia de este teorema, se tiene además que dadas dos muestras aleatorias difusas una de orden n y otra de orden $n-1$, es siempre

$$D_{f^*}(X^*_{(n)}, S^*) \geqslant D_{f^*}(X^*_{(n-1)}, S^*)$$

entendiendo por muestra aleatoria difusa de orden n el sistema de información difuso combinado

$$X^*_{(n)} = X^* \times X^* \times \overset{n}{\ldots} \times X^*$$

Es conveniente hacer notar que tomando como función $f^*(x) = x \log x$ se verifican una serie de resultados relativos a independencia de sistemas de información difusos que no se verifican en general para toda función f^*. Estos resultados pueden verse en M. A. Gil, M. T. López y P. Gil (1985).

Veamos ahora qué ocurre cuando se dispone de dos sistemas de información difusos tales que uno de ellos es un refinamiento del otro (Ken Kuriyama 1983).

***Definición** 3.2.–* Sean $X^* = \{X^m \,/\, m \in M\}$ y $X_0^* = \{X_0^j \,/\, j \in J\}$ dos sistemas de información difusos sobre el sistema de información probabilístico A. Se dice que el sistema de información X^* es un refinamiento del sistema de información difuso X_0^* si:

$$\forall\, X^m \in X^* \quad \exists\, J(m) \subset J \,/\, \mu_{X^m}(x) = \sum_{j \in J(m)} \mu_{X_0^j}(x)$$

donde $\{J(m),\ m \in M\}$ es una partición de J.

***Teorema** 3.2.4.–* Si el sistema de información difuso X^* es un refinamiento del sistema de información difuso X_0^* entonces:

$$D_{f^*}(X_0^*, S^*) \geqslant D_{f^*}(X^*, S)$$

Demostración.— Por ser X^* un refinamiento de X_0^*, para cada $X^m \in X^*$ existe un subconjunto $J(m)$ de J tal que

$$\mu_{X^m}(x) = \sum_{j \in J(m)} \mu_{X_0^j}(x)$$

con $\{J(m),\ m \in M\}$ una partición de J.

Como

$$\sum_{j \in J(m)} \frac{\underset{\sim}{P}(S, X_0^j)}{\underset{\sim}{P}(S) \cdot \underset{\sim}{P}(X_0^j)} \cdot \frac{\underset{\sim}{P}(X_0^j)}{\sum_{j \in J(m)} \underset{\sim}{P}(X_0^j)} =$$

$$= \frac{1}{\underset{\sim}{P}(S)} \sum_{j \in J(m)} \frac{\underset{\sim}{P}(S, X_0^j)}{\sum_{j \in J(m)} \underset{\sim}{P}(X_0^j)}$$

y

$$\sum_{j \in J(m)} \frac{\underset{\sim}{P}(X_0^j)}{\sum_{j \in J(m)} \underset{\sim}{P}(X_0^j)} = 1$$

aplicando la desigualdad de Jensen se tiene:

$$f^* \left(\frac{1}{\underset{\sim}{P}(S)} \sum_{j \in J(m)} \frac{\underset{\sim}{P}(S, X_0^j)}{\sum_{j \in J(m)} \underset{\sim}{P}(X_0^j)} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j \in J(m)} f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(S, X_0^j)}{\underset{\sim}{P}(S) . \underset{\sim}{P}(X_0^j)} \right) \cdot \frac{\underset{\sim}{P}(X_0^j)}{\sum_{j \in J(m)} \underset{\sim}{P}(X_0^j)}$$

Por otra parte, multiplicando por $\underset{\sim}{P}(X^m)$ y por $\underset{\sim}{P}(S)$ en la primera desigualdad y sumando sobre X^* y S^*, teniendo en cuenta que

$$\sum_{j \in J(m)} \underset{\sim}{P}(X_0^j) = \underset{\sim}{P}(X^m)$$

se tiene:

$$\sum_{X \in X^*} \underset{\sim}{P}(X) \cdot \sum_{S \in S^*} \underset{\sim}{P}(S) \cdot f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(S, X^m)}{\underset{\sim}{P}(S) \cdot \underset{\sim}{P}(X^m)} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{X \in X^*} \sum_{S \in S^*} \sum_{j \in J(m)} \underset{\sim}{P}(X_0^j) \cdot \underset{\sim}{P}(\bar{S}) \cdot f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(S, X_0^j)}{\underset{\sim}{P}(S) \cdot \underset{\sim}{P}(X^m)} \right)$$

Multiplicando en la segunda desigualdad por $\underset{\sim}{P}(X^m)$ y por $\underset{\sim}{P}(\bar{S})$ y sumando sobre X^* y S^* resulta:

$$\sum_{X \in X^*} \underset{\sim}{P}(X) \cdot \sum_{S \in S^*} \underset{\sim}{P}(\bar{S}) \cdot f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}, X^m)}{\underset{\sim}{P}(\bar{S}) \cdot \underset{\sim}{P}(X^m)} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{X \in X^*} \sum_{S \in S^*} \sum_{j \in J(m)} \underset{\sim}{P}(X_0^j) \cdot \underset{\sim}{P}(\bar{S}) \cdot f^* \left(\frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}, X_0^j)}{\underset{\sim}{P}(S) \cdot \underset{\sim}{P}(X_0^j)} \right)$$

Sumando ambas desigualdades se llega a que:

$$D_{f^*}(X^*, S^*) \leqslant D_{f^*}(X_0^*, S^*)$$

Vamos a ver ahora la relación que existe entre la información proporcionada por una muestra aleatoria difusa $X^*_{(n)}$ en relación a los estados difusos y la proporcionada por T_0 $(X^*_{(n)})$ siendo T_0 una aplicación definida sobre $X^*_{(n)}$.

***Teorema** 3.2.5.*– Sea X^* un sistema de información difuso y $X^*_{(n)}$ la correspondiente muestra difusa (m.a.d.) obtenida a partir de X^*. Sea T_0 una aplicación sobre $X^*_{(n)}$ de tal forma que T_0 (X^*_n) sea también un sistema de información difuso verificándose:

$$\underset{\sim}{P}(S, t_0) = \sum_{(X^1, \ldots, X^n) \in \Lambda(t_0)} \underset{\sim}{P}(S, X^1, \ldots, X^n)$$

$\forall S \in S^*$ y para casi todo $t_0 \in T_0$ $(X^*_{(n)})$, donde

$$\Lambda(t_0) = \{(X^1, \ldots, X^n) \in X^*_{(n)} \;/\; T_0 (X^1, \ldots, X^n) = t_0\}$$

Entonces

$$D_{f^*}(X^*_{(n)}, S^*) \geqslant D_{f^*}(T_0(X^*_{(n)}), S^*)$$

dándose la igualdad si y sólo si

$$\underset{\sim}{P}(S/X^1, \ldots, X^n) = \underset{\sim}{P}(S/t_0) \qquad \forall (X^1, \ldots, X^n) \in \Lambda(t_0) \qquad \forall t_0 \in T_0(X^*_{(n)})$$

Demostración.– Al ser:

$$\sum_{(X^1, \ldots, X^n) \in \Lambda(t_0)} \frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}/X^1, \ldots, X^n)}{\underset{\sim}{P}(\bar{S})} \cdot \frac{\underset{\sim}{P}(X^1, \ldots, X^n)}{\underset{\sim}{P}(t_0)} = \frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}/t_0)}{\underset{\sim}{P}(\bar{S})}$$

$$\sum_{(X^1, \ldots, X^n) \in \Lambda(t_0)} \frac{\underset{\sim}{P}(S/X^1, \ldots, X^n)}{\underset{\sim}{P}(S)} \cdot \frac{\underset{\sim}{P}(X^1, \ldots, X^n)}{\underset{\sim}{P}(t_0)} = \frac{\underset{\sim}{P}(S/t_0)}{\underset{\sim}{P}(S)}$$

$$\sum_{(X^1, \ldots, X^n) \in \Lambda(t_0)} \frac{\underset{\sim}{P}(X^1, \ldots, X^n)}{\underset{\sim}{P}(t_0)} = 1$$

Aplicando la desigualdad de Jensen se tiene:

$$\sum_{(X^1,\dots,X^n)\in\Lambda(t_0)} f^*\left(\frac{\underset{\sim}{P}(S/X^1,\dots,X^n)}{\underset{\sim}{P}(S)}\right)\cdot \underset{\sim}{P}(X^1,\dots,X^n)\geqslant$$

$$\geqslant \underset{\sim}{P}(t_0)\cdot f^*\left(\frac{\underset{\sim}{P}(S/t_0)}{\underset{\sim}{P}(S)}\right)$$

$$\sum_{(X^1,\dots,X^n)\in\Lambda(t_0)} f^*\left(\frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}/X^1,\dots,X^n)}{\underset{\sim}{P}(\bar{S})}\right)\cdot \underset{\sim}{P}(X^1,\dots,X^n)\geqslant$$

$$\geqslant \underset{\sim}{P}(t_0) f^*\left(\frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}/t_0)}{\underset{\sim}{P}(\bar{S})}\right)$$

Sumando en t_0 a lo largo de $T_0\ (X^*_{(n)})$ en ambas desigualdades, multiplicando la primera desigualdad resultante por $\underset{\sim}{P}(S)$ y la segunda por $\underset{\sim}{P}(\bar{S})$ y sumando ambas sobre S^* resulta:

$$\sum_{S\in S^*}\underset{\sim}{P}(S)\sum_{(X^1,\dots,X^n)\in X^*_{(n)}}\underset{\sim}{P}(X^1,\dots,X^n) f^*\left(\frac{\underset{\sim}{P}(S/X^1,\dots,X^n)}{\underset{\sim}{P}(S)}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{S\in S^*}\underset{\sim}{P}(S)\sum_{t_0\in T_0(S^*_{(n)})}\underset{\sim}{P}(t_0) f^*\left(\frac{\underset{\sim}{P}(S/t_0)}{\underset{\sim}{P}(S)}\right)\cdot$$

$$\sum_{S\in S^*}\underset{\sim}{P}(\bar{S})\sum_{(X^1,\dots,X^n)\in X^*_{(n)}}\underset{\sim}{P}(X^1,\dots,X^n) f^*\left(\frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}/X^1,\dots,X^n)}{\underset{\sim}{P}(\bar{S})}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{S\in S^*}\underset{\sim}{P}(\bar{S})\sum_{t_0\in T_0(X^*_{(n)})}\underset{\sim}{P}(t_0) f^*\left(\frac{\underset{\sim}{P}(\bar{S}/t_0)}{\underset{\sim}{P}(\bar{S})}\right)$$

De donde, sumando ambas desigualdades se llega al resultado enunciado:

$$D_{f^*}\ (X^*_{(n)}, S^*)\geqslant D_{f^*}\ (T_0\ (X^*_{(n)}),\ S^*)$$

BIBLIOGRAFIA

[1] I. CSISZAR: *Information type measures of divergence of probability distributions and indirect observations.* Studia Scientarum Mathematicarum Hungarica 2, 299-318 (1967).

[2] M. A. GIL, M. T. LOPEZ AND P. GIL: *Quantity of information: Comparison between Information Systems: 1. Non Fuzzy States.* Fuzzy sets and Systems 15, 65-78 (1985).

[3] M. A. GIL, M. T. LOPEZ AND P. GIL: *Quantity of Information; Comparison between Information Systems: 2. Fuzzy States.* Fuzzy sets and System 15, 78-89 (1985).

[4] KEN KURIYAMA: *Entropy of a finite partition of fuzzy sets.* Journal Math. Analysis Applications 94, 38-43 (1983).

[5] M. L. MENENDEZ: *Tratamiento de la Información en Sistemas de Información Difusos.* Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid (1986).

[6] D. MORALES, L. PARDO Y V. QUESADA: *Las medidas de f*-Divergencias en un contexto Bayesiano.* Trabajos de Estadística. Vol. 1, nº 2 (1986).

[7] H. TANAKA, T. OKUDA AND K. ASAI: *A formulation of fuzzy decision problems and its applications to an investiment problems.* Kybernetes, 5, 25-3 (1976).

[8] H. TANAKA, T. OKUDA AND K. ASAI: *Fuzzy information and decision in statistical model.* Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications (1979).

[9] L. A. ZADEH: *Probability measures of fuzzy events.* Journal Math Analysis Applications 23, 421-427 (1968).

Departamento de Matemática Aplicada
E.T.S. Arquitectura
Universidad Politécnica
28040 Madrid