*Introducción a la geometría algebraica de trivariedades proyectivas complejas con singularidades ordinarias**

Por J. FINAT

Departamento de Algebra, Geometría y Topología. Facultad de Ciencias. Universidad de Valladolid

Abstract

Let Y be a threefold with ordinary singularities in $\mathbb{P}^4$. For such a class of threefolds Y there exists a non-singular model of Y dominating normalization of Y and blowing-up of the Jacobian Ideal. This last allows to me to compute explicitely the degrees of polar classes in terms of degrees of Segre classes, which appear expressed in terms of projective invariants. On the other hand, one can also to prove some results about generic position of points belonging to X which project on multiple locuses of Y. Such results will give independent conditions for adjoints and hence will determine type Castelnuovo bounds for X.

1. GEOMETRIA DE LA DESINGULARIZACION

Sea Y una trivariedad en $\mathbb{P}^4$ con singularidades ordinarias. Dicho tipo de singularidades son las que puede presentar la proyección de una trivariedad no-singular X en $\mathbb{P}^7$ con centro en un 2-plano en posición general respecto a X. Explícitamente el lugar singular de Y está compuesto por una superficie doble que contiene a una curva triple con un número finito de puntos cuádruples como únicas singularidades y a una curva no singular de puntos pinzados que cortan a la curva de puntos triples en un número finito de puntos estacionarios. Para simplificar supondremos que el cuerpo base es $\mathbb{C}$.

De forma similar al análisis realizado para superficies en $\mathbb{P}^3$ con singularidades ordinarias, podemos plantear aquí el estudio de fórmulas de puntos múltiples y cotas de Castelnuovo para su modelo no singular. En ambos casos es necesario contar con una descripción explícita de la desingularización de la hipersuperficie en el espacio proyectivo. El primer resultado importante en esta línea es el siguiente:

Teorema 1. ($[\mathrm{Fi}]_2$). *Si $v : Z \to Y$ es la normalización de una trivariedad algebraica compleja en $\mathbb{P}^4$ con singularidades ordinarias y $\pi : Y^{\sim} \to Y$ es la explosión respecto al ideal jacobiano, entonces*

$$F^3(\Omega_Y^1) \cdot O_Z = \mathscr{C} \cdot F^0(\Omega_{Z/Y}^1)$$

donde $\mathscr{C}$ es el conductor de la normalización $F^0\Omega_{Z/Y}^1$ es el ideal de ramificación de la normalización de Y.

---

* Presentada en la Sesión Científica del 2 de marzo de 1988.

Como consecuencia de este teorema se obtiene la existencia de un modelo no-singular de Y que domina simultáneamente $Y^{\sim}$ y Z. La demostración es esencialmente la realizada por R. Piene en $[P]_1$ para superficies con singularidades ordinarias, salvo para los puntos estacionarios, situación en la que no se disponía de una descripción de π.

Los términos que aparecen en la igualdad anterior entre Ideales permiten relacionar sistemas lineales de divisores determinados sobre Y por diferentes tipos de adjuntas. Recordemos que el Ideal de un tipo de variedades adjuntas se describe como el conductor de un morfismo birracional $f\colon Z \to Y$, es decir, como el anulador del conúcleo de $O_Y \to f_* O_Z$. En la práctica, dicho morfismo f es habitualmente la normalización, una desingularización o la transformación de Nash. En el primer caso, si Y es una hipersuperficie se obtienen las llamadas subadjuntas. Por el contrario, si f es la transformación de Nash y dicha transformación de Nash se expresa como la explosión del Ideal Jacobiano, aparecen las variedades polares como caso particular de las adjuntas. Según esta descripción las relaciones entre los diferentes tipos de adjuntas proceden de relaciones entre los conúcleos de las aplicaciones entre los Ideales antes mencionados.

Sea Y un divisor inmerso mediante i en una $(n + 1)$-variedad no singular T. Podemos describir el haz dualizante de Y de forma no intrínseca como el haz de línea $\omega_Y = K_T \otimes_{O_Y} O_Y(Y)$. Si $f\colon Z \to Y$ es una desingularización de Y, entonces se verifica ([A + K]) que $f_*\Omega_Z^n = \mathrm{Hom}_{O_Y}(f_* O_Z, \omega_Y)$. Si $\mathscr{C}_f$ denota el conductor de f, obtenemos $\omega_Y \otimes \mathscr{C}_f = \omega_Y \otimes \mathrm{Hom}_{O_Y}(f_* O_Z, O_Y) = f_*\Omega_Z^n$. Tomando imágenes inversas y utilizando la descripción dada para ω_Y se llega al Teorema Fundamental de Adjunción:

Teorema 2. (Altman-Kleiman). *Con la notación anterior, si $g = i \cdot f$ y $\tilde{\mathscr{C}}_f$ denota el O_Z-módulo asociado a $\mathscr{C}_f$ es decir, tal que $f_*\tilde{\mathscr{C}}_f = \mathscr{C}_f$ entonces $\Omega_Z = g^* O_T(Y) \otimes g^*\Omega_T^{n+1} \otimes \tilde{\mathscr{C}}_f$.*

Calculando la primera clase de Chern en los dos miembros de la expresión anterior Kleiman (Oslo, 1976) obtuvo la primera fórmula general que da la clase $[D]$ del lugar doble como $[D] = g^* g_* [Z] - c_1(v)$ donde v es el fibrado normal correspondiente a $g\colon Z \to T$. En particular, si $T = \mathbb{P}^3$ e Y es una superficie con singularidades ordinarias, la última relación nos da $[D] = \mu_0 h - [4h - c_1(Z)] = (\mu_0 - 4)h + c_1(Z)$, donde h es la clase de una sección hiperplana en Z. El corte con otra sección hiperplana permite calcular el grado de la curva dobre D en términos del grado Y y del género de D (fórmula de Clebsch).

2. CLASES POLARES PARA UNA TRIVARIEDAD PROYECTIVA COMPLEJA CON SINGULARIDADES ORDINARIAS

En $[\mathrm{Fi}]_1$ he utilizado el segundo método para describir las clases polares de una trivariedad en $\mathbb{P}^4$ con singularidades ordinarias en términos de los grados de las clases de Segre. Dichos grados se calculan explícitamente a su vez en términos de invariantes proyectivos del lugar singular de la trivariedad.

La explosión $\pi\colon Y^{\sim} \to Y$ del ideal jacobiano permite definir las clases polares $[M_k]$ de la variedad Y en términos de las clases de Chern-MacPherson de un fibrado vectorial $\tilde{P}$ que extiende el haz $\mathscr{P}_Y^1(O_Y(1))$ de partes principales de orden 1 (y representa el cierre en la grasmaniana de los espacios cotangentes proyectivizados). Se obtiene así $[M_k] = \pi_*(c_k(\tilde{P}) \cap [Y]))$ donde $\cap$ denota el cap-producto. Denotemos por $\bar{J}$: $= F^r(\Omega_Y) \otimes \bar{O}_Y$. el ideal jacobiano explotado. La j-ésima clase de Segre de Y se define como $s_j(J, Y)$: $= -\pi_*(c_1(\bar{J})^j \cap [\tilde{Y}]) \in A_{n-j}(Y)$. Con la notación anterior, la k-ésima clase polar de una hipersuperficie $Y \subset \mathbb{P}^n$ de grado d está dada por la Fórmula de Plücker generalizada:

Teorema 3. ($[\mathrm{P}]_2$). $[M_k] = (d-1)^k c_1(\mathscr{L})^k \cap [Y] - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i}(d-1)^i c_1(\mathscr{L})^i \cap s_{k-i}(J, Y)$.

En particular, si hacemos $h = c_1(\mathscr{L})$ y $s_i = s_i(J, Y)$ para una trivariedad en $\mathbb{P}^4$ se tienen expresiones de $[M_k]$ en términos de las clases de Segre s_i: $[M_1] = (d-1)h - s_2$; $[M_2] = (d-1)^2h^2 - 2(d-1)\,h \cap s_2 - s_1$; $[M_3] = (d-1)^3h^3 - 3(d-1)^2h^2 \cap s_2 - 3(d-1)h \cap s_1 - s_0$.

Tomando grados en la primera se obtiene $\mu_1 = (\mu_0 - 1)\mu_0 - 2d_0$. En la segunda expresión basta calcular $\deg(s_1)$ aplicando la teoría de intersección residual de Fulton y Laksov se obtiene la expresión $2\deg s_1 = 2d_1 - 4d_0(\mu_0 - 1) + 5u_0$. Sustituyendo en la expresión que da el grado μ_2 de $[M_2]$ se demuestra la fórmula clásica de Roth $\mu_2 = \mu_0(\mu_0 - 1) - 2d_1 + 5u_0$. Por último, en la tercera expresión basta calcular $\deg(s_0)$. El cálculo de este grado es muy engorroso y requiere la aplicación de la Teoría de intersección de Fulton-MacPherson, así como la descripción explícita de una desingularización de Y (para los detalles véase $[\mathrm{Fi}]_1$).

3. SISTEMAS LINEALES COMPLETOS

Grosso modo, las adjuntas determinan la geometría de una hipersuperficie singular Y cuando la elevación a un modelo no singular X de Y de los divisores que pasan por Sing(Y) como multiplicidad apropiada, determinan sobre X sistemas lineales completos de divisores. Actualmente este tipo de resultados se expresan como anulación de la cohomología a valores en una potencia de grado suficientemente alto del haz de las secciones hiperplanas por el haz de ideales de X (véase por ejemplo [Pn]). Para obtener resultados de este tipo es preciso demostrar argumentos de posición general para los puntos que se proyectan sobre Sing Y.

Las fibras que yacen sobre un abierto denso de los lugares k-múltiples de una proyección genérica de una n-variedad no singular X en un espacio $\mathbb{P}^N$ (con $N \geqslant 2n + 1$), se pueden analizar en términos de ciclos de Schubert de símbolo $(\overbrace{N-n, \ldots, N-n}^{k-1})$. Como consecuencia se obtiene en particular que un espacio k-secante $(k-1)$-dimensional en general no es $(k+1)$-secante. Para el lugar de ramificación se demuestra un resultado similar en el sentido de que los 3-espacios tangentes a la trivariedad X en los puntos de la curva de ramificación no están contenidos en un hiperplano (para detalles véase $[\mathrm{Fi}]_3$).

BIBLIOGRAFIA

[A + K] ALTMAN & KLEIMAN: *Introduction to Grothendieck duality theory*. Springer-Verlag, LNM 146 (1970).

$[\mathrm{Fi}]_1$ FINAT: «Clases polares para una Threefold con Singularidades Ordinarias». Actas XI Jornadas Hispano-Lusas, Badajoz, 1986.

[Fi]$_2$ FINAT: «Transformaciones Birracionales en Threefolds con Singularidades Ordinarias» (preprint).

[Fi]$_3$ FINAT: «Sistemas lineales completos para trivariedades lisas en $\mathbb{P}^7$» (en prensa).

[F] FULTON: *Intersection Theory»*. Springer-Verlag, 1984.

[P]$_1$ PIENE: «Some formulas for a surface in $\mathbb{P}^3$». *Algebraic Geometry*, LNM 687, pág. 196-235.

[P]$_2$ PIENE: «Polar classes of singular varieties». *Ann. Sc. E.N.S.*, *11*, pág. 247-276 (1978).

[Pn] PINKHAM: «A Castelnuovo bound for smooth surfaces». *Invent. Math. 83*, pág. 321-332 (1986).