Comunicaciones a la Academia

presentadas en las Sesiones Científicas celebradas en las fechas que se indican

*Operadores en espacios de sucesiones vectoriales**

Por FERNANDO BOMBAL

Departamento de Análisis Matemático. Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid

Abstract

A representation theorem for bounded linear operators on spaces $(\Sigma \oplus E_n)_p$ in terms of induced operators on each E_n is obtained, and some particular classes of operators are characterized in this way. Applications to the study of the structure of $(\Sigma \oplus E_n)_p$ are given.

Si (E_n) es una sucesión de espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y $1 \leqslant p < \infty$, escribiremos, como es usual

$$(\Sigma \oplus E_n)_p = \left\{ x = (x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} E_n : \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

dotado de la norma de espacio de Banach $x \mapsto \|x\|_p$. Análogamente se definen $(\Sigma \oplus E_n)_0$ y $(\Sigma \oplus E_n)_\infty$. Para cada $m \in N$, denotaremos por I_m la inyección canónica $E_m \ni y \mapsto (0, \ldots, 0, \overset{(m}{y}, 0, \ldots) \in (\Sigma \oplus E_n)$ y por π_m la proyección canónica $(\Sigma \oplus E_n)_p \ni x = (x_n) \mapsto x_m \in E_m$. Si F es otro espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$ y T es un operador (e.d., una aplicación lineal continua) de $(\Sigma \oplus E_n)_p$ en F, para cada $n \in N$, $T_n = T \cdot I_n$ es un operador de E_n en F. En esta nota se caracterizan los operadores sobre $(\Sigma \oplus E_n)_p$ en términos de los T_n y se dan algunas aplicaciones al estudio de la estructura de este espacio.

Recordemos que el dual de $(\Sigma \oplus F_n)_p$ se identifica canónicamente a $(\Sigma \oplus E_n^*)_q$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, mediante la isometría

$$(\Sigma \oplus E_n^*)_q \ni x^* = (x_n^*) \mapsto T_{x^*} \in (\Sigma \oplus E_n)_p^* : T_{x^*}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n).$$

Con estas notaciones, es sencillo demostrar el siguiente

Teorema 1. *Sean $E_n (n \in \mathbb{N})$, F espacios de Banach y $1 \leqslant p < \infty$ ó $p = 0$. Todo operador T de $(\Sigma \oplus E_n)_p$ en F determina una única sucesión (T_n) de operadores, $T_n \in \mathscr{L}(E_n, F)$, tal que*

I. *Para cada $y^* \in F^*$, $(y^* T_n)_{n=1}^{\infty} = (T_n^*(y^*))_{n=1}^{\infty} \in (\Sigma \oplus E_n^*)_q$, siendo q el conjugado de p.*

Investigación realizada dentro del Proyecto 0338/84, subvencionado por la CAICYT.

* Presentada en la Sesión Científica del 3 de febrero de 1988.

II. *El conjunto* $\{(T_n^*(y^*))_{n=1}^{\infty} : \|y^*\| \leqslant 1\}$ *es acotado en* $(\Sigma \oplus E_n^*)_q$. *Además, se cumple*

III. $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x_n)$, *para todo* $x = (x_n) \in (\Sigma \oplus E_n)_p$.

IV. $\|T\| = \text{Sup}\, \{\|(T_n^*(y^*))\|_q : \|y^*\| \leqslant 1\}$.

Recíprocamente, si (T_n) es una sucesión de operadores, con $T_n \in \mathscr{L}(E_n, F)$ que cumple (I) y (II), la fórmula (III) define un operador de $(\Sigma \oplus E_n)_p$ en$F$ que satisface (IV).

Consideremos ahora algunas clases especiales de operadores: Si E y F son espacios de Banach, denotaremos por

$\mathscr{K}(E, F)$: los operadores compactos de E en F.
$\mathscr{W}(E, F)$: los operadores débilmente compactos de E en F.
$\mathscr{D}(E, F)$: los operadores de Dieudonné de E en F (e.d., que transforman sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes.)
$\mathscr{DP}(E, F)$: los operadores de Dunford-Pettis de E en F (e.d., que transforman sucesiones débilmente de Cauchy en convergentes en norma.
$\mathscr{U}(E, F)$: los operadores incondicionalmente convergentes de E en F (e.d. que transforman series incondicionalmente de Cauchy en series incondicionalmente convergentes en norma.)

Todas las clases anteriores son ideales cerrados de operadores en el sentido de Pietsch (véase [6]), y cumplen las siguientes relaciones

$$\mathscr{K}(E, F) \begin{array}{c} \subset \mathscr{W}(E, F) \subset \\ \subset \mathscr{DP}(E, F) \subset \end{array} \mathscr{D}(E, F) \subset \mathscr{U}(E, F) \subset \mathscr{L}(E, F),$$

y, en general, las inclusiones son estrictas. Obviamente, si un operador $T:(\Sigma \oplus E_n)_p \to F$ pertenece a algún ideal θ, todos los operadores (T_n) de su sucesión representante pertenecen al mismo ideal, pero al recíproco no es cierto en general, como muestra el ejemplo de la identidad en $(\Sigma \oplus E_n)_p$, cuando se toman $E_n \neq \{0\}$ de dimensión finita para todo n. Sin embargo, pueden obtenerse algunos resultados positivos:

Teorema 2. *Sean* $E_n (n \in \mathbb{N})$ *y* F *espacios de Banach,* $1 \leqslant p < \infty$ *y* T *un operador de* $(\Sigma \oplus E_n)_p$ *en* F, *con sucesión representante* (T_n). *Entonces se tiene:*

a) *Si* $p = 1$, T *es incondicionalmente convergente (resp., Dieudonné, Dunford-Pettis) si y sólo si lo es cada* T_n.
b) *Si* $p > 1$, T *es débilmente compacto si y sólo si lo es cada* T_n.

Como consecuencia, resulta inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 3. *Sea* θ *un ideal de operadores. Con las notaciones del teorema 2, se tiene:*

a) $\theta((\Sigma \oplus E_n)_1, F) \subset \psi((\Sigma \oplus E_n)_1, F)$ *si y sólo si* $\theta(E_n, F) \subset \psi(E_n, F)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(donde* $\psi = \mathscr{DP}$, $\mathscr{D}$, *o* $\mathscr{U}$*).*

b) *Para* $1 < p < \infty$, $\theta((\Sigma \oplus E_n)_p, F) \subset \mathcal{W}((\Sigma \oplus E_n)_p, F)$ *si y sólo si para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene* $\theta(E_n, F) \subset \mathcal{W}(E_n, F)$.

Cuando $p = 0$, se puede mejorar sensiblemente el teorema 2:

Teorema 4. *Sea* θ *un ideal cerrado de operadores contenido en* $\mathcal{U}$. *Sean* $E_n (n \in \mathbb{N})$, F *espacios de Banach y* T *un operador de* $(\Sigma \oplus E_n)_0$ *en* F, *con sucesión representante* (T_n). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $T \in \theta((\Sigma \oplus E_n)_0, F)$.

b) $T_n \in \theta(E_n, F)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim\limits_{m \to \infty} \left\| \sum\limits_{n=1}^{m} T_n \cdot \pi_n - T \right\| = 0$.

Corolario 5. *Sean* θ_1 *y* θ_2 *ideales cerrados de operadores, contenidos ambos en* $\mathcal{U}$. *Con las notaciones del teorema anterior, son equivalentes.*

a) $\theta_1((\Sigma \oplus E_n)_0, F) \subset \theta_2((\Sigma \oplus E_n)_0, F)$.

b) $\theta_1(E_n, F) \subset \theta_2(E_n, F)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Muchas importantes propiedades de un espacio de Banach E están (o pueden ser) definidas en términos del comportamiento de algunas clases de operadores sobre E. Así, por ejemplo, se dice que F tiene

— La propiedad de Dunford-Pettis (*PDP*) si $\mathcal{W}(E,.) \subset \mathcal{DP}(E,.)$.
— La propiedad de Dieudonné (*PD*) si $\mathcal{W}(E,.) = \mathcal{D}(E,.)$.
— La propiedad recíproca de Dunford-Pettis (*PRDP*) si $\mathcal{DP}(E,.) \subset \mathcal{W}(E,.)$.
— La propiedad de Grothendieck (*PG*) si $\mathcal{L}(E, c_0) = \mathcal{W}(E, c_0)$.
— La propiedad V de Pelczynski (*PV*) si $\mathcal{W}(E,.) = \mathcal{U}(E,.)$.

Las cuatro primeras propiedades fueron introducidas por Grothendieck en [3], y la última por Pelzcynski en [4]. Estas propiedades son invariantes por isomorfismo y se heredan por productos finitos y subespacios complementados. Por tanto, si $E = (\Sigma \oplus E_n)_p$ tiene alguna de las propiedades anteriores, lo mismo ocurre con cada E_n, que es isomorfo a un subespacio complementado de E. Los resultados anteriores permiten obtener información en sentido opuesto. La proposición siguiente, que resulta inmediatamente de los corolarios 5, 3(a) y 3(b), contiene los resultados de los capítulos 13 y 14 de [2], donde se da una demostración diferente:

Proposición 6. (Véase [2]).

a) $(\Sigma \oplus E_n)_0$ *tiene la PDP (resp., PRDP, PD, PV) si y sólo si cada* E_n *la tiene.*

b) $(\Sigma \oplus E_n)_1$ *tiene la PDP si y sólo si la tiene cada* E_n.

c) Si $1 < p < \infty$, $(\Sigma \oplus E_n)_p$ *tiene la PRDP (resp., PD, PV) si y sólo si cada* E_n *la tiene.*

La caracterización siguiente se deduce fácilmente de un resultado de Rosenthal (véase [7]): E contiene una copia complementada de l_1 si y sólo si $\mathcal{L}(E, l_1) \neq \mathcal{W}(E, l_1)$. Combinando este hecho con el corolario 3(b), obtenemos:

Proposición 7. *Sea* $1 < p < \infty$.

a) $(\Sigma \oplus E_n)_p$ *tiene la PG si y sólo si cada* E_n *la tiene.*

b) $(\Sigma \oplus E_n)_p$ *contiene una copia complementada de* l_1 *si y sólo si existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* E_n *contiene una copia complementada de* l_1.

Las siguientes caracterizaciones en términos de operadores son bien conocidas:

— E es un espacio de Schur si y sólo si $\mathscr{L}(E,.) = \mathscr{DP}(E,.)$.
— E es débilmente secuencialmente completo si y sólo si $\mathscr{L}(E,.) = \mathscr{D}(E,.)$.
— E no contiene una copia de c_0 si y sólo si $l(E,.) = \mathscr{U}(E,.)$.

(las dos primeras son inmediatas y la tercera se deduce del lema 1 de [5]). Por medio de ellas, como consecuencia del lema 3(a), obtenemos.

Proposición 8. *Sean $E_n (n \in \mathbb{N})$ espacios de Banach.*

a) $(\Sigma \oplus E_n)_1$ *es un espacio de Schur si y sólo si lo es cada E_n.*
b) $(\Sigma \oplus E_n)_1$ *es débilmente secuencialmente completo si y sólo si lo es cada E_n.*
c) $(\Sigma \oplus E_n)_1$ *contiene una copia de c_0 si y sólo si existe $n \in E_n$ tal que E_n contiene una copia de c_0.*

En el caso de $p = 0$, usando el teorema 4 podemos obtener:

Proposición 9. *Sea (E_n) una sucesión de espacios de Banach.*

a) *Si $(\Sigma \oplus E_n)_0$ contiene un subespacio complementado infinito dimensional y reflexivo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que E_n contiene un subespacio reflexivo de dimensión infinita.*
b) *Si $1 \leqslant p < \infty$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
   i) $(\Sigma \oplus E_n)_0$ *contiene una copia complementada de l_p.*
   ii) *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que E_n contiene una copia complementada de l_p.*

BIBLIOGRAFIA

[1] BOMBAL, F., y CEMBRANOS, P.: «Characterization of some classes of operators on spaces of vector-valued continuous functions». *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, *97*, págs. 137-145 (1985).
[2] CEMBRANOS, P.: «Algunas propiedades del espacio de Banach $C(K, E)$». *Tesis doctoral.* Publicación de la Universidad Complutense, 1982.
[3] GROTHENDIECK, A.: «Sur les applications linéaires faiblement compacts d'espaces du type $C(K)$». *Canad. J. of Math.*, *5*, págs. 129-173 (1953).
[4] PELCZYNSKI, A.: «Banach spaces in which every unconditionally converging is weakly compact». *Bull. Pol. Acad. Sci.*, *10* pág. 641-648 (1962).
[5] PELCZYNSKI, A.: «On strictly singular and strictly cosingular operators I». *Bull. Pol. Acad. Sci.*, *13*, págs. 31-36 (1965).
[6] PIETSCH, A.: *Operator Ideals.* Berlín, 1978.
[7] ROSENTHAL, H. P.: «On injective Banach spaces and the spaces $L^\infty(\mu)$ for finite measures». *Acta Math.*, *124*, pág. 205-248 (1970).