*Exactitud de complejos y sistemas de ecuaciones**

Por TOMÁS SÁNCHEZ GIRALDA

Departamento de Algebra, Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid

Résumé

Au cours du XIX^e siècle, commence l'étude systématique des syzygies d'un module. Un théorème fondamental de Hilbert [3] (dit «théorème des syzygies») prouve la finitude des chaînes de syzygies des modules sur les anneaux de polynômes et, en particulier, permet donner la structure de leurs ideaux de dimensión projective 1. Plus récemment, L. Burch [2] traite tel problème de manière plus générale. L'objet de cette Note est de faire le rapport entre ces résultats, les critères d'Auslander-Buchsbaum-Hochster sur l'exactitude d'un complexe et la résolution des systèmes d'equations lineaires ser un anneau commutatif à élément unité.

El estudio realizado por D. Hilbert [3] sobre ideales de un anillo de polinomios le lleva a su clasificación en función de sus dimensiones homológicas, una vez probado que las mismas son finitas. Más recientemente, y en un contexto más general, es L. Burch [2] quien realiza un estudio de los ideales de dimensión homológica finita en un anillo local. Así, se tiene el siguiente:

Teorema 1. (Hilbert-Burch). Sea $I \neq (0)$ un ideal de R que tiene una resolución libre finita de longitud uno. Entonces existe una matriz A $(n+1) \times n$ de elementos de R y un no divisor de cero r de R tal que es $I = r \cdot \mathscr{U}_n(A)$ y $Gr_R(\mathscr{U}_n(\mathrm{A})) \geqslant 2$ donde $\mathscr{U}_n(\mathrm{A})$ es el ideal determinantal de orden n de la matriz A y $Gr_R(\mathscr{U}_n(A))$ su grado verdadero.

Este resultado posee un inverso que asegura que si A es una matriz $(n+1) \times n$ de elementos de R y si r es un no divisor de cero entonces el ideal $I = r \cdot \mathscr{U}_n(A)$ posee una resolución libre finita de longitud uno siempre que sea mayor o igual a dos el grado verdadero del n-ésimo ideal determinantal de la matriz de partida. Señalemos que tal resolución de I se puede fijar de forma efectiva considerando la sucesión:

$$0 \longrightarrow R^n \xrightarrow{f_2} R^{n+1} \xrightarrow{f_1} R \xrightarrow{e} R/I \longrightarrow 0, \tag{1}$$

donde f_2 está definido, respecto de las bases canónicas, por $f_2(\underline{u}_i) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ji}\underline{v}_j$, $1 \leqslant i \leqslant n$, f_1 transforma el j-ésimo vector $\underline{v}_j$ de la base canónica de R^{n+1} en $(-1)^j r \cdot \det(A_j)$, donde A_j es la submatriz de A obtenida al suprimir su j-ésima fila, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, y e es el homomorfismo natural. En las condiciones anteriores la sucesión (1) es exacta de donde una resolución libre para el R-módulo cíclico R/I y que permite fijar una resolución libre finita de longitud uno para I. Así, es posible describir la

* Presentada en la Sesión Científica del 2 de marzo de 1988.

estructura de los ideales de un anillo que poseen una resolución libre finita de longitud menor o igual a uno. Concretamente, si tal longitud es cero el ideal en cuestión es principal generado por un no divisor de cero del anillo. Si la longitud es uno el Teorema de Hilbert-Burch afirma que el ideal es producto de un no divisor de cero por un ideal determinantal y en particular si tal ideal es perfecto, o lo que es lo mismo si su altura es dos, entonces según un resultado de Krull el no divisor de cero resulta una unidad y en consecuencia el ideal es determinantal.

Que la sucesión (1) sea exacta resulta como una particularización del siguiente:

Teorema 2. *(Auslander-Buchsbaum-Hochster). Sea,*

$$F: 0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} F_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0,$$

con $n \geqslant 1$, *un complejo de R-módulos libres de rango finito. Entonces, la condición necesaria y suficiente para que F sea un complejo exacto es que se satisfagan las condiciones siguientes:*

i) $Gr_R\{\mathscr{U}(f_i)\} \geqslant i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
ii) $\text{rango}_R(f_n) = \text{rango}_R(F_n)$.
iii) $\text{rango}_R(f_{i+1}) + \text{rango}_R(f_i) = \text{rango}_R(F_i)$, $1 \leqslant i < n$,

donde $\mathscr{U}(f_i)$ *corresponde al mayor ideal determinantal no nulo de* f_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *y* $\text{rango}_R\,(f_i)$ *es el mayor entero tal que el correspondiente ideal determinantal de la matriz que define* f_i *es nulo,* $1 \leqslant i \leqslant n$.

Algunos casos particulares de este resultado figuran en la literatura con anterioridad a su demostración. Así, es N. H. McCoy [6] quien prueba que si se considera un sistema homogéneo de ecuaciones lineales $(S): A\,\underline{x} = \underline{0}$, donde A es una matriz $m \times n$ de elementos del anillo R, la condición necesaria y suficiente para que (S) sólo posea la solución trivial es que el anulador del n-ésimo ideal determinantal de A sea nulo o equivalentemente que sea $Gr_R(\mathscr{U}_n(A)) \geqslant 1$. Este resultado da la condición para que el complejo de R-módulos libres

$$F: 0 \longrightarrow R^n \xrightarrow{f_1} R^m,$$

sea exacto siendo f_1 la transformación lineal asociada a la matriz A. Asimismo, si se considera el sistema de ecuaciones lineales $(S): A\underline{x} = \underline{b}$, donde A es una matriz $m \times n$ de elementos de R con $m \geqslant n + 1$ y estable de rango n, se puede considerar el complejo:

$$F: 0 \longrightarrow R^n \xrightarrow{f_2} R^m \xrightarrow{f_1} R^p, \tag{2}$$

donde $p = \binom{m}{n+1}$, f_2 está definido, respecto de las bases canónicas, por la matriz A y establecida una ordenación en los $(n + 1) \times (n + 1)$ menores de una matriz $m \times (n + 1)$, f_1 transforma el vector $\underline{v}_i$ de la base canónica en la correspondiente p-upla de menores $(n + 1) \times (n + 1)$ de la matriz $(A|\underline{v}_i)$.

Como (2) es un complejo resulta que es $\text{rango}_R(A) + \text{rango}_R(B) \leqslant m$, donde B es la matriz de f_1 respecto de las bases canónicas (véase [7]) y en consecuencia

$\text{rango}_R(B) \leqslant m - n$. Por otra parte, la matriz B está formada por menores $n \times n$ de la matriz A y se tiene que es posible fijar un menor $(m - n) \times (\mathrm{m} - \mathrm{n})$ de B no nulo siendo (S) sobredeterminado (esto es $\mathcal{U}_n(A) \neq (0)$), siempre que sea mayor o igual a uno el grado verdadero del n-ésimo ideal determinantal de A(esto es $Gr_R\{\mathcal{U}_n(A)\} \geqslant 1$) pues entonces resulta mayor o igual a uno el grado verdadero del ideal $\mathcal{U}_{m-n}(B)$ y en particular resulta $\text{rango}_R(B) = m - n$.

Teorema 3. Sea (S): $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema de ecuaciones lineales sobre el anillo conmutativo y con uno R, siendo A una matriz $m \times n$ de elementos de R, $m \geqslant n + 1$. Entonces, para el complejo (2) anterior, las condiciones siguientes son equivalentes:

4.1. F es un complejo exacto.
4.2. $Gr_R\{\mathcal{U}_n(A)\} \geqslant 2$.

De hecho, D. W. Sharpe [8] prueba que siendo tal grado verdadero mayor o igual a dos y si todos los menores de orden $(n + 1) \times (n + 1)$ de la matriz ampliada del sistema $(A \mid \underline{b})$ son nulos, entonces el sistema de ecuaciones (S) tiene solución necesariamente única. Este resultado es consecuencia del anterior pues $\mathcal{U}_{n+1}(A|\underline{b}) = (0)$ afirma que b se transforma en el vector por f_1 y por tanto siendo F exacto será (S) entonces compatible. La unicidad de la solución es consecuencia de que no hay en estas condiciones soluciones del sistema homogeneo asociado a (S) distintas de la trivial. Es interesante observar que bajo la hipótesis que el grado verdadero de $\mathcal{U}_n(A)$ sea mayor o igual a dos, en estos tipos de sistemas la condición $\mathcal{U}_{n+1}(A|b) = (0)$ resulta equivalente a la condición de igualdad de ideales determinantales $\mathcal{U}_i(A) = \mathcal{U}_i(A|\underline{b})$, $i \geqslant 0$. En general, esta última condición resulta equivalente a la compatibilidad de un sistema en cierto tipo de anillos que además quedan caracterizados por tal hecho. No incluiremos aquí más detalles en este sentido remitiendo al lector interesado a ver [4] y [5].

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI, N.: *Elements of Mathematics, Commutative Algebra*. English translation, Herman-Cie-Addison Wesley, Pub. Co. París, Reading, Mass 1972.

[2] BURCH, L.: «On ideals of finite homological dimension in local rings». *Proc. Cam. Phil. Soc. 64* (1968).

[3] HILBERT, D.: «Uber die Theorie der algebraischen Formen». *Math. Ann., 36* (1980).

[4] HERMIDA, J. A.: «Dominios íntegramente cerrados y sistemas de ecuaciones lineales». VII. Congreso G.M.E.L. Coimbra, vol. 1 págs. 211-215, 1986.

[5] HERMIDA, J. A., y SANCHEZ GIRALDA, T. «Linear equations over commutative rings and determinantal ideals». *J. Algebra., 99* (1986).

[6] MCCOY, N.H.: *«Rings and ideals». Carus. Math. Mon. 8 M.A.A.*, 1948.

[7] NORTHCOTT, D. G.: «Finite free resolutions». Cambridge Univ. Press., 1976.

[8] SHARPE, D. W.: «Grade and the theory of linear equations». *Lin. Alg. App. 19* (1977).