# *Teoremas de Fubini en integración bilineal*

POR FIDEL JOSE FERNANDEZ Y FERNANDEZ-ARROYO

Recibido: 4 noviembre 1987

*Presentado por el académico numerario D. José J. Etayo*

**Abstract**

Several Fubini's type theorems are proved for a bilinear integral in locally convex spaces, giving an affirmative answer, under certain conditions, to the question about the validity of the Fubini's theorems for these integrals.

## INTRODUCCION

En 1983, S. A. Sivasankara [13] obtuvo una integración bilineal de tipo Bartle (expuesta tambien en Rao Chivukula y Sastry [10]) en que todos los espacios considerados son localmente convexos, aunque se hace preciso imponer determinadas restricciones a las funciones integrables.

Detalladas comparaciones de esta integral con otros procedimientos de integración vectorial bilineal pueden encontrarse en R. Bravo [4] y en M. E. Ballvé [1].

En conexión con estas cuestiones, surge el problema de saber cuándo existe el producto de dos medidas vectoriales $\alpha$ y $\beta$ (con respecto a una cierta aplicación bilineal), y averiguar si su expresión viene dada, como parece sugerir la teoría de la medida clásica, por una integral del tipo

$$\alpha \otimes \beta (G) = \int \alpha (G_t)\, d\beta_{(t)}$$

Contrariamente a lo que sucede en el caso escalar, tal medida producto no existe necesariamente, ni siquiera en el caso en que las medidas $\alpha$ y $\beta$ estén valoradas en un mismo espacio de Hilbert y la aplicación bilineal considerada sea el producto interior. (Pueden verse contraejemplos en Bhaskara Rao [3] y en Dudley y Pakula [7].)

Sin embargo, varios autores han obtenido condiciones suficientes para la existencia de la medida producto. Citaremos entre ellos a Duchon [5], Duchon y Kluvanek [6], Swartz ([14], [15]) y Huneycutt [9]. Este último considera medidas de variación acotada valoradas en espacios de Banach; y consigue, con determinadas restricciones (como que una de las medidas tenga rango separable), representar la medida producto mediante una integral de tipo Bochner, y dar además un teorema de Fubini; que le permite, por otra parte, probar la asociatividad de la convolución de medidas.

Para la integral bilineal de Sivasankara, tanto el propio Sivasankara [13] como Rao Chivukula y Sastry [10] dan, en 1983, teoremas que generalizan y unifican todos los resultados antes reseñados sobre existencia y representación (bajo ciertas condiciones) del producto de medidas. Sin embargo, aunque consiguen un Teorema de Fubini para funciones simples, no ofrecen ningún Teorema más general de este tipo, semejante al dado por Huneycutt [9]. R. Chivukula y Sastry [10] indican que ello "parece requerir un estudio más profundo de la integral de Bartle".

En el presente artículo presentamos teoremas de tipo Fubini para esta integral de Sivasankara, y para distintas clases de funciones.

Para ello, después de considerar el caso de las funciones simples (secciones 4 y 5), se dedica la sección 6 a demostrar una notable propiedad de la medida producto, que será necesaria para el desarrollo del resto del artículo.

En § 7 se prueba la "asociatividad" (bajo ciertas condiciones) del producto de medidas, y se deduce de ello un nuevo resultado de tipo Fubini.

Con algunas hipótesis restrictivas sobre las medidas $\alpha$ y $\beta$, y exigiendo que sea de Banach uno de los seis espacios localmente convexos que intervienen, se demuestra en 8.2 un Teorema de Fubini que es válido para cualquier función fuertemente integrable (ver 8.1), y que generaliza parcialmente el Teorema III.2 de J. E. Huneycutt [9]; dicho Teorema, aunque es aplicable también a otras funciones, se refiere sólo al caso en que todos los espacios considerados sean de Banach y las medidas utilizadas cumplan condiciones más fuertes que las que imponemos aquí.

Concluye el trabajo con un nuevo teorema de tipo Fubini (9.2), que se refiere a una clase más amplia de funciones (las que son $(\alpha \otimes \beta)$-medibles y $(\alpha \otimes \beta)$-esencialmente acotadas, en el sentido de Rao Chivukula y Sastry [10]), pero en el que es preciso suponer que la medida producto $\alpha \otimes \beta$ tiene la $\widehat{**}$-propiedad fuerte (ver 9.1).

## NOTACION

A lo largo del artículo, $X$, $Y$, $Z$, $U$, $V$ y $W$ serán espacios localmente convexos y separados; supondremos que $U$, $V$ y $W$ son completos; $\mathscr{P}$, $Q$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ y $\mathscr{W}$ denotarán sendas familias generantes de seminormas continuas de $X$, $Y$, $Z$, $U$, $V$ y $W$; $\phi_1: X \times Y \to U$, $\phi_2: Z \times X \to V$, $\phi_3: V \times Y \to W$ y $\phi_4: Z \times U \to W$ serán aplicaciones bilineales y continuas, verificando que $\phi_3(\phi_2(z,x), y) = \phi_4(z, \phi_1(x,y))$, para todo $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$; $(\Omega, \mathscr{A})$ y $(E, \mathscr{C})$ serán espacios medibles; $\alpha: \mathscr{A} \to X$ y $\beta: \mathscr{C} \to Y$, medidas contablemente aditivas.

Utilizaremos, como antes se indicó, la integral bilineal definida en [10] y [13] (ver también [1] y [4]).

Como es habitual, pondremos $\mathscr{A} \otimes \mathscr{C} = \sigma(\mathscr{A} \times \mathscr{C})$; y

$$\mathscr{B}_X = \{B \subset X \mid B \text{ es absolutamente convexo y acotado}\}.$$

*1. Proposición.*— Si $F$: $E \to X$ es una función simple, entonces la aplicación $\phi_2(z, F)$: $E \to V$ (dada por $\phi_2(z, F)(s) = \phi_2(z, F(s))$, para todo $s \in E$) es simple, cualquiera que sea $z \in Z$, y se verifica que

$$\int_E \phi_2(z, F)\, d\beta = \phi_4\left(z, \int_E F\, d\beta\right).$$

*2. Definiciones.*—

2.1. Del mismo modo que en [10] y [13], decimos que la medida $\alpha$: $\mathcal{A} \to X$ es *Mackey-acotada* si existe una aplicación acotada $\lambda$: $\mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ verificando: Si $(A_n)_{n \in N} \subset \mathcal{A}$ es una sucesión disjunta, entonces la sucesión

$$\left(\lambda\left(\bigcup_{i>n} A_i\right)\right)_{n \in N}$$

converge a cero; y para cada seminorma $p \in \mathcal{P}$, existe $M_p > 0$ tal que $p(\alpha(A)) \leqslant M_p \cdot \lambda(A)$, para todo $A \in \mathcal{A}$.

Si $X$ es metrizable, entonces $\alpha$ es Mackey-acotada, según se demuestra en [13] y [10].

2.2. También como en [10] y [13], decimos que la medida $\beta$ tiene la *$**$-propiedad* (respecto de $\phi_1$) (ó la $(**, \phi_1)$-propiedad) si existe una medida finita contablemente aditiva $\nu$: $\mathcal{C} \to \mathbb{R}^+$ tal que $\|\beta\|_{B,r} \ll \nu$ ($\|\beta\|_{B,r}$ es absolutamente continua con respecto a $\nu$), para todo $B \in \mathcal{B}_X$ y $r \in \mathcal{U}$.

($\|\beta\|_{B,r}$ denota la $(B, r)$-semivariación de la medida $\beta$; es decir, la aplicación $\|\beta\|_{B,r}$: $\mathcal{C} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ dada por

$$\|\beta\|_{B,r}(D) = \sup\left\{r\left(\sum_{i=1}^{n} \phi_1(x_i, \beta(D_i))\right)\right\} \qquad (D \in \mathcal{C}),$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones medibles finitas $\{D_1, ..., D_n\}$ de $D$ y todas las colecciones finitas $\{x_1, ..., x_n\} \subset B$ ).

2.3. Siguiendo a [4], diremos que la medida $\beta$ tiene la *$*'$-propiedad* respecto de $\phi_1$) (o la $(*', \phi_1)$-propiedad) si para cada $B \in \mathcal{B}_X$ y cada $r \in \mathcal{U}$ existe una medida finita contablemente aditiva $\nu_{B,r}$: $\mathcal{C} \to \mathbb{R}^+$ tal que $\|\beta\|_{B,r} \ll \nu_{B,r}$(*).

Si $\nu_{B,r}$ no depende de $r \in \mathcal{U}$ (resp. de $B \in \mathcal{B}_X$), diremos que la medida $\beta$ tiene la *$(**', \phi_1)$-propiedad* (resp. la *$(*, \phi_1)$-propiedad*).

(*) Puede demostrarse (ver 4] y [10]) que, si $\|\beta\|_{B,r} \ll \nu_{B,r}$, entonces $\|\beta\|_{B,r}(E) < +\infty$.

2.4. Como es habitual, llamaremos *medida producto* de las medidas $\alpha$ y $\beta$ (y la denotaremos por $\alpha \otimes \beta$) a una medida contablemente aditiva

$$\alpha \otimes \beta: \ \mathcal{A} \otimes \mathcal{C} \to U$$

tal que

$$(\alpha \otimes \beta)(A \times D) = \phi_1 \ (\alpha(A), \ \beta(D)),$$

para cada $A \times D \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$.

Se prueba en [13] (págs. 78-79) que la medida producto, si existe, es única. (Nótese que $U$ es Hausdorff.)

*3. **Observación**.*— Supongamos que $\alpha$ es Mackey-acotada y que $\beta$ tiene la $(**, \phi_1)$-propiedad. Sea $\lambda$: $\mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ una aplicación (acotada) verificando las condiciones señaladas en 2.1.

Se demuestra en [10] y en [13] que, con estas hipótesis, existe $B \in \mathcal{B}_X$ tal que, cualquiera que sea $G \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$, la aplicación

$$\begin{aligned} \alpha(G.): \ E &\to \ X \\ s &\to \alpha(G_s) \end{aligned}$$

—siendo $G_s = \{t \in \Omega \ / \ (t, s) \in G\}$ $(s \in E)$— es $(\beta, B)$-integrable, y $p_B \ (\alpha(G_s)) \leqslant \lambda(G_s)$, para todo $s \in E$. Además, la medida producto $\alpha \otimes \beta$ existe y está dada por

$$(\alpha \otimes \beta)(G) = \int_E \alpha(G.) \, d\beta \qquad (G \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}).$$

*4. **Proposición**.*— Supongamos que $\alpha$ es Mackey-acotada, y que $\beta$ tiene la $**$-propiedad respecto de $\phi_i$, para $i = 1, 3$.

Entonces, para cada $G \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$ y $z \in Z$, la aplicación

$$\phi_2 \ (z, \ \alpha(G.)): \ E \to V$$

dada por

$$\phi_2 \ (z, \ \alpha(G.))(s) = \phi_2 \ (z, \ \alpha(G_s)) \qquad (s \in E)$$

es $\beta$-integrable, y

$$\int_E \phi_2 \ (z, \ \alpha(G.)) \, d\beta = \phi_4 \left(z, \ \int_E \alpha(G.) \, d\beta\right).$$

*Demostración.*— Sean $\lambda$: $\mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ y $B \in \mathcal{B}_X$ como en la Observación 3. Fijado cualquier $z \in Z$, pongamos

$$C = \phi_2 \ (z, B) = \{\phi_2 \ (z, x) \ / \ x \in B\}.$$

Se comprueba trivialmente que $C$ es acotado, convexo y equilibrado; que $\phi_2 \ (z, X_B) = V_C$; y que $p_C \ (\phi_2 \ (z, x)) \leqslant p_B \ (x)$, para todo $x \in X_B$.

Sea $\mathcal{H}_z$ el conjunto de los $G \in \mathcal{Q} \otimes \mathcal{C}$ tales que la aplicación $\phi_2 (z, \alpha (G.))$ es $(\beta, C)$-integrable, y además

$$\int_E \phi_2 (z, \alpha (G.))\, d\beta = \phi_4 \left(z, \int_E \alpha (G.)\, d\beta\right).$$

De la Proposición 1 resulta que $\mathcal{Q} \times \mathcal{C} \subset \mathcal{H}_z$. Por otra parte, no es difícil probar, utilizando las propiedades de $\lambda$, así como el Teorema 1 de R. Chivukula y Sastry [10](*), que $\mathcal{H}_z$ es una $\sigma$-álgebra. Y, por consiguiente,

$$\mathcal{H}_z = \mathcal{Q} \otimes \mathcal{C}. \qquad \text{C.Q.D.}$$

De la Proposición 4 resulta el siguiente:

*5.* ***Teorema.***– Supongamos que $\alpha$ es Mackey-acotada y que $\beta$ tiene la $**$-propiedad (respecto de $\phi_1$ y $\phi_3$).
Si $F$: $\Omega \times E \to Z$ es una función simple, se verifica:

5.1. La aplicación

$$F(\cdot, s)\colon \Omega \to Z, \quad t \to F(t, s)$$

es simple, para cada $s \in E$.

5.2. La aplicación

$$\int_\Omega F(\cdot, -)\, d\alpha\colon E \to V, \quad s \to \int_\Omega F(\cdot, s)\, d\alpha$$

es $\beta$-integrable.

5.3. $$\int_{\Omega \times E} F\, d(\alpha \otimes \beta) = \int_E \left( \int_\Omega F(\cdot, -)\, d\alpha \right) d\beta.$$

*6.* ***Lema.***– Con las hipótesis hechas en la Observación 3, si $V$ es un espacio normado (con norma $q$), la medida $\alpha$ tiene la $*'$-propiedad (respecto de $\phi_2$)(**), y la medida $\beta$ tiene la $*'$-propiedad (respecto de $\phi_3$)(***), entonces la medida producto $\alpha \otimes \beta$ tiene la $*'$-propiedad (respecto de $\phi_4$).

*Demostración.*– Sean $B \in \mathcal{B}_Z$ y $r \in \mathcal{W}$.
Pongamos $B_q^1 = \{x \in V \,/\, q(x) \leqslant 1\}$. ($B_q^1 \in \mathcal{B}_V$, obviamente).

---

(*) Obsérvese que la medida $\beta$ tiene la $**$-propiedad respecto de $\phi_3$ (y $\phi_1$), por hipótesis.

(**) Obsérvese que, al ser $V$ normado, la $(*', \phi_2)$-propiedad es equivalente a la $(**', \phi_2)$-propiedad.

(***) También por ser $V$ normado, la $(*', \phi_3)$-propiedad es equivalente a la $(*, \phi_3)$-propiedad.

Por hipótesis, existen medidas finitas contablemente aditivas $\mu_B: \mathscr{A} \to \mathbb{R}^+$ y $\nu_r: \mathscr{C} \to \mathbb{R}^+$ tales que $\|\alpha\|_{B,q} \leqslant \mu_B$ y $\|\beta\|_{B^1_q, r} \leqslant \nu_r$.

Del Teorema 4.7 de [13] (teorema 2 de [10]) resulta que la medida producto $\mu_B \otimes \nu_r$: $\mathscr{A} \otimes \mathscr{C} \to \mathbb{R}^+$ existe, es finita, contablemente aditiva y positiva, y está dada por

$$(\mu_B \otimes \nu_r)(G) = \int_E \mu_B (G.)\, d\nu_r \qquad (G \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{C}).$$

Veamos que $\|\alpha \otimes \beta\|_{B,r} \leqslant \mu_B \otimes \nu_r$.

1) Un cálculo permite probar la desigualdad

$$\|\alpha \otimes \beta\|_{B,r}(G) \leqslant \sup_{s \in D} \|\alpha\|_{B,q}(G_s) \cdot \|\beta\|_{B^1_q, r}(D) +$$

$$+ \sup_{s \in E-D} \|\alpha\|_{B,q}(G_s) \cdot \|\beta\|_{B^1_q, r}(E-D), \tag{6.1}$$

para todo $G \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{C}$ y $D \in \mathscr{C}$.
Denotemos por $\mathscr{H}$ al conjunto de todos los $G \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{C}$ tales que la aplicación $\|\alpha\|_{B,q}(G.)$: $E \to \mathbb{R}^+$ –dada por $\|\alpha\|_{B,q}(G.)(s) = \|\alpha\|_{B,q}(G_s)$ $(s \in E)$– es medible (en el sentido de las imágenes inversas).
Ya que $\|\alpha\|_{B,q} \leqslant \mu_B$, se tiene que $\mathscr{H}$ es una clase monótona; y puesto que contiene al álgebra engendrada por $\mathscr{A} \times \mathscr{C}$, debe ser $\mathscr{H} = \mathscr{A} \otimes \mathscr{C}$.
Del Teorema de Egoroff resulta ahora, teniendo en cuenta la desigualdad (6.1) (obsérvese que $\|\alpha\|_{B,q} \leqslant \mu_B$, y $\|\beta\|_{B^1_q, r} \leqslant \nu_r$) que, si $(G_n)_{n \in N} \subset \mathscr{A} \otimes \mathscr{C}$ es una sucesión disjunta, entonces la sucesión

$$\left(\|\alpha \otimes \beta\|_{B,r}\left(\bigcup_{i > n} G_i\right)\right)_{n \in N}$$

converge a cero.

2) Puesto que $\mu_B$ y $\nu_r$ son medidas positivas, se tiene que, si

$$\int_E \mu_B (G.)\, d\nu_r = (\mu_B \otimes \nu_r)(G) = 0 \qquad (G \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{C}),$$

entonces existe $L \in \mathscr{C}$ tal que $\nu_r(L) = 0$ y $\mu_B(G_s) = 0$, para todo $s \in E - L$. Y, por tanto, $\|\beta\|_{B^1_q, r}(L) = 0$; y $\|\alpha\|_{B,q}(G_s) = 0$, para todo $s \in E - L$.
Se sigue de la desigualdad (6.1) que ha de ser $\|\alpha \otimes \beta\|_{B,r}(G) = 0$.

3) Se deduce de 1) y 2) que $\|\alpha \otimes \beta\|_{B,r} \leqslant \mu_B \otimes \nu_r$, como queríamos probar.

*6.1. Observación.*— Con las hipótesis anteriores, si tanto $\alpha$ como $\beta$ tienen la $**$-propiedad —con relación a $\phi_2$ y $\phi_3$, respectivamente—, entonces $\alpha \otimes \beta$ también la tiene —respecto de $\phi_4$—.

*7.* ***Sobre la "asociatividad" del producto de medidas.***— Sean $(M, \Sigma)$ un espacio medible, y $\gamma\colon \Sigma \to Z$ una medida contablemente aditiva.

Se comprueba fácilmente que, si identificamos los conjuntos $M \times (\Omega \times E)$, $M \times \Omega \times E$ y $(M \times \Omega) \times E$ de la manera habitual, entonces

$$\Sigma \otimes (\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}) = \sigma(\Sigma \times \mathcal{A} \times \mathcal{C}) = (\Sigma \otimes \mathcal{A}) \otimes \mathcal{C}.$$

*7.1. Teorema.*—

7.1.1. Si las medidas producto $(\gamma \otimes \alpha) \otimes \beta$ y $\gamma \otimes (\alpha \otimes \beta)$ existen, entonces coinciden.

7.1.2. Si $V$ es normado, las medidas $\gamma$ y $\alpha$ son Mackey-acotadas, $\alpha$ tiene la $(**, \phi_2)$-propiedad, y $\beta$ tiene la $**$-propiedad respecto de $\phi_1$ y $\phi_3$, entonces las medidas producto $\gamma \otimes \alpha$, $\alpha \otimes \beta$, $(\gamma \otimes \alpha) \otimes \beta$ y $\gamma \otimes (\alpha \otimes \beta)$ existen.

*Demostración.*— Se comprueba fácilmente que las medidas contablemente aditivas $(\gamma \otimes \alpha) \otimes \beta$ y $\gamma \otimes (\alpha \otimes \beta)$, si existen, coinciden sobre $\Sigma \times \mathcal{A} \times \mathcal{C}$; de donde se sigue 7.1.1.

Supongamos ahora que se verifican las hipótesis de 7.1.2.

Por ser $\gamma$ Mackey-acotada y tener $\alpha$ la $(**, \phi_2)$-propiedad, la medida producto $\gamma \otimes \alpha\colon \Sigma \otimes \mathcal{A} \to V$ existe (ver 3). Además, es Mackey-acotada, puesto que $V$ es metrizable. Y ya que $\beta$ tiene la $(**, \phi_3)$-propiedad, se sigue que la medida producto $(\gamma \otimes \alpha) \otimes \beta\colon (\Sigma \otimes \mathcal{A}) \otimes \mathcal{C} \to W$ existe.

Por otra parte, $\alpha$ es Mackey-acotada y $\beta$ tiene la $(**, \phi_1)$-propiedad; por tanto, la medida $\alpha \otimes \beta\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{C} \to U$ existe. Puesto que $V$ es normado, y las medidas $\alpha$ y $\beta$ tienen la $**$-propiedad con relación a $\phi_2$ y $\phi_3$, respectivamente, resulta (ver 6.1) que $\alpha \otimes \beta$ tiene la $(**, \phi_4)$-propiedad.

Como además $\gamma$ es Mackey-acotada, existe la medida producto

$$\gamma \otimes (\alpha \otimes \beta)\colon \Sigma \otimes (\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}) \to W. \qquad \text{C.Q.D.}$$

*7.2. Corolario.*— Con las hipótesis de 7.1.2, las aplicaciones

$$\begin{array}{llll} \gamma(G_0)\colon \Omega \times E \to Z & \quad \text{y} \quad & \gamma(G_{.s})\colon \Omega \to Z \\ \qquad (t, v) \to \gamma(G_{(t,v)}) & & \qquad t \to \gamma(G_{(t,s)}) \end{array}$$

son integrables con respecto a las medidas $\alpha \otimes \beta$ y $\alpha$, respectivamente, para cada $G \in \Sigma \otimes (\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}) = (\Sigma \otimes \mathcal{A}) \otimes \mathcal{C}$ y cada $s \in E$; la aplicación

$$(\gamma \otimes \alpha)(G_{.}) : E \longrightarrow V$$

$$s \to (\gamma \otimes \alpha)(G_s) = \int_\Omega \gamma(G_{.s})\, d\alpha$$

es $\beta$-integrable; y se verifica que

$$\int_{\Omega \times E} \gamma(G_0)\, d(\alpha \otimes \beta) = (\gamma \otimes (\alpha \otimes \beta))(G) = ((\gamma \otimes \alpha) \otimes \beta)(G) =$$

$$= \int_E (\gamma \otimes \alpha)(G_{.})\, d\beta = \int_E \left(\int_\Omega \gamma(G_{.\_})\, d\alpha\right) d\beta \qquad (G \in \sigma(\Sigma \times \mathcal{A} \times \mathcal{C})).$$

(Con lo cual obtenemos un nuevo resultado de tipo Fubini.)

## *8. Un teorema de Fubini.–*

*8.1. Definición.–* Diremos que una función $F$: $\Omega \times E \to Z$ es *fuertemente integrable* si existen una sucesión $(F_n)_{n \in N}$ de funciones simples (de $\Omega \times E$ en $Z$), $B \in \mathcal{B}_Z$, y $K > 0$, tales que:

i) $F(\Omega \times E) \subset Z_B$; y $F_n(\Omega \times E) \subset Z_B$, para todo $n \in N$.

ii) La sucesión $(p_B(F - F_n))_{n \in N}$ converge puntualmente a cero.

iii) $\sup_{(t,s) \in \Omega \times E} p_B(F_n(t,s)) \leqslant K$, para todo $n \in N$.

Obsérvese que, si la medida producto $\alpha \otimes \beta$ existe y tiene la $(*', \phi_4)$-propiedad, entonces toda función fuertemente integrable es $(\alpha \otimes \beta)$-integrable en el sentido de Rao Chivukula y Sastry [10] (ver también [4]).

Nótese también que las funciones fuertemente integrables forman un espacio vectorial; y que, si $F$ es fuertemente integrable, entonces $F \cdot \chi_G$ también lo es, para todo $G \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$.

*8.2. Teorema.–* Supongamos que $V$ es un espacio de Banach (con norma $q$), la medida $\alpha$ es Mackey-acotada y tiene la $(*', \phi_2)$-propiedad(*), y la medida $\beta$ tiene la $**$-propiedad respecto de $\phi_1$ y $\phi_3$.

Si $F$: $\Omega \times E \to Z$ es una función fuertemente integrable, entonces se verifican:

8.2.1. $F$ es $(\alpha \otimes \beta)$-integrable.

8.2.2. La aplicación

$$F(.,s) : \Omega \to Z$$
$$t \to F(t,s)$$

(*) Por ser $V$ normado, la $(*', \phi_2)$-propiedad es equivalente a la $(**', \phi_2)$-propiedad.

es $\alpha$-integrable, para cada $s \in E$.

8.2.3. La aplicación

$$\int_\Omega F(\cdot, -)\, d\alpha : E \to V$$
$$s \to \int_\Omega F(\cdot, s)\, d\alpha$$

es $\beta$-integrable.

8.2.4. $\displaystyle\int_{\Omega \times E} F\, d(\alpha \otimes \beta) = \int_E \left(\int_\Omega F(\cdot, -)\, d\alpha\right) d\beta.$

*Demostración.*— Por ser $F$ fuertemente integrable, existen un conjunto $B \in \mathscr{B}_Z$, $K > 0$, y una sucesión $(F_n)_{n \in N}$ de funciones simples ( de $\Omega \times E$ en $Z$), verificando las condiciones i), ii) y iii) de 8.1.

8.2.1. $F$ es evidentemente $(\alpha \otimes \beta)$-integrable(*), y además se tiene que

$$\int_{\Omega \times E} F\, d(\alpha \otimes \beta) = \lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega \times E} F_n\, d(\alpha \otimes \beta). \tag{8.1}$$

8.2.2. Se comprueba inmediatamente que la aplicación $F(\cdot, s)$: $\Omega \to Z$ es fuertemente integrable (y, por tanto, $\alpha$-integrable), para cada $s \in E$; y que

$$\int_\Omega F(\cdot, s)\, d\alpha = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega F_n(\cdot, s)\, d\alpha \qquad (s \in E). \tag{8.2}$$

8.2.3. Del Teorema 5 resulta que la aplicación

$$\int_\Omega F_n(\cdot, -)\, d\alpha : E \to V$$
$$s \to \int_\Omega F_n(\cdot, s)\, d\alpha$$

es $\beta$-integrable, para cada $n \in N$ (pues las $F_n$ son simples).

Además, se verifica (ver [10]) que

$$q\left(\int_\Omega F_n(\cdot, -)\, d\alpha\right) \leqslant K \cdot \|\alpha\|_{B, q}(\Omega),$$

para todo $s \in E$ y $n \in N$. Y $\|\alpha\|_{B,q}(\Omega) < +\infty$, ya que $\alpha$ tiene la $(*', \phi_2)$-propiedad.

(*) Obsérvese que $\alpha \otimes \beta$ tiene la $(*', \phi_4)$-propiedad (de hecho, la $(**', \phi_4)$-propiedad), según resulta del Lema 6.

Puesto que $V$ es normado (con norma $q$), y la medida $\beta$ tiene la $(**, \phi_3)$-propiedad, el Teorema 1 de [10] nos asegura que la función

$$\int_\Omega F(\cdot, -)\, d\alpha\colon\ E \to V$$

es $\beta$-integrable, y que

$$\int_E \left(\int_\Omega F(\cdot, -)\, d\alpha\right) d\beta = \lim_{n\to+\infty} \int_E \left(\int_\Omega F_n(\cdot, -)\, d\alpha\right) d\beta. \qquad (8.3)$$

8.2.4. De las igualdades (8.1) y (8.3) resulta, aplicando el Teorema 5 (ya que las $F_n$ son simples, y $W$ es Hausdorff), que

$$\int_{\Omega\times E} F\, d(\alpha\otimes B) = \int_E \left(\int_\Omega F(\cdot, -)\, d\alpha\right) d\beta. \qquad \text{C.Q.D.}$$

*8.3. Observación.*— En el caso de ser $\Omega$ y $E$ espacios topológicos localmente convexos y separados; $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{C}$ sus $\sigma$-álgebras de Borel respectivas; $X$, $Y$, $Z$, $U$ y $W$ espacios de Banach; las medidas $\alpha$ y $\beta$ de variación acotada, y $\mathcal{B}(E)$ separable, el anterior Teorema 8.2 se deduce del Teorema III.2 de Huneycutt [9].

*9.* ***Un nuevo teorema de tipo Fubini.***— Supondremos que $V$ es un espacio de Banach (con norma q), la medida $\alpha$ es Mackey-acotada y tiene la $(*, \phi_2)$-propiedad (*), y la medida $\beta$ tiene la $**$-propiedad respecto de $\phi_1$ y $\phi_3$.

*9.1. Definición.*— Diremos que la medida producto $\alpha\otimes\beta$ tiene la *$\hat{**}$-propiedad fuerte* si existen dos medidas finitas contablemente aditivas $\mu\colon \mathcal{Q}\to \mathbb{R}^+$ y $\nu\colon \mathcal{C}\to\mathbb{R}^+$ tales que $\|\alpha\|_{B,q} \leqslant \mu$, $\|\beta\|_{B^1_q, r} \leqslant \nu$, y $\|\alpha\otimes\beta\|_{B,r} \Leftrightarrow \mu\otimes\nu$ (es decir, $\|\alpha\otimes\beta\|_{B,r}(G) = 0$ si y sólo si $(\mu\otimes\nu)(G) = 0$ $(G\in \mathcal{Q}\otimes\mathcal{C})$), para cualquier $B\in\mathcal{B}_Z$ y $r\in\mathcal{W}$(**).

*9.2. Teorema.*— Supongamos que $\alpha\otimes\beta$ tiene la $\hat{**}$-propiedad fuerte. Si $F\colon \Omega\times E\to Z$ es una función $(\alpha\otimes\beta)$-medible y $(\alpha\otimes\beta)$-esencialmente acotada(***), entonces se verifica:

---

(*) Puesto que $V$ es normado, la $(*, \phi_2)$-propiedad es equivalente a la $(**, \phi_2)$-propiedad.
(**) Obsérvese que $\|\alpha\otimes\beta\|_{B,r} \leqslant \mu\otimes\nu$, según se vio en la demostración del Lema 6.
(***) En el sentido de [10].

9.2.1. $F$ es $(\alpha \otimes B)$-integrable.

9.2.2. Existe un conjunto $D \in \mathscr{C}$, $\beta$-nulo (respecto de $\phi_3$), tal que la aplicación

$$\begin{aligned} F(\cdot, s)\colon\ \Omega &\to Z \\ t &\to F(t,s) \end{aligned}$$

es $\alpha$-integrable, para cada $s \in E - D$; y además:

9.2.3. La aplicación

$$h = \int_\Omega F(.,o)\, d\alpha\colon E \longrightarrow V$$

$$s \to h(s) = \begin{cases} \int_\Omega F(\cdot, s)\, d\alpha, & \text{si } s \in E - D \\ 0 & , \text{ si } s \in D \end{cases}$$

es $\beta$-integrable.

9.2.4. $\int_{\Omega \times E} F\, d(\alpha \otimes \beta) = \int_E \left( \int_\Omega F(\cdot, o)\, d\alpha \right) d\beta.$

*Demostración.*-- Ya que $F$ es $(\alpha \otimes \beta)$-medible y $(\alpha \otimes \beta)$-esencialmente acotada, existen (ver [10]) un conjunto $B \in \mathscr{B}_Z$, una sucesión $(F_n)_{n \in N}$ de funciones simples (de $\Omega \times E$ en $Z$), un conjunto $H \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{C}$, y $K > 0$, verificando:

i) $F(\Omega \times E) \subset Z_B$; y $F_n(\Omega \times E) \subset Z_B$, para todo $n \in Z$.

ii) $H$ es $(\alpha \otimes \beta)$-nulo.

iii) La sucesión $(p_B(F - F_n))_{n \in N}$ converge puntualmente a cero en $\Omega \times E - H$.

iv) $\sup\limits_{(t,s) \in \Omega \times E - H} p_B(F_n(t,s)) \leqslant K$, para todo $n \in N$.

Puesto que la medida producto $\alpha \otimes \beta$ tiene la $\hat{*}$-propiedad fuerte, existen medidas finitas contablemente aditivas $\mu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}^+$ y $\nu\colon \mathscr{C} \to \mathbb{R}^+$ tales que $\|\alpha\|_{B',q} \leqslant \mu$, $\|\beta\|_{B^1_q, r} \leqslant \nu$, y $\|\alpha \otimes \beta\|_{B',r} \Leftrightarrow \mu \otimes \nu$, para todo $r \in \mathscr{W}$ y $B' \in \mathscr{B}_Z$.

9.2.1. Se comprueba inmediatamente (ver [10]) que $F$ es $(\alpha \otimes \beta)$-integrable, y que

$$\int_{\Omega \times E} F\, d(\alpha \otimes \beta) = \int_{\Omega \times E - H} F\, d(\alpha \otimes \beta) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega \times E} F_n\, d(\alpha \otimes \beta). \tag{9.1}$$

9.2.2. Ya que $H$ es $(\alpha \otimes \beta)$-nulo, y $\|\alpha \otimes \beta\|_{B, r} \Leftrightarrow \mu \otimes \nu$ (para cualquier seminorma $r \in \mathscr{W}$), se verifica que

$$\int_E \mu(H.)\, d\nu = (\mu \otimes \nu)(H) = 0;$$

de donde resulta (obsérvese que tanto $\mu$ como $\nu$ son medidas positivas) que existe $D \in \mathscr{C}$ tal que $\nu(D) = 0$ y $\mu(H_s) = 0$, para cada $s \in E - D$.

Por tanto, $D$ es $\beta$-nulo (respecto de $\phi_3$); y si $s \in E - D$, entonces $H_s$ es $\alpha$-nulo.

Se sigue que la aplicación $F(\cdot, s)$: $\Omega \to Z$ es $\alpha$-medible y $\alpha$-esencialmente acotada (por tanto, $\alpha$-integrable), para cada $s \in E - D$; y que

$$\int_\Omega F(\cdot, s)\, d\alpha = \int_{\Omega - H_s} F(\cdot, s)\, d\alpha =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega F_n(\cdot, s)\, d\alpha \qquad (s \in E - D). \tag{9.2}$$

9.2.3. Puesto que las $F_n$ son simples, del Teorema 5 resulta que la aplicación

$$\int_\Omega F_n(\cdot, -)\, d\alpha: \; E \to V$$
$$s \to \int_\Omega F_n(\cdot, s)\, d\alpha$$

es $\beta$-integrable, para cada $n \in N$.

Además,

$$q\left(\int_\Omega F_n(\cdot, s)\, d\alpha\right) = q\left(\int_{\Omega - H_s} F_n(\cdot, s)\, d\alpha\right) \leqslant K \cdot \|\alpha\|_{B, q}(\Omega),$$

para todo $s \in E - D$ y todo $n \in N$.

Y $\|\alpha\|_{B, q}(\Omega) < +\infty$, porque $\|\alpha\|_{B, q} \leqslant \mu$.

Ya que $D$ es $\beta$-nulo (respecto de $\phi_3$), $\beta$ tiene la $(**, \phi_3)$-propiedad, y $V$ es normado (con norma $q$), del Teorema 1 de Rao Chivukula y Sastry [10] resulta que la aplicación

$$h = \int_\Omega F(\cdot, o)\, d\alpha : E \to V$$

$$s \to h(s) = \begin{cases} \int_\Omega F(\cdot, s)\, d\alpha, & \text{si } s \in E - D \\ 0, & \text{si } s \in D \end{cases}$$

es $\beta$-integrable, y que

$$\int_E \left( \int_\Omega F(\cdot, o)\, d\alpha \right) d\beta = \int_{E-D} \left( \int_\Omega F(\cdot, o)\, d\alpha \right) d\beta =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \int_E \left( \int_\Omega F_n(\cdot, -)\, d\alpha \right) d\beta. \tag{9.3}$$

9.2.4. De las igualdades (9.1) y (9.3) resulta, aplicando el Teorema 5 (las $F_n$ son simples), que

$$\int_{\Omega \times E} F\, d(\alpha \otimes \beta) = \int_E \left( \int_\Omega F(\cdot, o)\, d\alpha \right) d\beta,$$

como queríamos demostrar.

## BIBLIOGRAFIA


[1] BALLVE LANTERO, M. E.: *Integración vectorial bilineal.* Tesina. UNED. 1984.

[2] BARTLE, R. G.: *A general bilinear vector integral.* Studia Math. 15 (1956), 337-352.

[3] BHASKARA RAO, M.: *Countable additivity of a set function induced by two vector-valued measures.* Indiana Univ. Math. J. 21 (1972), 847-848.

[4] BRAVO DE LA PARRA, R.: *Tópicos en integración bilineal vectorial.* Tesis Doctoral. Madrid, 1986.

[5] DUCHON, M.: *On the projective tensor product of vector-valued measures, II.* Mat. Cas. 19 (1969), 228-234.

[6] DUCHON, M. Y KLUVANEK, I.: *Inductive tensor product of vector-valued measures.* Mat. Cas. 17 (1967), 108-112.

[7] DUDLEY, R. M. Y PAKULA, L.: *A counter-example on the inner product of measures.* Indiana Univ. Math. J. 21 (1972), 843-845.

[8] FERNANDEZ Y FERNANDEZ-ARROYO, F. J.: *Producto de medidas valoradas en espacios localmente convexos.* Tesis Doctoral. Madrid, 1987.

[9] HUNEYCUTT, J. E., JR.: *Products and convolutions of vector valued set functions.* Studia Math. 41 (1972), 119-129.

[10] RAO CHIVUKULA, R. Y SASTRY, A. S.: *Product vector measures via Bartle integrals.* J. Math. Anal. Appl. 96 (1983), 180-195.

[11] RODRIGUEZ SALAZAR, S.: *Integración general en espacios localmente convexos.* Tesis Doctoral. Madrid, 1985.

[12] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 73 (1979), 361-387.

[13] SIVASANKARA, S. A.: *Vector integrals and product of vector measures.* Ph. D. Thesis. Univ. Microfilm Inter. Michigan (1983).

[14] SWARTZ, C.: *Products of vector measures.* Mat. Cas. 24 (1974), 289-299.

[15] ——.: *A generalization of a theorem of Duchon on products of vector measures.* J. Math. Anal. Appl. 51 (1975), 621-628.

Departamento de Matemáticas Fundamentales
Facultad de Ciencias
U.N.E.D.
Ciudad Universitaria
28040-Madrid