Polígonos hiperbólicos con circunferencia circunscrita

Por Ernesto Martinez

Recibido: 25 marzo 1987

Presentado por el académico numerario D. Enrique Linés

1. INTRODUCCION

En [1] Beardon resolvió el problema de la construcción explícita de un polígono hiperbólico de n lados con ángulos prefijados en sus vértices. Los ángulos son menores que π y tales que su suma es menor que $(n-2)\pi$. Para cualquier colección ordenada de ángulos en estas condiciones puede construirse el polígono y es único salvo isometrías del plano hiperbólico. El polígono obtenido tiene además la propiedad adicional de que las bisectrices de los ángulos se cortan en un punto, es decir, hay una circunferencia inscrita en el polígono. Surge de modo natural la cuestión de estudiar las condiciones que deben satisfacer los ángulos para que sea posible construir un polígono hiperbólico con dichos ángulos en sus vértices y con una circunferencia circunscrita al mismo. Este problema lo resolvemos en este trabajo. Obtenemos que los ángulos no pueden ser arbitrarios y hallamos las condiciones que deben cumplir. Si el polígono puede construirse, es único salvo isometrías cuando n es impar, pero su construcción depende de un parámetro en el caso de n par. Inicialmente resolvimos el problema cuando el centro de la circunferencia circunscrita es un punto interior del polígono [3]. En este trabajo veremos también los casos cuando el centro de la circunferencia es un punto del borde del polígono o es un punto exterior a él. Por último, expresamos el radio de la circunferencia circunscrita en función de los ángulos.

2. POLIGONOS

Como modelo del plano hiperbólico usaremos el disco unidad. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el centro de la circunferencia circunscrita coincide con el origen O. Entonces puede ocurrir que $O \in \mathring{P}$, $O \in \partial P$ ó que $O \notin P$ donde $\mathring{P}$ y ∂P designan el interior y el borde del polígono P respectivamente.

Una condición necesaria para la existencia de un polígono hiperbólico con ángulos ζ_i, $i = 1, \ldots, n$, es [2, p. 155],

$$A = \quad (n-2)\pi - \sum_{1}^{n} \zeta_i \quad > 0 \tag{2.1}$$

Si alguno de los ángulos es nulo, entonces el radio de la circunferencia circunscrita es infinito y, por tanto, todo ángulo debe ser nulo. Así pues, supondremos en lo que sigue,

$$0 < \zeta_i < \pi \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2.2}$$

Designamos por S_I la suma de los ángulos para i impar y por S_P la suma de los ángulos para i par. Sea,

$$z_i = \zeta_i - \zeta_{i-1} + \ldots \pm \zeta_1$$

y sea,

$$X = (0,\ \pi/2) \cap \Big(\bigcap_{\substack{i \\ \text{impar}}} (z_i - \pi/2,\ z_i)\Big) \cap \Big(\bigcap_{\substack{i \\ \text{par}}} (-z_i,\ \pi/2 - z_i)\Big)$$

podemos enunciar entonces el siguiente teorema,

Teorema 1.— Dada una colección ordenada de ángulos ζ_i que satisface las condiciones (2.1) y (2.2) existe un polígono hiperbólico P con ángulos ζ_i en sus vértices y con circunferencia circunscrita de centro $P \in \overset{\circ}{P}$ si y solo si,

a) Si n es impar entonces $[(S_I - S_P)/2] \in X$.
b) Si n es par entonces $S_I = S_P$ y $X \neq \emptyset$. En este caso para cada $\theta \in X$ podemos construir un polígono.

Demostración.— Primero supongamos que el polígono existe. Por la figura 1 se tiene que el sistema,

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_n &= \zeta_1 \\ \theta_{i-1} + \theta_i &= \zeta_i \qquad i = 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{2.3}$$

ha de tener solución con $0 < \theta_i < \pi/2$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Resolviendo (2.3) obtenemos,

$$\theta_i = z_i - \theta_n \qquad \text{para } i \text{ impar} \tag{2.4}$$

$$\theta_i = z_i + \theta_n \qquad \text{para } i \text{ par} \tag{2.5}$$

además, $\theta_n = (S_I - S_P)/2$, si n es impar ó $S_I = S_P$ si n es par.

En el primer caso el sistema tiene solución única. En el segundo el sistema es indeterminado y podemos tomar θ_n como parámetro. De (2.4) y (2.5) obtenemos,

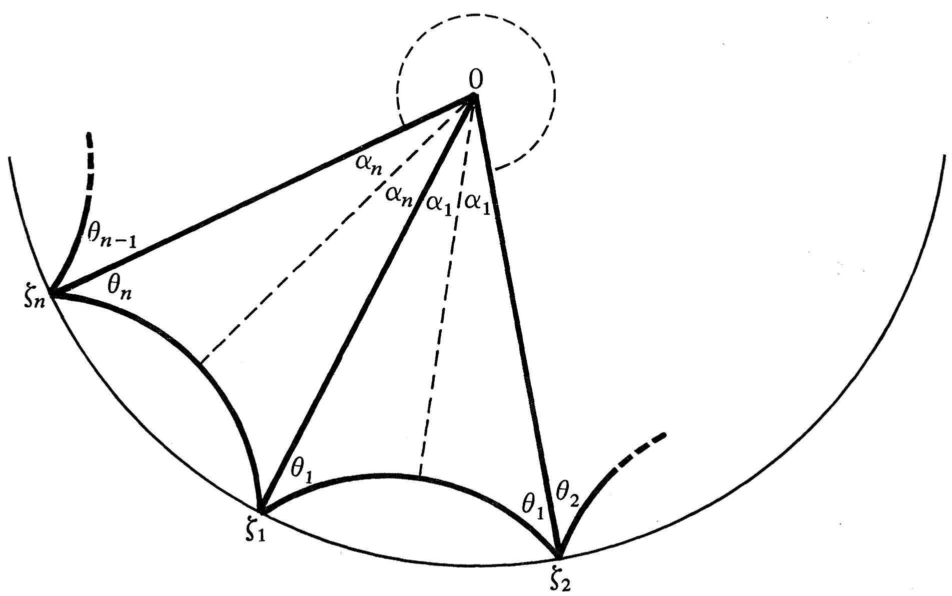

FIGURA 1.

$$\begin{aligned} z_i - \pi/2 < \theta_n < z_i \quad & \text{si } i \text{ impar} \\ -z_i < \theta_n < \pi/2 - z_i \quad & \text{si } i \text{ par} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Por tanto, si n es impar $\theta_n = (S_I - S_P)/2$ ha de pertenecer a X. Si n es par, S_I ha de ser igual a S_P y $\theta = \theta_n$ ha de pertenecer a X.

Veamos ahora que las condiciones son suficientes. Si n es impar, sea $\theta_n = (S_I - S_P)/2$. Si n es par, sea θ_n un valor cualquiera de X. Sean los θ_i definidos por (2.4) y (2.5), entonces los θ_i pertenecen al intervalo $(0, \pi/2)$. Definimos la función

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{arctg}(\operatorname{cotg} \theta_i / \cosh t)$$

Esta función es continua y decreciente para $t \geqslant 0$. Además,

$$\lim_{t \to \infty} \phi(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \phi(0) = \pi + \frac{A}{2}.$$

Por tanto, existe un valor r tal que $\phi(r) = \pi$. Así pues,

$$\sum_{1}^{n} \alpha_i = \pi,$$

donde

$$\alpha_i = \operatorname{arctg} (\operatorname{cotg} \theta_i \,/\, \cosh r).$$

Tenemos garantizada la existencia de triángulos como el de la figura 2, que pegados alrededor de O nos dan el polígono. □

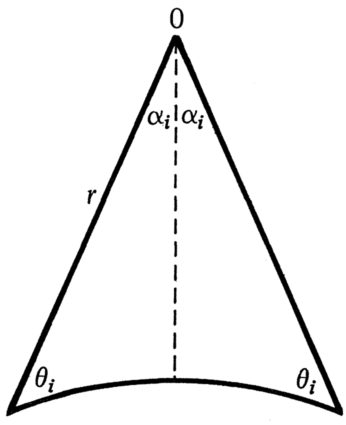

FIGURA 2.

Teorema 2.— Dada una colección ordenada de ángulos ζ_i que satisfacen las condiciones (2.1) y (2.2) existe un polígono hiperbólico P con ángulos ζ_i en sus vértices y con circunferencia circunscrita de centro $O \in \partial P$ si y solo si $S_I = S_P$ y para todo $i < n$, z_i pertenece al intervalo $(0, \pi/2)$.

Demostración.— Supongamos que el polígono existe. Observando la figura 3, tenemos que el sistema,

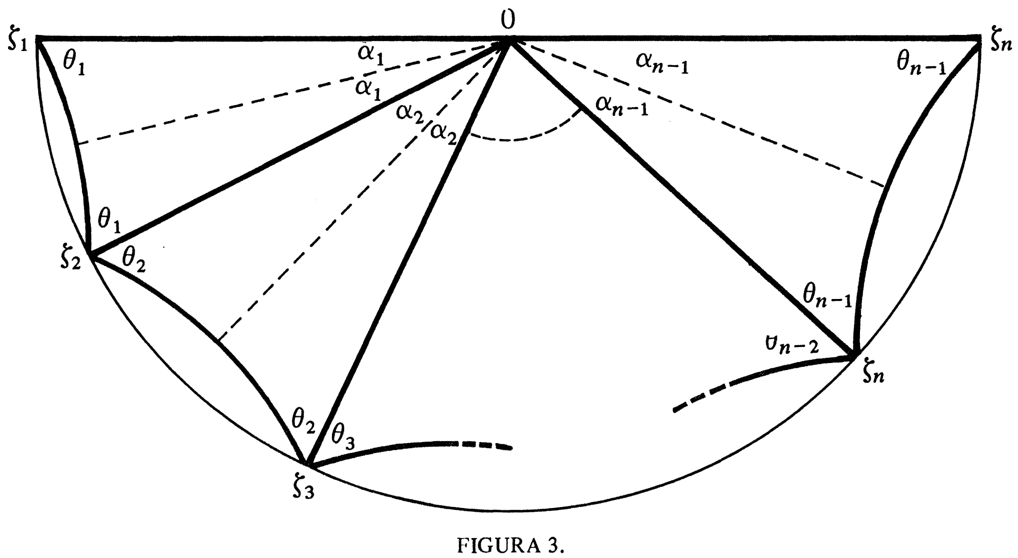

FIGURA 3.

$$\begin{aligned} &\theta_1 = \zeta_1 \\ &\theta_{i-1} + \theta_i = \zeta_i \quad \text{para } i = 2, \ldots, n-1 \\ &\theta_{n-1} = \zeta_n \end{aligned} \tag{2.7}$$

ha de tener solución con $0 < \theta_i < \pi/2$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Resolviendo el sistema (2.7) obtenemos que S_I ha de ser igual a S_P y $\theta_i = z_i$. Por tanto los z_i han de pertenecer a $(0, \pi/2)$ para $i < n$.

Recíprocamente, si los ζ_i satisfacen las condiciones, consideremos la función,

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{arctg}(\operatorname{cotg} \theta_i / \cosh t)$$

Esta función es continua y decreciente para $t \geqslant 0$. Además,

$$\lim_{t \to \infty} \phi(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \phi(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}.$$

Por tanto, existe un valor r tal que $\phi(r) = \pi/2$. Procediendo como en el Teorema 1, obtenemos el polígono. □

Definimos ahora el siguiente conjunto,

$$X^* = (0, \pi/2) \cap \Big(\bigcap_{\substack{i \\ \text{impar}}} (-z_i, \pi/2 - z_i)\Big) \cap \Big(\bigcap_{\substack{i \\ \text{par}}} (z_i - \pi/2, z_i)\Big)$$

Teorema 3.— Dada una colección ordenada de ángulos ζ_i que satisface las condiciones (2.1) y (2.2) existe un polígono hiperbólico con ángulo ζ_i en sus vértices y circunferencia circunscrita de centro $O \notin P$ si y sólo si,

a) Si n es impar entonces $\theta = (S_P - S_I) \in X^*$ y $\operatorname{tg} \theta$ es menor que

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{cotg} \theta_i\right)^{-1}.$$

b) Si n es par entonces $S_I = S_P$ y $X^* \neq \emptyset$. En este caso para cada $\theta \in X^*$ con

$$\operatorname{tg} \theta < \left(\sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{cotg} \theta_i\right)^{-1}$$

existe un polígono.

Demostración.— Como en los casos anteriores, supongamos que existe el polígono. Observemos la figura 4,

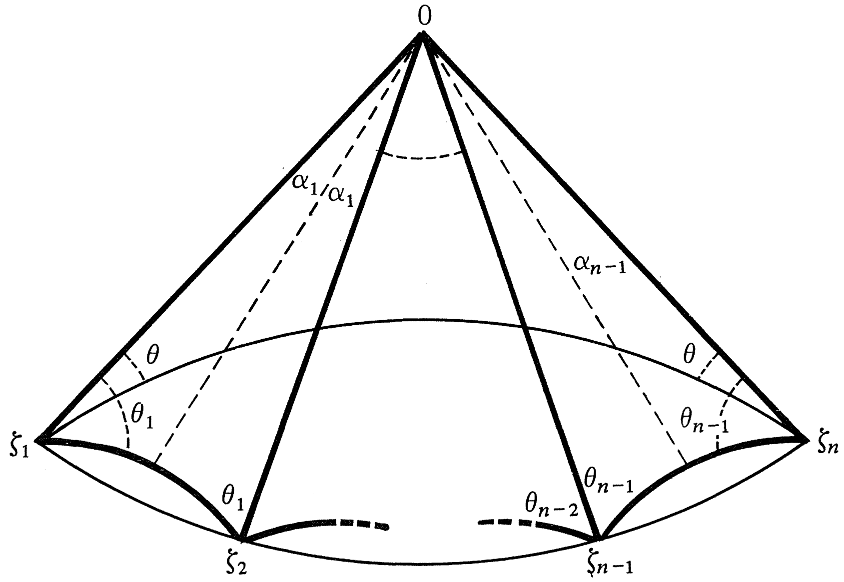

FIGURA 4.

Tenemos que el sistema,

$$
\begin{aligned}
&\theta_1 - \theta = \zeta_1 \\
&\theta_{i-1} + \theta_i = \zeta_i \qquad \text{para } i = 2, \ldots, n-1 \\
&\theta_{n-1} - \theta = \zeta_n
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

ha de tener solución con $0 < \theta_i < \pi/2$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Resolviendo (2.8) obtenemos,

$$
\begin{aligned}
&\theta_i = z_i + \theta \qquad \text{para } i \text{ impar} \\
&\theta_i = z_i - \theta \qquad \text{para } i \text{ par}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

donde $\theta = (S_I - S_P)/2$ si n es impar. Si n es par entonces $S_I = S_P$.

Obtenemos, por tanto,

$$
\begin{aligned}
-z_i < \theta < \pi/2 - z_i \qquad &\text{para } i \text{ impar} \\
z_i - \pi/2 < \theta < z_i \qquad &\text{para } i \text{ par}
\end{aligned}
$$

Supongamos que los ζ_i satisfacen las condiciones. Sea θ igual a $(S_P - S_I)/2$ si n es impar, o bien sea $\theta \in X^*$ si n es par. Sean los θ_i definidos por (2.9). Consideremos la función,

$$
\phi(B) = \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg} B / \operatorname{tg}\theta_i)
$$

Esta función es continua y decreciente para $0 < B < \pi/2 - \theta$. Además

$$\phi(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \phi(\pi/2 - \theta) = (\pi/2 - \theta) + A/2$$

Por otra parte tenemos

$$\phi'(0) = \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{cotg} \alpha_i \operatorname{tg} \theta \qquad \text{y} \qquad \phi''(B) > 0.$$

Entonces si $\phi'(0) < 1$ existe un valor β, $0 < \beta < (\pi/2 - \theta)$ tal que $\phi(\beta) = = \beta$, pero si $\phi'(0)$ es mayor o igual que 1 esto no es posible. Sea r definido por $\cosh r = \operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \theta$. Se tiene entonces que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = \beta.$$

Procediendo como en los anteriores Teoremas, obtenemos el polígono. □

Observación.— En la construcción de [1] si se realiza una permutación de los ángulos ζ_i se puede todavía construir un polígono P' con ángulos $\zeta_{\sigma(i)}$ (que en general no será congruente con P). Pero en nuestro caso puede suceder que no exista el polígono para los ángulos $\zeta_{\sigma(i)}$. Por ejemplo, dados los ángulos 40, 50, 30, 20 y 10 podemos construir un polígono con estos ángulos ya que satisfacen las condiciones del Teorema 1. Sin embargo, para los ángulos 40, 30, 50, 10 y 20 no es posible ya que ahora $X = \emptyset$.

Para los triángulos hiperbólicos obtenemos el siguiente Corolario,

Corolario 1.— Sea T un triángulo hiperbólico de ángulos no nulos ζ_1, ζ_2 y ζ_3. Entonces las mediatrices de los lados de T se cortan en un punto O, donde $O \in \mathring{P}$, $P \in \partial P$ *ó bien* $O \notin P$ si y solo si, respectivamente, cada ángulo es menor que la suma de los otros dos, existe un ángulo igual a la suma de los otros dos, o existe un ángulo, digamos ζ_2, mayor que la suma de los otros dos y tal que

$$\operatorname{tg}[(\zeta_2 - (\zeta_1 + \zeta_3))/2] <$$
$$< [\operatorname{cotg}((\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3)/2) + \operatorname{cotg}((\zeta_3 + \zeta_2 - \zeta_1)/2]^{-1}.$$

La última condición implica que existen triángulos hiperbólicos que no poseen circunferencia circunscrita ya que las mediatrices no se cortan en un punto del disco unidad.

3. EL RADIO

Calculamos aquí el radio de la circunferencia circunscrita a un polígono de los dos primeros tipos. Sea T_k la suma de todos los posibles productos de k elementos formados con las $\operatorname{tg} \alpha_i$. Se tiene la siguiente identidad,

$$\operatorname{tg}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) = (T_1 - T_3 + T_5 - \dots) / (1 - T_2 + T_4 - \dots)$$

Si $O \in \mathring{P}$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi,$$

por tanto

$$T_1 - T_3 + T_5 - \dots = 0.$$

Si $O \in \partial P$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = \pi/2,$$

por tanto

$$1 - T_2 + T_4 - \dots = 0.$$

Como $\operatorname{tg} \alpha_i = \operatorname{cotg} \theta_i / \cosh r$ podemos expresar $\cosh r$ en función de los θ_i y por tanto de los ζ_i. El radio alcanza un mínimo cuando el polígono es regular [4].

En el caso particular de triángulos y cuadriláteros tenemos los siguientes resultados,

Corolario 2.– Sea T un triángulo hiperbólico cuya circunferencia circunscrita tiene radio r. Entonces,

$$\cosh r = (\operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_2 + \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_3 + \operatorname{tg} \theta_2 \cdot \operatorname{tg} \theta_3)^{-1/2}$$

ó

$$\cosh r = (\operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_2)^{-1/2}$$

según que $O \in \mathring{T}$ ó bien $O \in \partial T$.

Corolario 3.– Sea C un cuadrilátero hiperbólico cuya circunferencia circunscrita tiene radio r. Entonces

$$\cosh r = \left[\left(\sum_{i=1}^{4} \operatorname{tg} \theta_i\right) / \left(\sum_{i=1}^{4} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} tg\, \theta_j\right)\right]^{1/2} \qquad (\text{si } O \in \mathring{C})$$

ó

$$\cosh r = \left[\left(\sum_{i=1}^{3} \operatorname{tg} \theta_i\right) / \left(\prod_{i=1}^{3} \operatorname{tg} \theta_i\right)\right]^{1/2} \qquad (\text{si } O \in \partial C)$$

Agradecimientos.— El autor desea expresar su agradecimiento al Profesor A. F. Beardon por sus amables sugerencias, así como a la CAICYT, por la subvención parcial de este trabajo.

BIBLIOGRAFIA

[1] BEARDON, A. F.: "Hyperbolic polygons and Fuchsian groups". J. London Math. Soc. (2) 20, 1979, 247-254.

[2] BEARDON, A. F.: *The geometry of discrete groups.* GTM 91., Springer-Verlag, New York, 1983.

[3] MARTINEZ, E.: *Sobre la Geometría de las Regiones Fundamentales de los grupos Cristalográficos No Euclídeos.* Tesis Doctoral. Universidad Complutense. Madrid, 1985.

[4] NÄÄTÄNEN, M.: "Regular *n*-gons and Fuchsian groups". Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Series A.I. Mathematica, vol. 7, 1982, 291-300.

Departamento de Matemáticas Fundamentales
UNED