# *Derivación de medidas e integración vectorial bilineal*

Por Pedro Jimenez Guerra
*Académico correspondiente*

Conferencia pronunciada en esta Academia el 2 de diciembre de 1987.

El 1970 I. Dobrakov [10] desarrolla una teoría de integración de funciones valoradas en espacios de Banach respecto a medidas valoradas en un espacio de operadores (entre espacios de Banach) generalizando así el caso contablemente aditivo de la conocida integral bilineal introducida por R. G. Bartle en 1956. Posteriormente, diversos autores han intentado extender estos resultados al caso de espacios localmente convexos. Así, en 1981 C. Debieve expone una integral de funciones valoradas en espacios normados respecto a medidas con valores en un espacio de operadores, definidos en dichos espacios normados y valorados en espacios localmente convexos separados. En 1983, S. A. Sivasankara [18] y R. Rao Chivukula y A. S. Sastry [14] obtienen una integral bilineal tipo Bartle, en la que todos los espacios que aparecen son ya localmente convexos. En M. E. Ballvé [4] se hace una detallada exposición y comparación de diferentes procedimientos de integración vectorial bilineal conocidos hasta 1984.

Utilizando las técnicas introducidas en 1979 por B. Rodríguez-Salinas [16], S. Rodríguez Salazar desarrolla en 1985 [15] una integral tipo Dobrakov en la que también se consideran espacios localmente convexos. En 1986, R. Bravo [6] estudia conjuntamente las integrales de R. Salazar y la de Chivukula-Sastry-Sivasankara, poniendo de manifiesto que en el caso de espacios de Banach y siempre que las medidas cumplan una cierta condición, la segunda integral es una generalización estricta de la primera. En el caso general, ambas integrales parecen ser difícilmente comparables. Posteriormente, en 1987 F. Fernández [11] obtiene una integral bilineal en espacios localmente convexos estrictamente más general que la dada en [14] y que extiende por tanto también a la integral de Dobrakov.

Ciñéndonos dentro de la integración vectorial bilineal, a los teoremas sobre derivación de medidas, cabe señalar que en 1972, H. B. Maynard [13] da un teorema de Radon-Nikodym para medidas valoradas en espacios de operadores entre espacios de Banach, que posteriormente ha sido extendido por A. Balbás y P. Jiménez Guerra [1] y [2] al caso de espacios localmente convexos utilizando la integral de Chivukula-Sastry-Sivasankara.

En la primera parte de este trabajo se expone un teorema de Radon-Nikodym probado en [2] para la integral de Chivukula-Sastry-Sivasankara y se prueba, también para esta integral, un teorema sobre la propiedad de

Radon-Nikodym y la convergencia de martingalas. La segunda parte está dedicada al estudio de la derivación de Radon-Nikodym de medidas valoradas en espacios localmente convesos respecto a medidas con valores en un espacio de operadores (entre espacios localmente convexos) utilizando la integral introducida en [15]. Esto permite comparar una vez más resultados del mismo tipo (en este caso sobre derivación de medidas) obtenidos para cada una de las dos integrales bilineales en espacios localmente convexos, a las que nos hemos referido anteriormente. Esta línea de trabajo se ha seguido también en R. Bravo [6] (donde se estudian los espacios $L^p$ y la representación de operadores para ambos tipos de integración) y en F. J. Fernández [11] (donde se estudian, también para estas dos integrales, la existencia del producto tensorial de medidas y teoremas de tipo Fubini).

## DERIVACION DE MEDIDAS I.

Como hemos indicado en la introducción, en este primer apartado utilizaremos la integral definida en [14] y [18], que exponemos brevemente a continuación. Denotemos por $\Sigma$ una $\sigma$-álgebra de partes de un conjunto $\Omega$, $X$, $Y$ y $Z$ tres espacios localmente convexos de los que $Z$ se supondrá separado y completo y por $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ y $\mathscr{R}$ tres familias generantes de seminormas en $X$, $Y$ y $Z$ respectivamente. Denotaremos por $(x, y) \to xy$ una aplicación bilineal y continua de $X \times Y$ en $Z$, y por $\beta$ y $\alpha$ dos medidas (contablemente aditivas) definidas en $\Sigma$ y con valores en $Y$ y $Z$ respectivamente. Supondremos que la medida $\beta$ verifica la $**$-propiedad (ver [18]), es decir se supone la existencia de una medida finita no negativa $\nu$ definida en $\Sigma$ tal que $\|\beta\|_{B,r} \leqslant \nu$, para toda seminorma $r \in \mathscr{R}$ y todo $B \in \mathscr{B}$, siendo $\mathscr{B}$ la familia de todos los subconjuntos absolutamente convexos y acotados de $X$ y $\|\beta\|_{B,r}$ la semivariación de $\beta$, definida por

$$\|\beta\|_{B,r}(E) = \sup r\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\beta(E_i)\right] \qquad (E \in \Sigma)$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones finitas de $E$ en conjuntos $\{E_i\}_{i=1}^n \subset \Sigma$ y todas las familias finitas $\{x_i\}_{i=1}^n$ de elementos de $B$. Como es habitual, diremos que un conjunto $E \in \Sigma$ es $\beta$-nulo cuando $\|\beta\|_{B,r}(E) = 0$ para cualesquiera que sean $B \in \mathscr{B}$ y $r \in \mathscr{R}$.

Siguiendo la notación usual de Grothendieck, para cada $B \in \mathscr{B}$, denotaremos por $X_B$ el subespacio vectorial generado por $B$, y en él consideraremos la topología definida por el funcional de Minkowski $q_B$ de $B$ en $X_B$. Para indicar que un subconjunto de $X_B$ es compacto en $(X_B, q_B)$, diremos que es $X_B$-compacto. En adelante, emplearemos la siguiente notación:

$$\Sigma^+ = \{E \in \Sigma\colon\ \nu(E) > 0\}, \qquad \Sigma_E = \{F \in \Sigma\colon\ F \subset E\}$$

y

$$\Sigma_E^+ = \Sigma^+ \cap \Sigma_E \qquad (\text{con } E \in \Sigma).$$

*1. **Definición*** [14], [18].– Sea $B \in \mathscr{B}$, diremos que una función $f\colon \Omega \to X$ es *$(\beta, B)$-integrable* si y sólo si rango $(f) \subset X_B$ y existe una sucesión $(f_n)$ de funciones simples $X_B$-valoradas (las funciones simples y su integral, se definen de manera habitual) tal que:

i) existe un conjunto $\beta$-nulo $E$, de forma que $q_B\ (f_n\ (t) - f(t)) \to 0$ puntualmente en $\Omega - E$, y

ii) dados $\varepsilon > 0$ y $r \in \mathscr{R}$, existe $\delta = \delta\ (\varepsilon, r) > 0$ tal que

$$r\left(\int_E f_n\, d\beta\right) < \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $E \in \Sigma$ con $\|\beta\|_{B,r}\ (E) < \delta$.

Diremos que una función $f\colon \Omega \to X$ es *$\beta$-integrable* (en adelante escribiremos simplemente "integrable") si y sólo si es $(\beta, B)$-integrable para algún $B \in \mathscr{B}$.

Si $f$ es $(\beta, B)$-integrable y $E \in \Sigma$, se define

$$\int_E^{(B)} f\, d\beta = \lim_n \int_E f_n\, d\beta,$$

donde $(f_n)$ es una sucesión cualquiera de funciones simples $X_B$-valoradas que verifican i) y ii). Si la función es $\beta$-integrable se define

$$\int_E f\, d\beta = \int_E^{(B)} f\, d\beta \qquad (E \in \Sigma)$$

para cualquier $B \in \mathscr{B}$ tal que $f$ sea $(\beta, B)$-integrable.

*2. **Definición.*** – Sean $B \in \mathscr{B}$, $E \in \Sigma^+$ y $K$ un conjunto $X_B$-compacto. Se dice que $E$ está *B-localizado* en $K$, si dado $\varepsilon > 0$ y una familia finita $\{K_i\}_{i \in I}$ de conjuntos $X_B$-compactos no vacíos de diámetro menor o igual que $\varepsilon$ tales que

$$K = \bigcup_{i \in I} K_i,$$

se verifican las siguientes condiciones:

2.1. Existe una partición $\{E_i\}_{i \in I} \subset \Sigma$ de $E$ y $x_i \in K_i$ $(i \in I)$ tales que

$$r\left(\alpha\,(F) - \int_F f\, d\beta\right) \leqslant \varepsilon\ \|\beta\|_{B,r}\ (F) \qquad (2.1)$$

se cumple para todo $F \in \Sigma_E$ y $r \in \mathscr{R}$, siendo

$$f = \sum_{i \in I} x_i \, \chi_{E_i}.$$

2.2. Si $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ y $\{K_j'\}_{j \in J}$ es una familia finita de conjuntos $X_B$-compactos no vacíos de diámetro menor o igual que $\varepsilon'$, tal que

$$K = \bigcup_{j \in j} K_j'$$

y para cada $j \in J$ existe $i_j \in I$ con $K_j' \subset K_{i_j}$, entonces existe una partición $\{E_j'\}_{j \in J} \subset \Sigma$ de $E$ y $x_j' \in K_j'$ $(j \in J)$ tales que $E_j' \subset E_{i_j}$ y

$$r\left(\alpha(F) - \int_F f' \, d\beta\right) \leqslant \varepsilon' \, \|\beta\|_{B,r}(F) \tag{2.2}$$

para todo $F \in \Sigma_E$ y $r \in \mathscr{R}$, siendo

$$f' = \sum_{j \in J} x_j' \, \chi_{E_j'}.$$

*3.* ***Teorema*** [2].– *Si el espacio $X$ es separado y completo, entonces la medida $\alpha$ tiene derivada de Radon-Nikodym respecto a $\beta$ si y sólo si existe un conjunto cerrado $B \in \mathscr{B}$ tal que se verifican:*

3.1. $\lim\limits_{\|\beta\|_{B,r}(E) \to 0} r[\alpha(E)] = 0$ *para toda seminorma* $r \in \mathscr{R}$.

3.2. *Para cada $E \in \Sigma^+$ existe $F \in \Sigma_E^+$ que está B-localizado en un $X_B$-compacto (que depende de F).*

*4.* ***Definición.***– Se dice que la medida $\alpha$ está *$\beta$-controlada* cuando existe una subálgebra $\Sigma'$ de $\Sigma$ y una familia $(f_A)_{A \in \Sigma'}$ de funciones integrables (de $\Omega$ en $X$) tales que $\sigma(\Sigma') = \Sigma$,

$$\int_A f_A \, d\beta = \alpha(A)$$

para todo $A \in \Sigma'$ y

$$\bigcup_{A \in \Sigma'} f_A(\Omega)$$

es un conjunto acotado. Podemos suponer que existe $B \in \mathscr{B}$ tal que

$$\bigcup_{A \in \Sigma'} f_A(\Omega) \subset B.$$

Si la medida $\alpha$ está $\beta$-controlada, entonces se verifica que

$$r(\alpha(A)) \leqslant \|\beta\|_{B,r}(A) \tag{4.1}$$

para toda seminorma $r \in \mathscr{R}$ y todo $A \in \Sigma$, según resulta fácilmente de las propiedades de la integral (ver por ejemplo [14], p. 185), ya que si se considera en $\Sigma$ la seudométrica $d(A, B) = \nu(A - B) + \nu(B - A)$ $(A, B \in \Sigma)$, entonces $\Sigma'$ es densa en $\Sigma$, la aplicación $\|\beta\|_{B,r}$: $\Sigma \to \mathbb{R}$ es continua (por verificar $\beta$ la $**$-propiedad) y existe una única extensión de $\alpha|\Sigma'$ a $\Sigma$ que coincide con la medida $\alpha$.

Se dice que un espacio localmente convexo separado y completo $Z$, tiene la *propiedad de Radon-Nikodym* (en adelante escribiremos P.R.N.) *respecto a un sistema integral bilineal* $(\Omega, \Sigma, \beta, X, Y, b)$ si toda medida $\alpha$: $\Sigma \to Z$ $\beta$-controlada tiene derivada de Radon-Nikodym acotada respecto de $\beta$ (e.d. existe $f$: $\Omega \to X$ $\beta$-integrable y acotada, tal que

$$\alpha(A) = \int_A f\, d\beta$$

para todo $A \in \Sigma$, en adelante escribiremos $\alpha = \beta_f$). Lógicamente, diremos que $Z$ tiene la P.R.N. cuando la tenga respecto a todo sistema integral bilineal (como anteriormente, al hablar de un sistema integral bilineal $(\Omega, \Sigma, \beta, X, Y, b)$ estamos utilizando las notaciones y suponiendo que se verifican las condiciones mencionadas al comienzo de este apartado y denotando por $b$ a una aplicación bilineal y continua de $X \times Y$ en $Z$).

De (4.1) y del teorema 3 resulta inmediatamente que un espacio $Z$ tiene la P.R.N. respecto a un sistema integral bilineal $(\Omega, \Sigma, \beta, X, Y, b)$ cuando para cada medida $\alpha$: $\Sigma \to Z$ $\beta$-controlada existe un subconjunto absolutamente convexo, cerrado y acotado $B \subset X$ tal que para cada $E \in \Sigma^+$ existe $F \in \Sigma_E^+$ que está $B$-localizado en algún $X_B$-compacto (dependiente de $F$).

Sea $(\Sigma_i)_{i \in I}$ una red monótona no decreciente de sub-$\sigma$-álgebras de $\Sigma$ tales que

$$\Sigma = \sigma\Big(\bigcup_{i \in I} \Sigma_i\Big)$$

y sea $f_i$: $\Omega \to X$ una función integrable para cada $i \in$ I, diremos que $(f_i, \Sigma_i)_{i \in I}$ es una *martingala* si se verifica que

$$\int_A f_i\, d\beta = \int_A f_j\, d\beta$$

para todo $i \geqslant j$ y todo $A \in \Sigma_j$. Diremos que una martingala $(f_i, \Sigma_i)_{i \in I}$ es *acotada*, si

$$\bigcup_{i \in I} f_i(\Omega)$$

es un subconjunto acotado de $X$.

Una martingala acotada $(f_i, \Sigma_i)_{i \in I}$ se dice que es *convergente* si existe una función integrable y acotada $f\colon \Omega \to X$ tal que

$$\lim_i \int_A f_i \, d\beta = \int_A f \, d\beta$$

se cumple para todo

$$A \in \bigcup_{i \in I} \Sigma_i .$$

5. ***Teorema***.– *Un espacio Z tiene la* P.R.N. *si y sólo si toda martingala (en Z) es convergente.*

*Demostración.*– Supongamos que $Z$ tiene la P.R.N. y sea $(f_i, \Sigma_i)_{i \in I}$ una martingala acotada (en $Z$). Si $B \in \mathscr{B}$ es tal que

$$\bigcup_{i \in I} f_i(\Omega) \subset B,$$

entonces

$$r\left(\int_A f_i \, d\beta\right) \leqslant \|\beta\|_{B,r}(A)$$

se verifica para todo $A \in \Sigma_i$, $r \in \mathscr{R}$ e $i \in I$. Consideremos ahora

$$\alpha_i(A) = \int_A f_i \, d\beta$$

para todo $A \in \Sigma_i$ e $i \in I$ y

$$\alpha_0(A) = \lim_i \alpha_i(A) \qquad \text{para todo} \quad A \in \bigcup_{i \in I} \Sigma_i .$$

Evidentemente,

$$r[\alpha_0(A)] \leqslant \|\beta\|_{B,r}(A) \qquad \text{para todo} \quad A \in \bigcup_{i \in I} \Sigma_i$$

y teniendo en cuenta que la medida $\beta$ verifica la $**$-propiedad y procediendo como en la demostración del teorema de Carathéodory-Hahn-Kluvaneck (Diestel-Uhl [9]) se deduce la existencia de una medida $\alpha\colon \Sigma \to Z$ que extiende a $\alpha_0$ y que está $\beta$-controlada. Por consiguiente, existe una función $f\colon \Omega \to X$ integrable y acotada tal que $\alpha = \beta_f$ y

$$\lim_i \int_A f_i \, d\beta = \alpha(A) = \int_A f \, d\beta$$

para todo

$$A \in \bigcup_{i \in I} \Sigma_i .$$

Recíprocamente, supongamos que toda martingala (en $Z$) acotada es convergente y sea $\alpha$: $\Sigma \to Z$ una medida $\beta$-controlada. Si $\Sigma'$ y $(f_A)_{A \in \Sigma'}$ verifican las condiciones de la definición 4, para cada partición finita $\pi$ de $\Omega$ en elementos de $\Sigma'$, definamos

$$f_\pi = \sum_{A \in \pi} \bar{f}_A ,$$

siendo $\bar{f}_A$ : $\Omega \to X$ la función tal que $\bar{f}_A | A \equiv f_A$ y $\bar{f}_A | \Omega - A \equiv 0$. Procediendo ahora como en Rodríguez-Salinas [17], se tiene que si $\pi_1 \leqslant \pi_2$, todo $A \in \pi_1$ se puede expresar como unión (finita) de elementos de $\pi_2$:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad (A_i \in \pi_2)$$

y

$$\int_A f_{\pi_2}\, d\beta = \int_A \Big( \sum_{C \in \pi_2} \bar{f}_C \Big) d\beta = \sum_{C \in \pi_2} \int_A \bar{f}_C \, d\beta =$$

$$= \sum_{C \in \pi_2} \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} \bar{f}_C \, d\beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha(A_i) = \alpha(A) = \int_A f_{\pi_1}\, d\beta.$$

Por tanto, $(f_\pi, \sigma(\pi))_\pi$ es una martingala acotada en $Z$ y existe una función integrable y acotada $f$: $\Omega \to X$ tal que

$$\int_A f = \lim_\pi \int_A f_\pi \, d\beta$$

para todo

$$A \in \bigcup_\pi \sigma(\pi).$$

Además, para cada $A \in \Sigma'$ consideremos $\pi_A = \{A, \Omega - A\}$ y entonces

$$\int_A f\, d\beta = \lim_\pi \int_A f_\pi \, d\beta = \int_A f_{\pi_A}\, d\beta = \alpha(A),$$

de donde se deduce fácilmente que $\alpha = \beta_f$.

## DERIVACION DE MEDIDAS II.

En adelante denotaremos por $\Sigma$ a una $\sigma$-álgebra de partes de un conjunto $\Omega$, por $X$ y $Z$ dos espacios localmente convexos separados, de los que $Z$ se supondrá además completo y por $Y$ el espacio $L(X, Z)$ de las aplicaciones lineales y continuas de $X$ en $Z$. La aplicación bilineal de $X \times Y$ en $Z$ que emplearemos será la evaluación y $\mathscr{P}$ y $\mathscr{R}$ denotarán dos familias generantes de seminormas en $X$ y $Z$ respectivamente, mientras que en $Y$ se considerará la topología de la convergencia puntual.

Sean $\alpha, \beta$ y $\nu$, $\Sigma^+$, $\Sigma_E$ y $\Sigma_E^+$ $(E \in \Sigma)$ como en el apartado anterior y supongamos que $\|\beta\|_{p,r} \leqslant \nu$ para cualesquiera que sean $p \in \mathscr{P}$ y $r \in \mathscr{R}$ con $\|\beta\|_{p,r}(\omega) < +\infty$(*), siendo

$$\|\beta\|_{p,r}(E) = \sup r\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\, \beta(E_i)\right] \qquad (E \in \Sigma),$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones finitas $\{E_i\}_{i=1}^n \subset \Sigma$ de $E$ y todas las familias finitas $\{x_i\}_{i=1}^n$ de elementos de $X$ tales que $p(x_i) \leqslant 1$, para $i = 1, \ldots, n$. En adelante supondremos que la medida $\beta$ es de semivariación acotada (e.d., para cada $r \in \mathscr{R}$ existe $p \in \mathscr{P}$ tal que $\|\beta\|_{p,r}(\Omega) \leqslant +\infty$).

*6. **Definición**.*— Se dice que una función $f$: $\Omega \to X$ es una función *u-simple* si es límite uniforme de funciones simples (las funciones simples así como su integral y la de las funciones $u$-simples se definen de la manera usual). Denotemos por $S_0$ y $S$ a las familias de las funciones simples y $u$-simples respectivamente.

Diremos que una función $f$: $\Omega \to X$ es *$\beta$-medible* (o medible) si para cada seminorma continua $r \in \mathscr{R}$ existe $p \in \mathscr{P}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe $A \in \Sigma$ tal que $\|\beta\|_{p,r}(\Omega - A) \leqslant \varepsilon$ y $f \cdot \chi_A \in S$.

Siguiendo la definición de [15], diremos que una función $f$: $\Omega \to X$ es $\beta$-integrable (o integrable) si es medible y para cualesquiera que sean $r \in \mathscr{R}$ y $p \in \mathscr{P}$ con $\|\beta\|_{p,r}(\Omega) < +\infty$, se tiene que $\|\beta\|_{p,r}(f, \cdot)$ es continua (e.d., para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\beta\|_{p,r}(f, E) = \sup\left\{r\left(\int_E g\, d\beta\right):\ g \in S \ \text{ y } \ (p \circ g \,|\, E) \leqslant (p \circ f \,|\, E)\right\} < \varepsilon$$

para todo $E \in \Sigma$ con $\|\beta\|_{p,r}(E) < \delta$.

Se dice que una sucesión $(f_n)$ de funciones integrables tiene *semivariación uniformemente continua* si

$$\lim_{\|\beta\|_{p,r}(E) \to 0} \|\beta\|_{p,r}(f_n, E) = 0$$

uniformemente (en $n$) para cualesquiera que sean $p \in \mathscr{P}$ y $r \in \mathscr{R}$ con $\|\beta\|_{p,r}(\Omega) < +\infty$.

La integral de una función integrable $f$ se define de la siguiente manera:

$$\int_A f\, d\beta = \lim_{K \in \{K \in \Sigma\, :\, f \cdot \chi_K \in S\}} \int_A f \cdot \chi_K\, d\beta \qquad (A \in \Sigma).$$

---

(*) Basta suponer que $\beta$ es continua según se prueba en [11].

Supongamos en adelante y hasta el teorema 13 inclusive, que el espacio $X$ sea de Fréchet y que $\mathscr{P} = \{p_n\}$. Entonces,

$$d(x, y) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{p_n (x - y)}{1 + p_n (x - y)} \qquad (x, y \in X)$$

define una métrica invariante por traslaciones, que a su vez define la topología de $X$ y para cada subconjunto compacto $K$ de $X$ *y cada seminorma* $p \in \mathscr{P}$ existe $M_{p,K} > 0$ tal que $p(x) \leqslant M_{p,K}\, d(x, 0)$ para todo $x \in K$.

*7.* ***Definición.***– Diremos que un conjunto $E \in \Sigma^+$ *está localizado en un compacto* $K \subset X$ si para cada $\varepsilon > 0$ y cada familia finita $\{K_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos compactos no vacíos de $X$ de $d$-diámetro menor o igual que $\varepsilon$, tales que

$$K = \bigcup_{i \in I} K_i,$$

se verifican:

7.1. Existe una partición $(E_i)_{i \in I} \subset \Sigma$ de $E$ y $x_i \in K_i$ $(i \in I)$ tales que

$$r\left[\alpha(F) - \int_F f\, d\beta\right] \leqslant \varepsilon\, \|\beta\|_{p,r}(E) \tag{7.1}$$

se verifica para todo $F \in \Sigma_E$, $p \in \mathscr{P}$ y $r \in \mathscr{R}$ tales que $\|\beta\|_{p,r}(\Omega) < +\infty$, siendo

$$f = \sum_{i \in I} x_i\, \chi_{E_i}.$$

7.2. Si $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ y $\{K'_j\}_{j \in J}$ es una familia de subconjuntos compactos no vacíos de $X$ de $d$-diámetro menor o igual que $\varepsilon'$, tales que

$$K = \bigcup_{j \in J} K'_j$$

y para cada $j \in J$ existe $i_j \in I$ con $K'_j \subset K_{i_j}$, entonces existe una partición $\{E'_j\}_{j \in J} \subset \Sigma$ de $E$ y $x'_j \in K'_j$ $(j \in J)$ de manera que $E'_j \subset E_{i_j}$ y

$$r\left[\alpha(F) - \int_F f'\, d\beta\right] \leqslant \varepsilon'\, \|\beta\|_{p,r}(F) \tag{7.2}$$

se verifica para cualesquiera que sean $F \in \Sigma_E$, $p \in \mathscr{P}$ y $r \in \mathscr{R}$ con $\|\beta\|_{p,r}(\Omega) < +\infty$, siendo

$$f' = \sum_{j \in J} x'_j\, \chi_{E'_j}.$$

*8.* ***Lema.***– *Si $E \in \Sigma^+$ está localizado en un compacto $K \subset X$, entonces existe una función u-simple f tal que $f(\Omega) \subset K$, $f|\Omega - E \equiv 0$ y*

$$\alpha(F) = \int_F f\, d\beta$$

*para todo $f \in \Sigma_E$* (en adelante escribiremos $\alpha_E = (\beta_E)_f$).

*Demostración.*– Basta proceder de manera análoga a la demostración del lema 4 de [2].

*9.* ***Proposición.***– *Supongamos que $\Omega \in \Sigma^+$ y que para todo $E \in \Sigma^+$ existe $F \in \Sigma_E^+$ que está localizado en un compacto $K_F \subset X$. Entonces existe una sucesión disjunta $(E_n) \subset \Sigma^+$ y una sucesión $(K_n)$ de subconjuntos compactos de X, tales que $E_n$ está localizado en $K_n$ para todo n y*

$$\nu(\Omega - \bigcup_n E_n) = 0.$$

*Demostración.*– Basta proceder como en la demostración de la proposición 5 de [2].

En las condiciones de la proposición 9, del lema 8 resulta la existencia de una sucesión $(f_n)$ de funciones $u$-simples tales que $f_n|\Omega - E_n \equiv 0$, $f_n(\Omega) \subset K_n$ y $\alpha_{E_n} = (\beta_{E_n})_{f_n}$, lo que nos lleva a introducir el siguiente concepto:

*10.* ***Definición.***– Diremos que una medida $\alpha$ está *uniformemente localizada* si existen una sucesión disjunta $(E_n) \subset \Sigma^+$, una sucesión $(K_n)$ de subconjuntos compactos no vacíos de $X$ y una sucesión $(f_n) \subset S$ de forma que

$$\nu(\Omega - \bigcup_n E_n) = 0, \qquad f_n|\Omega - E_n \equiv 0,$$

$$f_n(\Omega) \subset K_n, \qquad \alpha_{E_n} = (\beta_{E_n})_{f_n}$$

y la sucesión

$$\left(\sum_{m=1}^{n} f_m\right)_n$$

tiene semivariación uniformemente continua.

Evidentemente, si $\Omega \in \Sigma^+$ y existe un subconjunto compacto no vacío de $X$ tal que para cada $E \in \Sigma^+$ exista $F \in \Sigma_E^+$ que esté localizado en dicho compacto, entonces del lema 8 resulta que la medida $\alpha$ está uniformemente localizada.

*11. **Teorema.**— Supongamos que se verifican:*

11.1. $\lim\limits_{\|\beta\|_{p,r}(A)\to 0} r[\alpha(A)] = 0$ *para cualesquiera que sean* $p \in \mathscr{P}$ *y* $r \in \mathscr{R}$ *con* $\|\beta\|_{p,r}(\Omega) < +\infty$.

11.2. *Para cada* $E \in \Sigma^+$ *existe* $F \in \Sigma_E^+$ *que está localizado en un subconjunto compacto* $K_F$ *de* $X$.

*Entonces, existe una función medible* $f\colon \Omega \to X$ *tal que para cada* $r \in \mathscr{R}$ *existe* $p \in \mathscr{P}$ *de manera que dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $A_\varepsilon \in \Sigma$ *tal que* $\|\beta\|_{p,r}(\Omega - A_\varepsilon) < \varepsilon$, $f_\varepsilon = f \cdot \chi_{A_\varepsilon}$ *es* $\beta_{A_\varepsilon}$*-integrable y* $\alpha_{A_\varepsilon} = (\beta_{A_\varepsilon})_{f_\varepsilon}$.

*Demostración.*— Supongamos que $\Omega \in \Sigma^+$ (ya que el caso contrario es trivial), entonces existen como hemos visto anteriormente, una sucesión disjunta $(E_n) \subset \Sigma^+$, $(K_n)$ una sucesión de subconjuntos compactos no vacíos de $X$ y $(g_n) \subset S$ tales que

$$v(\Omega - \bigcup_n E_n) = 0, \qquad g_n | \Omega - E_n \equiv 0,$$

$$g_n(\Omega) \subset K_n \qquad \text{y} \qquad \alpha_{E_n} = (\beta_{E_n})_{g_n}.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\Omega = \bigcup_n E_n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la función $u$-simple

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} g_i.$$

Evidentemente, existe

$$f(t) = \lim_n f_n(t)$$

para todo $t \in \Omega$ y del teorema de Egorov resulta que para cada $r \in \mathscr{R}$ existe $p \in \mathscr{P}$ tal que dado $\varepsilon > 0$ existe $A_\varepsilon \in \Sigma$ con $\|\beta\|_{p,r}(\Omega - A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ y la sucesión $(f_n)$ converge uniformemente a $f$ en $A_\varepsilon$. Además, la función $f \cdot \chi_{A_\varepsilon}$ es acotada, ya que para cada seminorma $p \in \mathscr{P}$ existe $n_p \in \mathbb{N}$ tal que

$$p[f(x)] \leqslant 1 + p[f_{n_p}(x)] \leqslant 1 + M_{\bigcup_{n=1}^{n_p} K_n}\, d(f_{n_p}(x), 0)$$

para todo $x \in A_\varepsilon$, y el conjunto $\{d(f_{n_p}(x), 0)\colon x \in \Omega\}$ es acotado por ser $f_{n_p}$ una función $u$-simple.

Por consiguiente, $f$ es medible y de la proposición 1.53 de [6] resulta que la función $f \cdot \chi_{A_\varepsilon}$ es $\beta_{A_\varepsilon}$- integrable. Además, si

$$F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \qquad (n \in \mathbb{N})$$

se tiene que

$$\alpha(B) = \lim_n \alpha(B \cap F_n) = \lim_n \int_B f_n \, d\beta = \int_B f \cdot \chi_{A_\varepsilon} \, d\beta_{A\varepsilon}$$

para todo $B \in \Sigma_{A\,\varepsilon}$.

*12.* **Teorema.–** *Si* $\alpha$ *está uniformemente localizada y verifica* 11.1, *entonces tiene derivada de Radon-Nikodym respecto de* $\beta$.

*Demostración.–* Con las notaciones de la demostración anterior, veamos que la función obtenida en dicha demostración es integrable, para lo que basta con probar que la semivariación $\|\beta\|_{p,r}(f,\cdot)$ es continua cualesquiera que sean $p \in \mathscr{P}$ y $r \in \mathscr{R}$ con $\|\beta\|_{p,r}(\Omega) < +\infty$. En efecto, sean $p \in \mathscr{P}$ y $r \in \mathscr{R}$ con $\|\beta\|_{p,r}(\Omega) < +\infty$, $A \in \Sigma$ y $g \in S$ tales que $p[g(t)] \leqslant p[f(t)]$ para todo $t \in A$. Entonces $p[g(t)] \leqslant p[f_n(t)]$ para todo $t \in F_n$ y $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$r\left(\int_A g\, d\beta\right) \leqslant \varepsilon + r\left(\int_{A \cap F_{n_0}} g\, d\beta\right) \leqslant \varepsilon + \|\beta\|_{p,r}(f_{n_0}, A),$$

de donde, por tener $(f_n)$ semivariación uniformemente continua, resulta que $\|\beta\|_{p,r}(f,\cdot)$ es continua.

*13.* **Teorema.–** *Si X es un espacio de Banach, entonces* $\alpha$ *tiene derivada de Radon-Nikodym respecto de* $\beta$ *si y sólo si* $\alpha$ *está uniformemente localizada y*

$$\lim_{\|\beta\|_{p,r}(A) \to 0} [\alpha(A)] = 0 \qquad (13.1)$$

*para toda seminorma* $r \in \mathscr{R}$, *siendo p la norma en X.*

*Demostración.–* Veamos que las condiciones son necesarias, ya que su suficiencia se sigue inmediatamente del teorema 12. En efecto, supongamos que existe una función integrable $f\colon \Omega \to X$ tal que $\alpha = \beta_f$, entonces (13.1) se deduce del teorema 3.28 de [15]. Veamos que para cada $E \in \Sigma^+$ existe $F \in \Sigma_E^+$ que está localizado en un subconjunto compacto de $X$. En efecto, sea $E \in \Sigma^+$ y supongamos que existe $r_0 \in \mathscr{R}$ tal que $0 < \|\beta\|_{p,r_0}(E) \leqslant \|\beta\|_{p,r_0}(\omega) < +\infty$ (ya que de (8.1) resultaría en caso contrario que $E$ estaría trivialmente localizado en cualquier conjunto unitario). Por ser $f$ integrable es medible y existe $G \in \Sigma$ tal que $\|\beta\|_{p,r_0}(\Omega - G) < (\|\beta\|_{p,r_0}(E))/2$ y $f \cdot \chi_G \in S$. Sea $F = E \cap G$, entonces $\|\beta\|_{p,r_0}(F) > (\|\beta\|_{p,r_0}(E))/2$ y, por consiguiente, $F \in \Sigma_E^+$. Veamos que $F$ *está locali-*

zado en $K = \overline{f(F)}$ (que es precompacto y, por consiguiente, compacto). Sean $\varepsilon > 0$ y $\{K_i\}_{i=1}^m$ una familia de subconjuntos compactos no vacíos de $X$, de diámetro menor o igual que $\varepsilon$, tales que

$$K = \bigcup_{i=1}^{m} K_i.$$

Para cada $1 \leqslant i \leqslant m$ sea $x_i \in K_i$ con $p(x_i) = \text{mín}\{p(x)\colon x \in K_i\}$ y consideraremos los conjuntos

$$F_1 = F \cap f^{-1}(K_1), \qquad F_i = F \cap f^{-1}(K_i) - \bigcup_{j=1}^{i-1} F_j$$

para $1 < i \leqslant m$ y

$$g = \sum_{i=1}^{m} x_i \, \chi_{F_i}.$$

Entonces, $p(g(t)) \leqslant p(f(t))$ para todo $t \in F$ y $\|\beta\|_{p,r}(g, \cdot) \leqslant \|\beta\|_{p,r}(f, \cdot)$ y

$$r\left[\alpha(A) - \int_A g\, d\beta\right] = r\left[\int_A (f-g)\, d\beta\right] \leqslant \varepsilon \, \|\beta\|_{p,r}(A)$$

para todo $A \in \Sigma_F$ y $r \in \mathscr{R}$.

De la construcción anterior se deduce fácilmente que se verifica 7.2, pudiéndose construir la función $f'$ (que aparece en 7.2) de forma que $p[f'(t)] \leqslant p[f(t)]$ para todo $t \in F$. Procediendo ahora de manera análoga a las demostraciones del lema 4 y la proposición 5 de [2] se obtienen $(E_n) \subset \Sigma^+$, $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de subconjuntos compactos no vacíos de $X$ y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$, tales que

$$\nu(\Omega - \bigcup_n E_n) = 0, \qquad f_n | \Omega - E_n \equiv 0, \qquad f_n(\Omega) \subset K_n,$$

$$\alpha_{E_n} = (\beta_{E_n})_{f_n} \qquad \text{y} \qquad P(f_n(t)) \leqslant p(f(t))$$

para todo $t \in F_n$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente,

$$\|\beta\|_{p,r}(f_n, A \cap F_n) \leqslant \|\beta\|_{p,r}(f, A \cap F_n) \leqslant \|\beta\|_{p,r}(f, A)$$

para cualesquiera que sean $n \in \mathbb{N}$, $A \in \Sigma$ y $r \in \mathscr{R}$, de donde por ser $f$ integrable, resulta que la sucesión $(f_n)$ tiene semivariación uniformemente continua y que $\alpha$ está uniformemente localizada.

Suponiendo que $X$ es un espacio localmente convexo separado, no necesariamente de Fréchet, e introduciendo unos conceptos análogos a los expuestos en la definición 4, se puede establecer una caracterización de los espacios $Z$ que poseen la propiedad de Radon-Nikodym, mediante convergencia de martingalas, similar a la enunciada en el teorema 5 (ver [12]). Por otra parte, de la proposición 3 de [12] y del teorema 13 resulta fácilmente que un espacio $Z$ tiene la P.R.N. respecto a un sistema integral bilineal $(\Omega, \Sigma, \beta, X)$, en el que $X$ es un espacio de Banach, si y sólo si toda medida $\alpha: \Sigma \to Z$ $\beta$-controlada está uniformemente localizada (respecto a dicho sistema).

## BIBLIOGRAFIA


[1] BALBAS, A. Y P. JIMENEZ GUERRA: *Un teorema de Radon-Nikodym para integrales bilineales.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 78 (1984), 217-220.

[2] ———: *A Radon-Nikodym theorem for a bilinear integral in locally convex spaces.* Math. Japonica, 32 (1987), 863-870.

[3] ———: *Representation of operators by bilinear integrals.* Czech. Math. J. 37 (1987), 551-558.

[4] BALLVE, M. E.: *Integración vectorial bilineal.* U.N.E.D., 1984.

[5] BLONDIA, C.: *Locally convex spaces with Radon-Nikodym property.* Math. Nach., 114 (1982), 335-351.

[6] BRAVO, R.: *Tópicos en integración bilineal vectorial.* Tesis Doctoral. U.N.E.D., 1986

[7] BRAVO, R. Y P. JIMENEZ GUERRA: *Linear operators and vector integrals.* (Aparecerá).

[8] DEVIEVE, C.: *Integration of vector valued functions with respect to vector valued measures.* Rev. Roum. Math. P et Appl. 26 (1981), 943-957.

[9] DIESTEL, J. AND J. J. UHL: *Vector measures.* Amer Math. Soc., Providence, R.I., 1977.

[10] DOBRAKOV, I.: *On integration in Banach spaces.* Czech. Math. J., 20, 21, 29, 30, 35, 37 (1970, 71, 79, 80, 85, 87).

[11] FERNANDEZ, F. J.: *Producto de medidas valoradas en espacios localmente convexos.* Tesis Doctoral, U.N.E.D., 1987.

[12] FERNANDEZ, F. J. Y P. JIMENEZ GUERRA: *On the Radon-Nikodym property for operator valued measures.* (Aparecerá).

[13] MAYNARD, H. B.: *A Radon-Nikodym theorem for operator valued measures.* Trans. Amer. Math. Soc., 173 (1972), 449-463.

[14] RAO CHIVUKULA, R. Y A. S. SASTRY: *Product vector measures via Bartle integrals.* J. Math. Anal., 96 (1983), 180-195.

[15] RODRIGUEZ SALAZAR, S.: *Integración general en espacios localmente convexos.* Tesis Doctoral, Univ. Complutente, Madrid, 1985.

[16] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 73 (1979), 361-387

[17] ———: *La propiedad de Radon-Nikodym, $\delta$-dentabilidad y martingalas en espacios localmente convexos.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 74 (1980), 65-89.

[18] SIVASANKARA, S. A.: *Vector integrals and products of vector measures.* Univ. Microfilm Inter., Michigan, 1983.