Sobre ciertos límites inductivos generalizados

Por BERNARDO CASCALES*

Recibido: 12 noviembre 1986

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia Ureña

Abstract

In this paper we deal with locally convex spaces endowed with a topology of generalized inductive limit through an increasing sequence of metrizable subsets. A well-known localization theorem of Grothendieck for (LF)-spaces is extended to this context and, as a consequence we give some new results on the localization of bounded subsets. The metrizability of precompact subsets that we show in this class of spaces allows us to obtain some properties related to the general problem of retractivity in inductive limits posed by K. Floret. We extend some results by H. Neus dealing with dual metric spaces and we show a (DF)-space with the Mackey convergence property, which is sequentially complete and not quasi-complete.

Resumen

En este artículo estudiamos espacios localmente convexos dotados de topologías límite inductivo generalizado obtenidas a través de una sucesión creciente de subconjuntos metrizables. Extendemos a este contexto un bien conocido teorema de localización de Grothendieck para espacios (LF) y, como consecuencia damos nuevos resultados de localización para subconjuntos acotados. La metrizabilidad de los subconjuntos precompactos de esta clase de espacios, que nosotros establecemos, nos permite obtener algunas propiedades relacionadas con el problema general de la retractividad en límites inductivos, planteado por K. Floret. Extendemos algunos resultados de H. Neus al caso de espacios duales métricos, y construimos un espacio (DF) con la propiedad de convergencia de Mackey que es sucesionalmente completo y que no es cuasi-completo.

1. INTRODUCCION Y NOTACIONES

Este artículo está dedicado al estudio de propiedades de localización y retractividad en límites inductivos generalizados. Las referencias básicas para conceptos y notación son [11] y [12]. Todos los espacios localmente convexos (brevemente ELC) considerados aquí son separados y están definidos sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de los números reales o complejos.

---

* Este trabajo constituye parte de la tesis doctoral del autor, que ha sido realizada bajo la dirección del profesor M. Valdivia.

Sea E un espacio vectorial y $\{E_n : n = 1, 2, ...\}$ una sucesión creciente de subespacios de E que cubren. Para cada entero positivo n, sea A_n un conjunto absolutamente convexo y absorbente en E_n y $\mathcal{C}_n$ una topología en E_n tal que $E_n\ [\mathcal{C}_n]$ es un ELC. Si $\mathcal{C}$ es una topología localmente convexa y separada en E, diremos que $(E_n\ [\mathcal{C}_n], A_n)$ es un sistema inductivo generalizado en $E\ [\mathcal{C}]$ si:

a) $2A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, 2, ...$
b) $\mathcal{C}_{n+1}$ induce en A_n una topología más gruesa que la inducida por $\mathcal{C}_n$, $n = 1, 2, ...$
c) $\mathcal{C}$ induce en A_n una topología más gruesa que la inducida por $\mathcal{C}_n$, $n = 1, 2, ...$

Si la topología localmente convexa más fina en E, $\mathcal{C}$, que induce en cada A_n una topología más gruesa que la inducida por $\mathcal{C}_n$ es separada, diremos que $E\ [\mathcal{C}]$ es el límite inductivo generalizado de la sucesión de pares $(E_n\ [\mathcal{C}_n], A_n)$ y escribiremos

$$E\ [\mathcal{C}] = \varinjlim\ (E_n\ [\mathcal{C}_n], A_n).$$

Referencias para las propiedades básicas de las topologías límite inductivo generalizado son [8] y [19].

Las topologías límite inductivo generalizado fueron introducidas en [8] por Garling, y las técnicas que ellas aportan han sido utilizadas en [8], [15], [16] y [19], entre otros, para el estudio de diversos temas: espacios pseudo-2-normados, propiedades de tonelación en ELC, propiedades de retractividad y convergencia de Mackey, etc. En [8], Garling muestra que gran parte de las propiedades de las que gozan las topologías límite inductivo son compartidas por las topologías límite inductivo generalizado. En lo que respecta a la localización de acotados, el resultado fundamental que se conoce para topologías límite inductivo generalizado es el correspondiente al teorema de Banach-Dieudonné, válido para límites inductivos estrictos con escalones cerrados. En este artículo damos un teorema de localización para aplicaciones lineales continuas con valores en un espacio

$$E\ [\mathcal{C}] = \varinjlim\ (E_n\ [\mathcal{C}_n], A_n),$$

donde cada A_n es $\mathcal{C}_n$-metrizable y completo, que extiende un teorema de Grothendieck para espacios (LF), [10], y que nos permite dar nuevas propiedades de localización de conjuntos acotados. En este orden de ideas y asumiendo únicamente que los conjuntos A_n son metrizables, obtenemos la equivalencia entre las siguientes propiedades:

(i) *Toda sucesión nula es* $E\ [\mathcal{C}]$ *está contenida en algún* A_m *y es nula* $E_m\ [\mathcal{C}_m]$.
(ii) *Todo precompacto* A *de* $E\ [\mathcal{C}]$ *está contenido en algún* A_m, *y en* A *coinciden las topologías inducidas por* $\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{C}_m$.

La equivalencia entre estas propiedades está basada en el hecho de que los conjuntos precompactos de esta clase de límites inductivos generalizados son metrizables. Esta propiedad de metrizabilidad está relacionada con un problema sobre angelicidad en espacios (LF) propuesto por Floret en [5] y que ha sido resuelta afirmativamente por J. Orihuela y el autor en [2]. Los resultados establecidos en este artículo se complementan con distintos ejemplos de espacios con topologías límite inductivo generalizado sobre conjuntos metrizables que no son el límite inductivo de una sucesión de ELC metrizables, y con algunas aplicaciones al estudio de las propiedades de convergencia de Mackey en espacios duales métricos que extienden resultados previos de [13] y [14].

2. PROPIEDADES DE LOCALIZACION EN LIMITES INDUCTIVOS GENERALIZADOS

A lo largo de este artículo, si

$$E[\mathscr{C}] = \varinjlim (E_n [\mathscr{C}_n], A_n)$$

es un límite inductivo generalizado y n es un entero positivo, denotaremos por $E_n [S_n]$ el límite inductivo generalizado de la sucesión de pares $\{(E_n [\mathscr{C}_n], 2^k A_n): k = 1, 2, \ldots\}$. La sucesión $\{E_n [S_n]: n = 1, 2, \ldots\}$ es un sistema inductivo de ELC y $E[\mathscr{C}]$ es su límite inductivo, [8] y [19, página 149]. En este epígrafe estudiaremos límites inductivos generalizados donde cada A_n es $\mathscr{C}_n$-metrizable y completo. En este caso vamos a describir una buena estructura para la gráfica cerrada en $E[\mathscr{C}]$. En concreto, probaremos que $E[\mathscr{C}]$ es un espacio cuasi-LB de Valdivia [20]: un espacio $E[\mathscr{C}]$ se dice que es cuasi-LB, si existe una familia $\{A_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ de discos de Banach de $E[\mathscr{C}]$ tal que

a) $\cup \{A_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\} = E$.
b) Para $\alpha = (a_n)$ y $\beta = (b_n)$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ con $a_n \leqslant b_n$, $n = 1, 2, \ldots$ (brevemente $\alpha \leqslant \beta$), se tiene $A_\alpha \subset A_\beta$.

Una tal familia de discos de Banach se llama una cuasi-LB-representación de $E[\mathscr{C}]$, [20].

Teorema 1.– Sea $E[\nu]$ *un* ELC *y* A *un conjunto absolutamente convexo y absorbente en* E. *Si* A *es* ν-*metrizable y completo, entonces el espacio*

$$E[\mathscr{C}] = \varinjlim (E[\nu], 2^n A)$$

*es un espacio cuasi-*LB *completo.*

Demostración.— La topología $\mathscr{C}$ es la topología localmente convexa más fina en E que induce en cada $2^n A$ la misma topología que ν. Cada subconjunto $2^n A$ es ν-completo, y así el criterio de completitud de Raikov, [19, pág. 155], nos permite asegurar que $E[\mathscr{C}]$ es completo. Vamos a construir una cuasi-LB-representación de $E[\mathscr{C}]$. Sea $\{V_n : n = 1, 2, ...\}$ una sucesión decreciente de entornos del origen absolutamente convexos y cerrados en $E[\nu]$, tal que $\{V_n \cap A: n = 1, 2, ...\}$ sea un sistema fundamental de entornos del origen en A con la topología inducida por ν. Para $\beta = (b_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, definimos:

$$B: = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} b_n \cdot V_n \right) \cap A,$$

que es claramente absolutamente convexo y cerrado en $E[\mathscr{C}]$. De otra parte, B es $\mathscr{C}$-acotado. Efectivamente, si U es un entorno del origen en $E[\mathscr{C}]$, como $\mathscr{C}$ induce en A la misma topología que ν, existe un entero positivo n tal que $V_n \cap A$ está contenido en U, y por lo tanto tenemos que $B \subset (b_n \cdot V_n) \cap A \subset b_n \cdot U$. La completitud de $E[\mathscr{C}]$ nos da que B es un disco de Banach en este espacio. Si para cada $\alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definimos

$$A_\alpha : = a_1 \left[\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \cdot V_n \right) \cap A \right],$$

entonces la familia de discos de Banach $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ nos da una cuasi-LB-representación de $E[\mathscr{C}]$.

Q.E.D.

Corolario 1.1.— Si $E[\mathscr{C}] = \varinjlim (E_n [\mathscr{C}_n], A_n)$ *es un límite inductivo generalizado donde cada* A_n *es* $\mathscr{C}_n$*-metrizable y completo, entonces* $E[\mathscr{C}]$ *es un espacio cuasi-*LB.

Demostración.— Para cada entero positivo n, el teorema anterior nos asegura que $E_n [S_n]$ es un espacio cuasi-LB. Como

$$E[\mathscr{C}] = \varinjlim E_n [S_n],$$

las propiedades de estabilidad de los espacios cuasi-LB, [20], nos dan que $E[\mathscr{C}]$ es un espacio cuasi-LB.

Q.E.D.

Nuestras propiedades de localización están basadas en un teorema de localización para aplicaciones lineales continuas con valores en espacios cuasi-LB, que ha sido obtenido por Valdivia en [20]. Este autor establece su teorema de localización del siguiente modo:

Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ una cuasi-LB-representación de $E[\mathscr{T}]$ y para cada $\alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ pongamos

$$A_{a_1 a_2 \ldots a_m} = \cup \{A_\beta : \beta = (b_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}},\ b_j = a_j,\ j = 1, 2, \ldots, m\}$$

y $E_{(a_1 a_2 \ldots a_m)}$ el espacio vectorial generado por $A_{a_1 a_2 \ldots a_m}$, $m = 1, 2, \ldots$

Sea $E_\alpha : = \cap \{E_{(a_1 a_2 \ldots a_m)} : m = 1, 2, \ldots\}$ dotado de la topología metrizable que tiene por base de entornos del origen la familia

$$\{E_\alpha \cap \frac{1}{m} A_{a_1 a_2 \ldots a_m} : m = 1, 2, \ldots\}.$$

Esta topología en E_α es más fina que la inducida por $\mathscr{T}$, y con ella E_α es un espacio de Fréchet. La familia $\{E_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ construida de esta forma se llama familia de espacios de Fréchet asociada a la cuasi-LB-representación $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$.

Teorema 2 (Valdivia [20]).– *Sea E un* ELC *con una cuasi-*LB-*representación* $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ *y sea* $\{E_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ *la familia de espacios de Fréchet asociada. Si T es una aplicación lineal y continua de un espacio estrictamente tonelado F en E, entonces existe* $\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *tal que* $T(F) \subset E_\beta$ *y* $T: F \to E_\beta$ *es continua.*

La clase de los espacios estrictamente tonelados ha sido introducida y estudiada en [20], como una clase adecuada de espacios dominio para el teorema de la gráfica cerrada, cuando los espacios cuasi-LB se toman como espacios rango. La clase de los espacios estrictamente tonelados es estrictamente más amplia que la clase de los espacios totalmente tonelados, y es una subclase de la clase de los espacios Baire-Like, [20].

El siguiente teorema extiende el teorema *B*), pág. 17 de A. Grothendieck [10]:

Teorema 3.– Sea $E[\mathscr{T}] = \lim\limits_{\rightarrow} (E_n[\mathscr{T}_n], A_n)$ *un límite inductivo generalizado donde cada* A_n *es* $\mathscr{T}_n$*-metrizable y completo y sea* $E[\mathscr{T}] = \lim\limits_{\rightarrow} E_n[S_n]$ *el límite de* ELC *asociado. Si T es una aplicación lineal y continua de un espacio estrictamente tonelado F en E, entonces existe un entero positivo k tal que* $T(F) \subset E_k$ *y* $T: F \to E_k[S_k]$ *es continua.*

Demostración.– Para cada entero positivo n, el espacio $E_n[S_n]$ es un espacio cuasi-LB después del teorema 1. Sea $\{A_\alpha^n : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ una cuasi-LB-representación de $E_n[S_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ y para $\alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ escribamos

$$A_\alpha = A_\alpha^1 + \ldots + A_\alpha^{a_1}.$$

La familia $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es una cuasi-LB-representación de $E[\mathscr{C}]$. Dado $\alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, si $\gamma = (c_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es tal que $c_1 = a_1$, entonces A_γ es un disco de Banach en $E_{a_1}[S_{a_1}]$ puesto que es una suma finita de discos de Banach en este espacio. En consecuencia, la sucesión

$$A_{a_1} \supset A_{a_1 a_2} \supset \ldots \supset A_{a_1 a_2 \ldots a_n} \supset \ldots$$

de subconjuntos de E_{a_1} tiene la siguiente propiedad: para cada entorno del origen U en $E_{a_1}[S_{a_1}]$ existe un número $\rho > 0$ y un entorno positivo n tal que $A_{a_1 a_2 \ldots a_n}$ está contenido en $\rho \cdot U$. De no ser así, para algún entorno del origen U en $E_{a_1}[S_{a_1}]$, podemos determinar una sucesión

$$\alpha_r = (a_{r,n}) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \qquad \text{con } a_{r,n} = a_n, \quad n = 1, 2, \ldots, r,$$

tal que

$$A_{\alpha_r} \not\subset rU, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Para cada entero positivo n, sea b_n el máximo de $\{a_{r,n} : r = 1, 2, \ldots\}$, que es obviamente finito con $b_1 = a_1$. Si ponemos $\beta = (b_n)$, entonces

$$A_{\alpha_r} \subset A_\beta, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

y por tanto

$$A_\beta \not\subset rU, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

lo cual contradice que A_β sea acotado en $E_{a_1}[S_{a_1}]$. Hemos probado así que E_α está contenido en E_{a_1} y que la inclusión $E_\alpha \hookrightarrow E_{a_1}[A_{a_1}]$ es continua. La demostración termina con una aplicación del teorema 2.

Q.E.D.

Corolario 1.3.– Sea $E[\mathscr{C}] = \varinjlim (E_n[\mathscr{C}_n], A_n)$ *un límite inductivo generalizado donde cada* A_n *es* $\mathscr{C}_n$*-metrizable y completo. Si* A *es un disco de Banach en* $E[\mathscr{C}]$, *entonces existe un entero positivo* n *tal que* A *está contenido en* A_n *y* A *es acotado en* $E_n[\mathscr{C}_n]$.

Demostración.– El espacio vectorial generado por A, E_A, con la norma asociada al funcional de Minkowski de A es un espacio de Banach, y en particular es un espacio estrictamente tonelado. La inmersión $E_A \hookrightarrow E[\mathscr{C}]$ es continua, y por lo tanto el teorema 3 nos da un entero positivo m tal que E_A está contenido en E_m siendo la inmersión $E_A \hookrightarrow E_m[S_m]$ continua. Así, A es un subconjunto acotado del límite inductivo

$$E_m[S_m] = \varinjlim_k (E_m[\mathscr{C}_m], 2^k A_m)$$

y el teorema 2 de [8] nos asegura que A es acotado en E_m $[\mathscr{C}_m]$ y que está contenido en algún $2^k A_m$. Se obtiene ahora inmediatamente que $A \subset A_{m+k}$ y que A es acotado en E_{m+k} $[\mathscr{C}_{m+k}]$.

Q.E.D.

Recordemos que un límite inductivo $E\ [\mathscr{C}] = \underset{\rightarrow}{\lim} E_n\ [\mathscr{C}_n]$ se dice regular, si cada subconjunto acotado de $E\ [\mathscr{C}]$ está contenido en algún $E_n\ [\mathscr{C}_n]$ y es acotado en este espacio.

Corolario 2.3.– Sea $E\ [\mathscr{C}] = \underset{\rightarrow}{\lim} (E_n\ [\mathscr{C}_n], A_n)$ *un límite inductivo generalizado donde cada* A_n *es* $\mathscr{C}_n$*-metrizable y completo, y sea* $E\ [\mathscr{C}] = \underset{\rightarrow}{\lim} E_n\ [S_n]$ *el límite inductivo de* ELC *asociado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $E\ [\mathscr{C}]$ *es localmente completo.*
(ii) *Dado un acotado* A *de* $E\ [\mathscr{C}]$ *existe un entero positivo n, tal que* A *está contenido en* A_n *y* A *es acotado en* $E_n\ [\mathscr{C}_n]$.
(iii) *El límite inductivo* $E\ [\mathscr{C}] = \underset{\rightarrow}{\lim} E_n\ [S_n]$ *es regular.*

Demostración.– (i) $\Rightarrow$ (ii) Se sigue del corolario 1.3, ya que si $E\ [\mathscr{C}]$ es localmente completo sus subconjuntos acotados están contenidos en discos de Banach. (ii) $\Rightarrow$ (iii) Evidente. (iii) $\Rightarrow$ (i) Se obtiene fácilmente teniendo en cuenta que cada $E_n\ [S_n]$ es completo después del teorema 1.

Q.E.D.

El corolario anterior es la extensión, para límites inductivos generalizados, de la bien conocida caracterización de los espacios (LF) regulares.

3. METRIZABILIDAD DE SUBCONJUNTOS PRECOMPACTOS

M. Valdivia, [19, pág. 167], ha probado que los subconjuntos compactos de un ELC E son metrizables cuando su dual topológico E', dotado de la topología de convergencia uniforme sobre compactos, $\rho(E', E)$, es un espacio quasi-Suslin. Un espacio topológico E se dice que es un espacio quasi-Suslin, [19], si existe un espacio Polaco X y una aplicación T de X en todas las partes de E, $\mathscr{P}(E)$, tal que:

a) $\cup \{Tx: x \in X\} = E$.
b) Si (x_n) es una sucesión en X que converge hacia x y si z_n pertenece a Tx_n para cada entero positivo n, entonces (z_n) tiene un punto de acumulación en E que pertenece a Tx.

Para un espacio localmente convexo $E\ [\mathscr{C}]$, denotaremos por $\hat{E}\ [\hat{\mathscr{C}}]$ su compleción.

Teorema 4.– Si $E\,[\mathscr{C}] = \lim\limits_{\rightarrow} (E_n\,[\mathscr{C}_n], A_n)$ *es un límite inductivo generalizado donde cada* A_n *es* $\mathscr{C}_n$*-metrizable, entonces* $E'\,[\rho\,(E', \hat{E})]$ *es un espacio quasi-Suslin.*

Demostración.– Dado un entero positivo n, sea $\{U^n_m: m = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión decreciente de entornos del origen absolutamente convexos en $E_n\,[\mathscr{C}_n]$, tal que $\{A_n \cap U^n_m: m = 1, 2, \ldots\}$ es base de entornos del origen en A_n con la topología inducida por $\mathscr{C}_n$. Consideremos el producto topológico $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de copias de $\mathbb{N}$ con la topología discreta. Definamos la aplicación $T: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathscr{P}(E')$ dada por

$$T\alpha := (\Gamma_{n=1}^{\infty} A_n \cap U^n_{a_n})^0, \qquad \alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}},$$

donde las polares están tomadas en la dualidad $\langle E, E'\rangle$. La proposición 1 de [8] nos asegura que $T\alpha$ es $\mathscr{C}$-equicontinuo, y por tanto $\rho\,(E', \hat{E})$-compacto después de [12] §21.6.(3). Se tiene que

$$\cup\,\{T\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\} = E',$$

y obviamente, $T\alpha \subset T\beta$ si $\alpha \leqslant \beta$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Esta última relación nos va a permitir probar la propiedad (b) de los espacios quasi-Suslin. Efectivamente, sea

$$\{\alpha_j = (a^j_n): j = 1, 2, \ldots\}$$

una sucesión en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ que converge hacia $\alpha = (a_n)$, y sea

$$x'_j \in T\alpha_j, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Para cada entero positivo n, sea

$$b_n = \text{máx}\ \{a^j_n: j = 1, 2, \ldots\},$$

que es claramente finito, y pongamos $\beta = (b_n)$. Es obvio que

$$\beta \geqslant \alpha_j, \quad j = 1, 2, \ldots$$

y por tanto, la sucesión

$$\{x'_j: j = 1, 2, \ldots\}$$

está contenida en $T\beta$ y así tiene un punto de acumulación x' en $E'\,[\rho\,(E', \hat{E})]$. De otra parte, podemos seleccionar una sucesión $j_1 < j_2 < \ldots < j_n < \ldots$ de enteros positivos tal que $a^j_k = a_k$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, si $j \geqslant j_n$, $n = 1, 2, \ldots$ De aquí se concluye que

$$x'_j \in (A_n \cap U^n_{a_n})^0 \quad \text{si} \quad j \geqslant j_n \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots$$

y podemos concluir que

$$x' \in T\alpha,$$

con lo que termina la demostración.

Q.E.D.

Un espacio topológico Hausdorff S se dice que es angélico, [6], si la clausura de cada conjunto relativamente numerablemente compacto A de S es compacta, y consiste precisamente de los límites de sucesiones de A.

Corolario 1.4.– Si $E\ [\mathscr{C}] = \varinjlim\ (E_n\ [\mathscr{C}_n],\ A_n)$ *es un límite inductivo generalizado donde cada* A_n *es* $\mathscr{C}_n$*-metrizable, entonces los subconjuntos precompactos de* $E\ [\mathscr{C}]$ *son metrizables y separables. En particular,* $E\ [\mathscr{C}]$ *es un espacio angélico.*

Demostración.– La metrizabilidad de los subconjuntos precompactos se sigue del teorema 4 junto con la proposición 27, [19, pág. 67]. Cada conjunto relativamente numerablemente compacto es precompacto, y así la metrizabilidad de los precompactos nos da que $E\ [\mathscr{C}]$ es un espacio angélico.

Q.E.D.

En 7.6 de [5] K. Floret pregunta: ¿Qué espacios (LF) son angélicos? En [2], J. Orihuela y el autor han establecido que todos los límites inductivos numerables de ELC metrizables son espacios angélicos. El corolario 1.4 lleva esta respuesta positiva al caso estrictamente más general de los límites inductivos generalizados.

Nota 2.4.– En la prueba del teorema 4 se ha establecido que de hecho $E'\ [\rho\ (E', \hat{E})]$ es un espacio K-Suslin (K-analítico), ver [19, pág. 59]. El teorema 4 es una buena herramienta para describir estructuras de espacios K-Suslin en ciertos espacios duales. Por ejemplo:

Si $E\ [\mathscr{C}]$ *es un espacio* (DF) *con acotados metrizables, entonces* $E'\ [\rho\ (E', \hat{E})]$ *es K-Suslin.*

Basta tener en cuenta §29.3.(2) de [12] y después utilizar el teorema 4.

4. ALGUNOS EJEMPLOS

Vamos a dar ahora algunos ejemplos de límites inductivos generalizados obtenidos a través de sucesiones de conjuntos metrizables que no son el límite inductivo de una sucesión de ELC metrizables.

Ejemplo A.– Sea S un espacio topológico completamente regular. Denotemos por C_b (S) el espacio de todas las aplicaciones continuas y acotadas de S en el cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $\| \|_\infty$ la norma del supremo en C_b (S), i.e., para $f \in C_b$ (S), $\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)|: x \in S\}$, y sea B la bola unidad cerrada del espacio de Banach $(C_b$ (S), $\| \|_\infty)$. Si T_k es la topología compacta abierta de C_b (S), la topología estricta T_t, [7], se define como la topología localmente convexa más fina en C_b (S) que coincide con T_k sobre B. Esto significa que:

$$C_b\,(S)\,[T_t] = \underset{\rightarrow}{\text{lím}}\,(C_b\,(S)\,[T_k],\, 2^n B)$$

Tomando S hemicompacto no compacto, T_k induce una topología metrizable en cada $2^n B$, y sin embargo C_b (S) $[T_t]$ no es el límite inductivo de ninguna sucesión de ELC metrizables puesto que no es casi-tonelado, [11] 13.6.(5).

Ejemplo B.– Sea E $[\mathscr{C}]$ un espacio de Fréchet separable y sea (V_n) un sistema fundamental de entornos del origen absolutamente convexos en E $[\mathscr{C}]$ con $2V_{n+1} \subset V_n$, $n = 2, 3, \ldots$ Por el teorema de Banach-Dieudonné, [12] §21.10.(1), la topología ρ (E', E) en E' es la topología más fina que coincide con σ (E', E) en los conjuntos equicontinuos de E'. Así tenemos que

$$E'\,[\rho\,(E', E)] = \underset{\rightarrow}{\text{lím}}\,(E'_n\,[\sigma\,(E', E)],\, V_n^0)$$

donde las polares están calculadas en la dualidad $\langle E, E' \rangle$ y E'_n denota el espacio vectorial generado por V_n^0 en E'. Obviamente V_n^0 es σ (E', E)-metrizable y completo. De otra parte, E' $[\rho$ $(E', E)]$ es casi-tonelado si, y sólo si, E $[\mathscr{C}]$ es un espacio Frechét-Montel. Así, tomando E $[\mathscr{C}]$ un espacio de Fréchet separable que no sea Fréchet-Montel, el límite inductivo generalizado E' $[\rho$ $(E', E)]$ no puede ser el límite inductivo de ninguna sucesión de ELC metrizables.

Ejemplo C.– Sea E $[\mathscr{C}] = \underset{\rightarrow}{\text{lím}}\, E_n$ $[\mathscr{C}_n]$ un límite inductivo de una sucesión creciente de espacios de Banach, i.e., un espacio (LB), donde suponemos que para cada entero positivo n el dual fuerte E'_n $[\beta\,(E'_n, E_n)]$ es separable. Sea $\| \|_n$ la norma de E_n $[\mathscr{C}_n]$ y sea (ρ_n) una sucesión de números positivos tales que si $B_n = \{x \in E_n : \|x\|_n \leq \rho_n\}$, entonces $2B_n \subset B_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ Es claro que en el límite inductivo generalizado

$$E\,[\nu] = \underset{\rightarrow}{\text{lím}}\,(E_n\,[\sigma\,(E_n, E'_n)],\, B_n)$$

cada conjunto B_n es σ (E_n, E'_n)-metrizable. Para el límite inductivo de ELC asociado E $[\nu] = \underset{\rightarrow}{\text{lím}}\, E_n$ $[S_n]$, tenemos que S_n es la topología de convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de E'_n $[\beta(E'_n, E_n)]$, [12] §21.7.(1). En particular tenemos que $\sigma(E, E') \leqslant \nu \leqslant \mathscr{C}$.

El corolario 1.4 nos asegura que los subconjuntos ν-precompactos de E son ν-metrizables. Remarquemos que cada conjunto acotado de E_n $[\mathscr{C}_n]$ es precompacto en $E[\nu]$. Así, si suponemos que el límite inductivo

$$E[\mathscr{C}] = \varinjlim E_n [\mathscr{C}_n]$$

es regular, entonces cada conjunto acotado de $E[\mathscr{C}]$ es $\sigma(E, E')$-metrizable, puesto que ν y $\sigma(E, E')$ coinciden en los conjuntos ν-precompactos, [12, 28.5 (2)].

Por supuesto que la topología $\mathscr{C}$ es en general estrictamente más fina que ν, y por lo tanto $E[\mathscr{C}]$ no puede ser en estos casos el límite inductivo de una sucesión de ELC metrizables puesto que si ν es la topología de Mackey del par dual $\langle E, E'\rangle$ entonces $\mathscr{C} = \nu$. El espacio (LB) no completo de Köthe nos proporciona un ejemplo en el que $\nu \leqslant \mathscr{C}$. Efectivamente, sea

$$E[\mathscr{C}] = \varinjlim [\mathscr{C}_n]$$

el espacio (LB) construido en [12] §31.6. Si suponemos que $\mathscr{C} = \nu$, en cada conjunto acotado de E_1 $[\mathscr{C}_1]$ la topología $\mathscr{C}$ induce una topología más gruesa que $\sigma(E_1, E'_1)$, y así en particular cada sucesión $\sigma(E_1, E'_1)$-convergente en E_1 debe ser también $\mathscr{C}$-convergente. Esta última afirmación no es cierta. Usando la descripción de E'_1, se ve fácilmente que la sucesión (x_n) en E_1 dada por $x_n = (x^n_{ik})$ donde

$$x^n_{ik} = \begin{cases} n & \text{para } i = 1 \text{ y } k = n. \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

es $\sigma(E_1, E'_1)$-convergente al origen pero no es $\mathscr{C}$-convergente.

5. PROPIEDADES DE RETRACTIVIDAD Y DE CONVERGENCIA DE MACKEY

Las nociones de regularidad y retractividad en límites inductivos han sido estudiadas por Bierstedt y Meise [1], K. Floret [4], H. Neus [18] y M. Valdivia [19], entre otros. En el trabajo de H. Neus se recogen satisfactorias equivalencias entre las distintas nociones de retractividad y regularidad en límites inductivos de sucesiones crecientes de espacios normados. Como comenta K. Floret [5], es deseable estudiar esta clase de propiedades en casos más generales que los estudiados por Neus. En esta línea, estudiaremos ahora propiedades de retractividad y regularidad en el contexto de los límites inductivos generalizados. Nuestros resultados están basados en las propiedades estudiadas en las secciones precedentes.

En el siguiente teorema $\mathscr{B}$ será una familia saturada de conjuntos acotados en $E[\mathscr{C}]$ que contiene a las sucesiones nulas.

Teorema 5.– Sea $(E_n\ [\mathscr{C}_n], A_n)$ *un sistema inductivo generalizado en* $E\ [\mathscr{C}]$. *Supongamos que cada* A_n *es* $\mathscr{C}_n$*-metrizable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Cada conjunto en* $\mathscr{B}$ *es* $\mathscr{C}$*-metrizable y para cada sucesión nula* (x_n) *en* $E\ [\mathscr{C}]$, *existe un entero positivo m tal que* (x_n) *está contenida en* A_m *y* (x_n) *es una sucesión nula en* $E_m\ [\mathscr{C}_m]$.

(ii) *Para cada conjunto A en* $\mathscr{B}$ *existe un entero positivo m tal que A está contenido en* A_m *y las topologías* $\mathscr{C}$ *y* $\mathscr{C}_m$ *coinciden sobre A.*

Demostración.– Es claro que (i) se sigue de (ii). Vamos a ver cómo (ii) se sigue de (i). En primer lugar, de la condición (i) se sigue que para cada conjunto acotado A en $E\ [\mathscr{C}]$ existe un entero positivo n tal que $A \subset 2^n A_n \subset A_{2n}$. Efectivamente, supongamos que esta afirmación no es cierta. Entonces existe una sucesión (x_n) en A tal que

$$x_n \notin 2^n A_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Así, la sucesión nula

$$\left(\frac{1}{2^n}\, x_n\right)$$

no está contenida en ningún A_n y llegamos a una contradicción con (i). Dado A en $\mathscr{B}$, tomemos B su envoltura absolutamente convexa que está de nuevo en $\mathscr{B}$. Existe un entero positivo p tal que B está contenido en A_p. Sea Φ el filtro de los entornos del origen en B para la topología inducida por $\mathscr{C}$. Φ es un filtro de base numerable puesto que B es $\mathscr{C}$-metrizable. Sea Φ_n el filtro de los entornos del origen en B para la topología inducida por $\mathscr{C}_n$. La condición (i) implica que cada sucesión en B que converge según Φ es convergente según un cierto Φ_m, $m \geqslant p$. Aplicando el lema de los filtros de Grothendieck, [9, pág. 107, lema 7] obtenemos que Φ es más fino que algún Φ_m, $m \geqslant p$. De aquí se sigue que $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}_m$ coinciden sobre B y a posteriori sobre A.

Q.E.D.

Corolario 1.5.– Sea $E\ [\mathscr{C}] = \varinjlim\ (E_n\ [\mathscr{C}_n], A_n)$ *un límite inductivo generalizado donde cada* A_n *es* $\mathscr{C}_n$*-metrizable. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Cada sucesión nula* (x_n) *en* $E\ [\mathscr{C}]$ *está contenida en algún* A_m *y* (x_n) *es nula en* $E_m\ [\mathscr{C}_m]$.

(ii) *Para cada subconjunto sucesionalmente compacto A de* $E\ [\mathscr{C}]$, *existe un entero positivo m tal que* $A \subset A_m$ *y A es sucesionalmente compacto en* $E_m\ [\mathscr{C}_m]$.

(iii) *Para cada conjunto compacto A de* $E\ [\mathscr{C}]$, *existe un entero positivo m tal que* $A \subset A_m$ *y A es compacto en* $E_m\ [\mathscr{C}_m]$.

(iv) *Para cada subconjunto precompacto A de $E[\mathscr{C}]$, existe un entero positivo m tal que $A \subset A_m$ y las topologías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}_m$ coinciden sobre A.*

Demostración.— Después del corolario 1.4, es claro que los subconjuntos sucesionalmente compactos y los subconjuntos compactos de $E[\mathscr{C}]$ son los mismos. De esta forma las siguientes implicaciones son obvias: (iv) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i). Para terminar la demostración es suficiente ver que (i) $\Rightarrow$ (iv). De nuevo, por el corolario 1.4, la familia $\mathscr{F}$ de todos los subconjuntos precompactos de $E[\mathscr{C}]$ está formada por conjuntos metrizables, y así, una aplicación del teorema 5 termina la prueba.

Q.E.D.

Cuando tomamos $A_n = E_n$ en el corolario anterior, obtenemos un límite inductivo de espacios localmente convexos metrizables. En este caso las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv) significan que

$$E[\mathscr{C}] = \lim_{\rightarrow} E_n [\mathscr{C}_n]$$

es sucesionalmente retractivo, [4], sucesionalmente compacto regular, [13], compacto regular, [1], y precompactamente retractivo, [2] respectivamente. La equivalencia entre estas condiciones para ELC metrizables ha sido obtenida por J. Orihuela y el autor en [2]. En el caso general que estamos estudiando, si cada A_n es cerrado en $E_n[\mathscr{C}_n]$ las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv) son respectivamente equivalentes a las de ser el límite inductivo de ELC asociado,

$$E[\mathscr{C}] = \lim_{\rightarrow} E_n [S_n],$$

sucesionalmente retractivo, sucesionalmente compacto regular, compacto regular y precompactamente retractivo.

Si $E[\mathscr{C}]$ es un ELC con una sucesión fundamental de acotados $\{B_n : n = 1, 2, \ldots\}$, que tomamos creciente y formada por conjuntos absolutamente convexos, tenemos de forma natural un sistema inductivo en $E[\mathscr{C}]$: tomar $E_n = E_{B_n}$ dotado de la topología $\mathscr{C}_n$ asociada al funcional de Minkowski de B_n en E_n. $(E_n[\mathscr{C}_n])$ es un sistema inductivo en $E[\mathscr{C}]$ y ahora las propiedades de retractividad son precisamente las propiedades de convergencia de Mackey en $E[\mathscr{C}]$, [9]. Recordemos que un espacio dual métrico es un espacio cuasi-ℓ_∞-tonelado, [11], con una sucesión fundamental de conjuntos acotados.

Corolario 2.5.— En un espacio dual métrico $E[\mathscr{C}]$ las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *$E[\mathscr{C}]$ tiene la propiedad de convergencia de Mackey para sucesiones.*

(ii) *Para cada subconjunto precompacto B de $E\,[\mathscr{C}]$, existe un conjunto absolutamente convexo y acotado A de E tal que B está contenido en A y las topologías de E_A y de E coinciden en B.*

Demostración.– Se sigue directamente del teorema 5 utilizando la metrizabilidad de los subconjuntos precompactos de $E\,[\mathscr{C}]$ establecida por Valdivia en [18].

Q.E.D.

El corolario anterior ha sido obtenido por Pfister en [14] en el caso de espacios (DF). En [13], H. Neus ha probado la equivalencia de (i) con la propiedad estricta de convergencia de Mackey, ver [9] para definiciones, cuando $E\,[\mathscr{C}]$ es un espacio (DF) bornológico. Además, si $E\,[\mathscr{C}]$ es localmente completo y satisface (i) en el corolario anterior, entonces $E\,[\mathscr{C}]$ es completo, [13].

Para sistemas inductivos generalizados tenemos la siguiente:

Proposición 6.– Sea $(E_n\,[\mathscr{C}_n], A_n)$ un sistema inductivo generalizado en un ELC $E\,[\mathscr{C}]$. *Supongamos que cada A_n es $\mathscr{C}_n$-sucesionalmente completo. Si cada sucesión nula (x_n) en $E\,[\mathscr{C}]$ está contenida en algún A_n siendo nula en $E_n\,[\mathscr{C}_n]$, entonces $E\,[\mathscr{C}]$ es sucesionalmente completo.*

Demostración.– Es suficiente usar el lema de los filtros de Grothendieck, [9], como Floret hace en [4] 5.2 y 5.3, siendo en este caso Φ_n el filtro de los entornos del origen de A_n para la topología inducida por $\mathscr{C}_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Q.E.D.

Corolario 1.6.– Cada espacio dual métrico que es localmente completo y que tiene la propiedad de convergencia de Mackey para sucesiones es sucesionalmente completo.

Los corolarios 2.5 y 1.6 para espacios duales métricos no son mejorables hasta el punto de obtener en este caso las equivalencias que H. Neus establece en [13] para espacio (DF) bornológicos. Efectivamente, en [17] M. Valdivia construye un espacio (DF) con la propiedad de convergencia de Mackey para sucesiones y que no tiene la propiedad estricta de convergencia de Mackey. Damos a continuación un ejemplo que nos muestra que el corolario 1.6 no es mejorable ni tan siquiera en la categoría de los espacios (DF).

Ejemplo 7.– Un espacio (DF) *con la propiedad de convergencia de Mackey para sucesiones que es sucesionalmente completo y no es cuasicompleto.*

Sea $E\,[\mathscr{C}]$ un espacio de Banach no débil-realcompacto (por ejemplo, l^∞/c_0, [3]). Sea ν la topología en E de convergencia uniforme sobre los conjuntos acotados y numerables de E' $[\sigma(E', E)]$. La topología ν es compatible con la dualidad $\langle E, E' \rangle$ y el espacio $E[\nu]$ es un espacio (DF) con las mismas sucesiones convergentes que $E[\mathscr{C}]$. $E[\nu]$ tiene la propiedad de convergencia de Mackey para sucesiones y es sucesionalmente completo. Vamos a ver que $E[\nu]$ no es completo. Si $E[\nu]$ fuese completo cada forma $u \in E'^*$, $\sigma(E', E)$-continua en los conjuntos acotados y separables de E' $[\sigma(E', E)]$ sería un elemento de E después del teorema de completitud de Grothendieck, [12] §21.9.(4). En particular cada forma $u \in E'^*$, $\sigma(E', E)$-continua en los subespacios cerrados y separables de E' $[\sigma(E', E)]$ será un elemento $u \in E$. Un teorema de Corson, [3], asegura que en este caso E debe ser débil-realcompacto, y así llegamos a una contradicción no pudiendo ser por tanto $E[\nu]$ completo (ni siquiera cuasi-completo por [12] §29.5.(3)). Por supuesto que $E[\nu]$ no tiene la propiedad de convergencia de Mackey.

BIBLIOGRAFIA

[1] K. BIERSTEDT y R. MEISE: *Bemerkungen über die Approximationseigenschaft Lokalkonvexer Funktioneräume.* Math. Ann. 209 (1974), 99-107.

[2] B. CASALES Y J. ORIHUELA: *Metrizability of precompact subsets in (LF)-spaces.* Proc. Edimb. Math. Soc. 103A, 293-299 (1986).

[3] H. H. CORSON: *The weak topology of a Banach space.* Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), 1-15.

[4] K. FLORET: *Folgenretraktive Sequenzen lokalkonvexer Räume.* J. Reine Angew. Math. 259 (1973), 65-85.

[5] K. FLORET: *Some aspects of the theory of locally convex inductive limits.* North-Holland, Math. Studies 38 (1979), 205-237.

[6] K. FLORET: *Weakly compact sets.* Lecture Notes in Math. 801 (1980), Springer-Verlag.

[7] D. H. FREMLIN, D. J. H. GARLING y R. G. HAYDON: *Bounded measures on topological spaces.* Proc. London Math. Soc. (3) 25 (1972), 115-136.

[8] D. J. H. GARLING: *A generalized form on inductive limit topology for vector spaces.* Proc. London Math. Soc. 14 (1964), 1-28.

[9] A. GROTHENDIECK: *Sur les espaces (F) et (DF).* Summa Brasil. 3,6 (1954), 57-122.

[10] A. GROTHENDIECK: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires.* Mem. Amer. Mat. Soc. No 16 (1961).

[11] H. JARCHOW: *Locally convex spaces.* B. G. Teubner-Stuttgart (1981).

[12] G. KOTHE: *Topological vector spaces I.* Berlin-Heidelberg-New York (1969), Springer-Verlag.

[13] H. NEUS: *Uber die Regularitätsbegriffe induktiver lokalkonvexer Sequenzen.* Manuscripta Math. 25 (1978), 135-145.

[14] H. PFISTER: *Bemerkungen zum Satz über die Separabilität der Fréchet-Montel Räume.* Archiv der Math. 28 (1976), 86-92.

[15] W. ROELCKE: *On the finest locally convex topology agreeing with a given topology on a sequenze of absolutely convex sets.* Math. Ann. 198 (1972), 57-80.

[16] W. RUESS: *Generalized inductive limit topologies and barrelledness properties.* Pacific Journal Math. Vol. 63, No 2 (1976), 499-516.

[17] M. VALDIVIA: *On quasi-normable echelon spaces.* Proc. Edinburgh Math. Soc. (1981), 73-80.

[18] M. VALDIVIA: *On Semi-Suslin spaces and dual metric spaces.* North-Holland. Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory. Ed. J. A. Barroso (1982), 445-459.

[19] M. VALDIVIA: *Topics in locally convex spaces.* North-Holland. Mathematics Studies 67 (1982).

[20] M. VALDIVIA: *Quasi-LB-spaces.* J. London Math. Soc. (2), 35, 149-168 (1987).

Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de Murcia