# *Resultados de F. Cano sobre una conjetura de Thom**

Por J. M. Aroca Hernández Ros

*Departamento de Algebra y Geometría. Universidad de Valladolid*

**Abstract**

Thom's conjecture: «If $F$ is a singular foliation over a complex analytic manifold $X$ of dimension $n$, for any point $P \in X$ there is a separatrix of $F$», has been proved by Camacho-Sad [1] for $n = 2$ and is false for $n > 2$. Recently $F$. Cano [2] [3] has proved that the conjecture becomes true for $n = 3$ under the aditional hypotesis of non dicriticalness for $F$.

Sea $X$ una variedad analítica compleja de haz estructural $O_X$ y de dimensión pura $n$, designaremos con $\Omega_X^* = \bigoplus_{k \geqslant 0} \Omega_X^k$ el haz de $O_X$-álgebras de gérmenes de formas diferenciales en $X$ y con $d$ a la diferencial exterior. Llamaremos divisor con cruzamientos normales de $X$ a un subespacio analítico cerrado de codimensión 1, $E$, definido por el ideal $I(E)$ y tal que existen subespacios no singulares conexos $E_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, de codimensión 1 en $X$ verificando que

$$I(E) = I(E_1) \ldots I(E_n)$$

y que si $P \in X$ y $P \in \bigcup_{i \in A} E_i$, existe un sistema de parámetros de $O_{X,P}$, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $E_i$ está definido en $P$ por $(x_i)O_{X,P}$. Es decir, la ecuación local de $E$ en $P$ es $\prod_{i \in A} x_i = 0$.

Sea $\Theta_X$ el haz tangente a $X$ y $\Theta_X[E]$ el haz de derivaciones logarítmicas de $X$ a lo largo de $E$. El apareamiento canónico de $\Omega_X^1$ y $\Theta_X$ se extiende al haz de funciones meromorfas $K_X$ y permite construir el $O_X$-módulo $\Omega_X[-E]$ de formas adaptadas a $E$ por la propiedad

$$\Omega_{X,P}[-E] = \{w \in \Omega_{X,P}^1 \oplus K_{X,P} \mid \langle w, \Theta_{X,P}[E]\rangle \subset O_{X,P}\}$$

$\Omega_{X,P}[-E]$ es un $O_{X,P}$—múdulo libre de base $\left\{\frac{dx_i}{x_i}\right\}_{i \in A} \cup \{dx_i\}_{i \notin A}$. Una foliación adaptada a $E$ es entonces un $O_X$-submódulo libre $F$ de rango 1 de $\Omega_{X,P}[-E]$ que verifica $F \wedge dF = 0$ y se puede definir el orden de $F$ adaptado a $E$ en $P$ por:

$$\mu(F, E, P) = \min(\nu_p(a_i)), \text{ si } F_P \text{ generado en } P \text{ por } w = \sum_{i \in A} a_i \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{j \in A} a_j dx_j.$$

Diremos que $P$ es singular para $F$ si $\mu(F, E, P) \geqslant 1$ y representaremos el conjunto de puntos singulares de $F$ relativos a $E$ por Sing $(F, E)$; este conjunto admite una estructura natural de subespacio analítico cerrado y reducido en $X$.

---

* Presentada en la Sección Científica del 2 de marzo de 1988.

Si $E \subset E'$, $\Omega_X[-E'] \subset \Omega_X[-E]$ y toda foliación $F$ adaptada a $E$ induce, por intersección, una foliación adaptada a $E'$ que se llama adaptación de $F$ a $E'$. Asimismo el proceso de dividir localmente por el máximo común divisor de los coeficientes de $F$ se puede llevar a cabo de modo global, vía la doble ortogonalidad, en el apareamiento descrito más arriba y recibe el nombre de saturación.

Si $E = \phi$ se obtiene el concepto usual de foliación singular [5] y si, en el caso general, $P \notin E$, $f \in O_{X,P}$, y $w$ es un generador de $F_P$, diremos que $f$ es una integral primera de $F$ en $P$ si y sólo si $w \wedge df = 0$ y que es una integral primera fuerte si $df$ es un generador local de $F$ en $P$. Observemos que si $f$ es una integral primera fuerte de $F$ en $P$, en un entorno conveniente de $P$ el campo de hiperplanos dado por $F$, coincide con el de hiperplanos tangentes a $f = 0$ en los puntos regulares de esta hipersuperficie. El teorema clásico de Frobenius y esta observación garantizan la existencia en $U = X - E - \mathrm{Sing}\,(F, E)$ de una foliación en sentido clásico asociada a $F$.

Si $F$ tiene una integral primera en $P$ entonces, existe un entorno $W$ de $P$ tal que las hojas de $F$ intersecan cerrados en $W - \mathrm{Sing}\,(F, E)$ y existen sólo un número finito de hojas adherentes a $P$ (si codim Sing $(F, E) > 2$ se verifica también el recíproco [5]). Las integrales primeras describen por tanto las hojas de la foliación. Nuestro objetivo es definir un «elemento organizador» de estas hojas, más general que las integrales primeras y probar su existencia bajo unas condiciones muy poco restrictivas, cuando la dimensión del espacio ambiente es tres.

**Definición 1.** *Sea $f \in O_{X,P}$ no unidad, sea $F$ una foliación singular en $X$ generada localmente en $P$ por $w$, diremos que $f$ es una separatriz de $F$ en $P$ si y sólo si $\exists\, \eta \in \Omega^2_{X,P}$, $w \wedge df = f \cdot \eta$.*

La noción de separatriz es geométrica, en el sentido de que cualquier ecuación reducida del gérmen de hipersuperficie $f = 0$ es una separatriz si $f$ lo es, llamando $S$ a este gérmen, las componentes conexas de la parte no singular de $S - \mathrm{Sing}\,(F, E) - E$ son precisamente las hojas analíticas de la foliación que llegan a $P$. Existe una conjetura de R. Thom que establece que:

*Conjetura:* Si F es una foliación singular en $X$ y $P \in X$, existe una separatriz de $F$ en $P$.

Si $\dim X = 2$, Camacho y Sad probaron en 1982 que $F$ admite una separatriz en cualquier punto $P$, la base de su trabajo fue el teorema de Seidemberg de reducción de singularidades de las ecuaciones $Adx + Bdy = 0$ y el hecho de que en dimensión 2 los conceptos de separatriz y curva integral coinciden. Sin embargo, para dimensión 3, la conjetura de Thom es falsa como observa Jouanolou citando el ejemplo de Darboux

$$w = (x^m z - y^{m+1})\,dx + (y^m x - z^{m+1})\,dy + (z^{my} - x^{m+1})\,dx \quad ; \quad m > 2 \qquad [1]$$

Se precisa por tanto imponer a $w$ una condición adicional que garantice la existencia de separatrices y esta condición es precisamente la condición clásica de «no dicriticidad».

Dada la forma diferencial $w = \Sigma\, a_i\, dx_i \in \Omega^1_{X,P}$, con $r = \min\,(v_P(a_i))$ y $A_i$ parte homogénea de grado $r$ de $a_i$, se dice que $w$ es dicrítica si cumple $\sum_{i=1}^{n} x_i A_i = 0$.

Claramente la forma [1] cumple esta condición, y si $n = 2$ esta condición significa que para casi todas las direcciones $d$ en $P$ existe una curva integral por $P$ tangente a $d$, y por tanto, asegura la existencia de infinitas separatrices. En dimensiones superiores, como prueba el ejemplo de Darboux, puede significar la no existencia de las mismas. Esta condición se puede establecer de modo global con ayuda de la siguiente definición.

**Definición 2.** *Si $F$ es una foliación en $X$ adaptada a $E$ e $Y \subset X$ es un subespacio liso cerrado de $X$ transversal a $E$, se llama transformada estricta de $F$ en la explosión $\pi : X' \to X$ de centro $Y$, al resultado de elevar $F$ a $X'$ vía $\pi$, adaptarla al divisor $E' = E \cup \pi^{-1}(Y)$ y saturar a continuación.*

Entonces la propiedad $\Sigma\, x_i A_i = 0$ equivale a que si se explota el punto $P$ en $X$, el divisor excepcional no es una hoja del transformado estricto de la foliación. Esta condición no basta para garantizar la existencia de separatrices y debe ser extendida a toda sucesión razonable de explosiones de la forma siguiente:

**Definición 3.** *Se dice que la foliación singular $F$ es dicrítica en $P \in X$ si y solo si existe una sucesión de explosiones permitidas $X = X_0 \xleftarrow{\pi_1} X_1 \longleftarrow \cdots \xleftarrow{\pi_N} X_N$ tal que algún punto del divisor excepcional de $\pi_N$ yace sobre $P$ y el divisor excepcional de $\pi_N$ no es una hoja del transformado estricto de $F$ a lo largo del proceso.*

Con estas notaciones F. Cano describe un sistema de invariantes que complementan $\mu(F, E, P)$ y prueba que:

**Teorema 1** [2]. *Si $F$ es una foliación singular en $X$, existe una sucesión de explosiones permitidas para $F$ de divisor excepcional final $E_N$ y espacio final $X_N$ de modo que si $F_N$ es el transformado estricto de $F$ al final del proceso $\mu(F_N E_N P) \leqslant 1, \forall\, P \in X_N$.*

Clasificando entonces las formas finales de las foliaciones en este proceso F. Cano [3] prueba para todas ellas la existencia de separatrices que descienden a lo largo del proceso para dar lugar a separatrices de la foliación inicial, de modo que se prueba que

**Teorema 2** [3]. *Si $F$ es una foliación singular no dicrítica sobre $X$ con dim $X = 3$ y $P \in X$ existe una separatriz de $X$ en $P$.*

## BIBLIOGRAFIA


[1] CAMACHO-SAD: «Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields». *Ann of Math* 115 (1982).

[2] CANO, F.: «Foliaciones singulares dicríticas». Premio de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales (no publicado).

[3] CANO, F.: «La conjetura de Thom para dimensión 3» (preprint).

[4] CANO, F.: «Desingularization strategies for a three dimensional vector field» *Lect. Not. in Math.*, 1259, Springer-Verlag, 1987.

[5] CERVAU-MATTEI: «Formes integrables holomorphes singulieres» Asterisque 97, 1982.