Ordenes de los automorfismos de las superficies de Klein con borde, de género topológico uno

Por J. A. BUJALANCE

Recibido: 4 de junio de 1986.

Presentado por el académico numerario D. Enrique Linés.

Abstract

In this work we obtain all possible orders of the automorphisms of bordered Klein sufaces of genus 1, and besides the signatures of *NEC* groups associated to these automorphisms are characterized.

1. INTRODUCCION

En este trabajo se obtienen todos los órdenes posibles de los automorfismos de las superficies de Klein con borde U/Γ (U semiplano complejo superior; Γ grupo *NEC* de superficie), de género 1, así como la caracterización de las signaturas de los grupos *NEC* Γ' tal que Γ'/Γ nos de el automorfismo para U/Γ de orden deseado.

En el caso de superficies de género 0, estos órdenes fueron estudiados por Heins [7] y Bujalance [4]. En el caso de superficies con género topológico 1, May [10] obtuvo que si Φ es un automorfismo, de un todo con k componentes en el borde dotado de estructura de superficie de Klein, entonces el orden de Φ es menor o igual que máx $\{6, K\}$.

2. GRUPOS NEC Y SUPERFICIES DE KLEIN.

Un grupo *NEC* es un subgrupo discreto Γ del grupo de isometrias del plano no euclideo $U(U = \{z \in \mathbb{C}: Im\, z > 0\})$ con espacio cociente compacto, incluyendo elementos que invierten la orientación.

Los grupos *NEC* se clasifican de acuerdo con su signatura, que es un símbolo que presenta la forma:

$$(g; \pm; [m_1 \dots m_t]; \{(n_{i1} \dots n_{is_i})\ i = 1 \dots k\}),$$

donde g es el género de la superficie U/Γ, el signo $\pm$ indica si la superficie es orientable o no, los $m_i \geqslant 2$ (períodos propios) representan el orden de ramificación de los puntos del interior de la superficie para la proyección canónica p: $U \to U/\Gamma$, los $n_{ij} \geqslant 2$ (períodos de los ciclo–periodos) representan los órdenes de ramificación de los puntos de la frontera de la superficie para la aplicación canónica anterior, y k es el número de agujeros de la superficie.

La signatura de un grupo *NEC* determina una presentación del mismo dada por los generadores

i) $x_1, \ldots, x_t$
ii) $e_1, \ldots, e_k$
iii) $c_{10}, \ldots, c_{1s_1}, \ldots, c_{k0}, \ldots, c_{ks_k}$
iv) (si el signo es +) $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$.
(si el signo es −) $d_1, \ldots\ldots, d_g$,

y las relaciones

i) $x_i^{m_i} = 1,\ i = 1 \ldots t$
ii) $c_{ij-1}^2 = c_{ij}^2 = (c_{ij-1}\, c_{ij})^{n_{ij}} = 1\ (i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, s_i)$
iii) $e_i^{-1}\, c_{i0}\, e_i\, c_{is_i} = 1,\ i = 1 \ldots k$
iv) (si el signo es +) $x_1 .. x_t\, e_1 .. e_k\, a_1\, b_1\, a_1^{-1}\, b_1^{-1} .. a_g\, b_g\, a_g^{-1}\, b_g^{-1} = 1$
(si el signo es −)) $x_1 .. x_t\, e_1 .. e_k\, d_1^2 \ldots d_g^2 = 1$.

A partir de ahora las letras x, a, b, c, d, e, se usarán para designar los generadores del grupo.

Una superficie de Klein es una superficie con o sin frontera dotada de una estructura dianalítica; los automorfismos de estas superficies son homeomorfismos dianalíticos.

La relación entre grupos *NEC* y superficies de Klein es una consecuencia de los resultados siguientes debidos a Preston [11], Alling–Greenleaf [1] y May [9]:

–Si X es una siperficie de Klein de género algebraico $p \geqslant 2$, entonces X puede ser representada por U/Γ, donde Γ es un grupo *NEC* con signatura $(g; \pm; [-]; \{(-) \overset{k}{\ldots} (-)\})$ (grupo de superficie con k componentes en la frontera).

–Si Γ es un grupo *NEC* entonces el espacio cociente U/Γ puede ser dotado con una estructura de superficie de Klein si Γ es un grupo de una superficie con borde.

–Un grupo H es un grupo de automorfismos de una superficie de Klein U/Γ si y sólo si $H \approx \Gamma'/\Gamma$ donde Γ' es un grup *NEC* tal que $\Gamma \lhd \Gamma'$.

3. AUTOMORFISMOS DE SUPERFICIES DE KLEIN.

Proposición 3.1.– Sea $X = U/\Gamma$ una superficie de Klein, donde Γ tiene la signatura $(g; +; [-]; \{(-) \overset{k}{\ldots} (-)\})$.

Supongamos que X posee un automorfismo Φ de orden N y que $\langle\Phi\rangle \approx \Gamma'/\Gamma$. Entonces el género g' de U/Γ' verificará las siguientes acotaciones:

1) Si N es impar $g' \leqslant (g-1)/N + 1$
2) Si N es par y Γ' tiene signo $+$, $g' \leqslant (g-1)/N + 1$
3) Si N es par y Γ' tiene signo $-$, $g' \leqslant 2(g-1)/N + 2$

Demostración:

1) Sea N impar; por [2], Γ es un subgrupo normal de un grupo *NEC* Γ' con signatura

$$(g'; +; [N/k_1, \ldots, N/k_t]; \{(-)\overset{s}{\ldots}(-)\});$$

además la relación entre las áreas de las regiones fundamentales para Γ y Γ' es (*V.* [2])

$$2g'N - 2g + (N-1)(s-t-2) + \sum_{\substack{n \mid N \\ n \neq 1, N}} N(1 - 1/n)t_n + \sum_{i=1}^{t} (N - k_i) = 0 \quad (1),$$

puesto que

$$\sum_{\substack{n \mid N \\ n \neq 1, N}} N(1 - 1/n)t_n + \sum_{i=1}^{t} (N - k_i) \geqslant 0,$$

el valor negativo máximo de (1) es $-2g - 2N + 2$, cuando $s - t = 0$, luego g' será máximo cuando $2g'N$ anule dichos términos, es decir $2 + 2g'N - 2g - 2N = 0$; ésto implica $g' = 1 + (g-1)/N$, luego $g' \leqslant 1 + (g-1)/N$

2) Si N es par y Γ' tiene el signo $+$, Γ es un subgrupo normal de Γ' y por [5] tiene la signatura

$$(g'; +; [N/k_1, \ldots, N/k_t]; \{(-)\overset{s}{\ldots}(-)\,(2 \overset{\tau_i'}{\ldots} 2)^{\tau_i} \; i = 1 \ldots k'\})$$

y

$$2g'N - 2g + (\tau + p)N + (N-1)(s - t' - p - 2) +$$

$$\sum_{\substack{n \mid N \\ n \neq 1, N}} N(1 - 1/n)t_n + \sum_{i=1}^{t} (N - k_i) = 0.$$

3) Si N es par, Γ es un subgrupo normal de un grupo *NEC* Γ' que por [5] tiene signatura

$$(g'; -; [N/k_1, \ldots, N/k_t]; \{(-)\overset{s}{\ldots}(-)\,(2 \overset{\tau_i'}{\ldots} 2)^{\tau_i} \; i = 1 \ldots k'\})$$

y

$$g'N - 2g + (\tau + p)N + (n-1)(s - t' - p - 2) +$$

$$+ \sum_{\substack{n \mid N \\ n \neq 1, N}} N(1 - 1/n)t_n + \sum_{i=1}^{t} (N - k_i) = 0.$$

En ambos casos, haciendo un razonamiento idéntico al hecho en 1), se obtienen las cotas de 2) y 3) para g'.

Por un procedimiento análogo al anterior, se tiene

Proposición 3.2.– Sea $X = U/\Gamma$ una superficie de Klein, donde Γ tiene la signatura $(g; -; [-]; \{(-)\overset{k}{\ldots}(-)\})$

Supongamos que X posee un automorfismo Φ de orden N y que $\langle\Phi\rangle \approx \Gamma/\Gamma'$. Entonces el género g' de U/Γ' verifica las siguientes acotaciones:

1) Si N es impar $g' \leqslant (g-2)/N+2$

2) Si N es par y Γ' tiene signo $-$; $g' \leqslant (g-2)/N+2$

3) Si N es par y Γ' tiene signo $+$; $g' \leqslant (g-2)/2N+1$

Proposición 3.3.– Sea $X = U/\Gamma$ una superficie de Klein, donde Γ tiene la signatura $(g; +; [-]; \{(-)\overset{k}{\ldots}(-)\})$, que posee un automorfismo Φ de orden N par y $<\Phi> \approx \Gamma'/\Gamma$, entonces el número de cicloperíodos no vacíos de Γ' es $\tau \leqslant (2g-2)/N+2$.

Demostración: Si N es par, Γ es un subgrupo normal de un grupo NEC Γ' entonces por [5] Γ' tiene la signatura

$$(g'; \pm; [N/k_1, \ldots, N/k_t]; \{(-)\overset{s}{\ldots}(-)\,(2\overset{\tau_i}{\ldots}2)^{\tau_i}\ i = 1 \ldots k'\}),$$

donde

$$\tau = \sum_{i=1}^{k'} \tau_i .$$

Si Γ' tiene signo $+$ en su signatura, entonces

$$2g'N - 2g + (\tau + p)N + (N-1)(s - t' - p - 2) + \sum_{\substack{n \mid N \\ n \neq 1,N}} N(1 - 1/n)t_n + \sum_{i=1}^{t} (N - k_i) = 0 \qquad (2).$$

puesto que

$$\sum_{\substack{n \mid N \\ n \neq 1,N}} N(1 - 1/n)t_n + \sum_{i=1}^{k'} (N - k_i) \geqslant 0,$$

el valor negativo más grande de (2) es $-2g - 2N + 2$, cuando $s - t' - p = 0$ luego τ será máximo si τN anula dichos términos, es decir $\tau N = 2g + 2(N-1)$, por lo tanto $\tau \geqslant (2g-2)/N + 2$.

Si el signo de la signatura de Γ' es $-$, el resultado es idéntico.

De forma análoga se obtienen las siguientes proposiciones:

Proposición 3.4.– Sea $X = U/\Gamma$ una superficie de Klein, donde Γ tiene la signatura $(g; -; [-]; \{(-)\overset{k}{\ldots}(-)\})$, que posee automorfismo Φ de orden N par y $<\Phi> \approx \Gamma'/\Gamma$, entonces el número de cicloperíodos no vacíos de Γ' es $\tau \leqslant (g-2)/N+2$.

Proposición 3.5.– Sea $X = U/\Gamma$ una superficie de Klein donde Γ tiene la signatura $(g; +; [-]; \{(-)\overset{k}{\ldots}(-)\})$.

Si X posee un automorfismo Φ de orden N y $<\Phi> \approx \Gamma'/\Gamma$, llamando t al número de los períodos propios de Γ' se tiene que

1) $t \leqslant 3(1 + (g-1)/N)$ si N es impar

2) $t \leqslant 4(1 + (g-1)/N)$ si N es par

Proposición 3.6.– Sea $X = U/\Gamma$ una superficie de Klein donde Γ tiene la signatura $(g; -; [-]; \{ (-) \overset{k}{\ldots} (-) \})$.

Si posee un automorfismo Φ de orden N y $<\Phi> \approx \Gamma'/\Gamma$, siendo t el número de períodos propios de Γ', se tiene que:

1) $t \leqslant 3 + (3/2)(g - 2)/N$ si N es impar

2) $t \leqslant 4 + 2(g - 2)/N$ si N es par

Teorema 3.7.– Sea $X = U/\Gamma$ in toro con K componentes en la frontera y con estructura de superficie de Klein. Si X posee un automorfismo Γ de orden N, N par, y $<\Phi> \approx \Gamma'/\Gamma$, entonces es 2, 4, 6, ó divide a k y la signatura de Γ' es una de las siguientes:

$(2; -; [-]; \{ (-)^{t'} \})$, $t' = k/N$, $N = \dot{4}$

$(1; -; [-]; \{ (-)^{t'} (2 \overset{\tau'_1}{\ldots} 2) \})$, $k/N = t' + \tau'_1/4$, $N = \dot{2}$ y $N \neq \dot{4}$

$(1; -; [-]; \{ (-)^{t'+1} \})$, $t' = k/N$, $N = \dot{2}$, $N \neq \dot{4}$

$(1; +; [-]; \{ (-)^{t'} \})$, $t' = k/N$

$(0; +; [2, 2]; \{ (-)^{t'+2} \})$, $t' = (k - 2)/2$, $N = 2$

$(0; +; [2]; \{ (-)^{t'+2} \})$, $t' = (k - 2)/4$, $N = 4$

$(0; +; [2, 2, 2]; (-)^{t'+1} \})$, $t' = (k - 1)/2$, $N = 2$

$(0; +; [2, 4]; \{ (-)^{t'+1} \})$, $t' = (k - 1)/4$, $N = 4$

$(0; +; [4]; \{ (-)^{t'+2} \})$, $t' = (k - 3)/4$, $N = 4$

$(0; +; [2, 3]; \{ (-)^{t'+1} \})$, $t' = (k - 1)/6$, $N = 6$

$(0; +; [2]; \{ (-)^{t'+2} \})$, $t' = (k - 3)/6$, $N = 6$

$(0; +; [2, 2, 2, 2]; \{ (-)^{t'} \})$, $t' = k/2$, $N = 2$

$(0; +; [2, 4, 4]; \{ (-)^{t'} \})$, $t' = k/4$, $N = 4$

$(0; +; [4, 4]; \{ (-)^{t'+1} \})$, $t' = (k - 2)/4$, $N = 4$

$(0; +; [2, 6, 3]; \{ (-)^{t'} \})$, $t' = k/6$, $N = 6$

$(0; +; [6, 3]; \{ (-)^{t'+1} \})$, $t' = (k - 3)/6$, $N = 6$

$(0; +; [6, 2]; \{ (-)^{t'+1} \})$, $t' = (k - 2)/6$, $N = 6$

$(0; +; [6]; \{ (-)^{t'+2} \})$, $t' = (k - 5)/6$, $N = 6$

$(0; +; [-]; (-)^{t'+1} (2 \overset{\tau'_1}{\ldots} 2) \})$, $k/N = t' + \tau'_1/4$, $N = 2$

Demostración: Puesto que $X = U/\Gamma$ tiene k componentes en el borde, Γ debe tener la siguiente signatura $(1; +; [-]; \{ (-) \overset{k}{\ldots} (-) \})$.

Como N es par, la signatura de Γ' puede presentar signo $+$ ó $-$.

Si la signatura de Γ' tiene signo menos, entonces por [5] tiene la forma

$(g'; -; [N/k_1, \ldots, N/k_t]; \{ (-) \overset{s}{\ldots} (-) (2 \overset{\tau_i'}{\ldots} 2)^{\tau_i} \} \; i = 1 \ldots k')$.

Por [5] $k = s - t' - p + \sum_{\substack{n|N \\ n \neq 1, N}} t_n N/n + \sum_{i=1}^{k_i} (\tau_i \tau_i'/4)N$, donde $t' = \sum_{\substack{n|N \\ n \neq N}} t_n$,

y entonces se verifica

$$g'N - 2 + (\tau + p)N + (N-1)(s - t' - p - 2) + \sum_{i=1}^{t} (N - k_i) +$$

$$\sum_{\substack{n|N \\ n \neq 1,N}} N(1 - 1/n)\, t_n = 0.$$

Los pasos que se van a dar a continuación son: en primer lugar encontrar las posibles soluciones de la ecuación anterior (obsérvese que estas soluciones determinan el orden de e_i módulo Γ, donde e_i son los generadores de conexión para cada uno de los ciclo–períodos vacíos de Γ'), depués intentaremos establecer un epimorfismo $\theta: \Gamma' \to Z/(N)$ con $ker\,\theta \approx \Gamma$, teniendo en cuenta las condiciones establecidas para los e_i.

Por la proposición 3. 1, se tiene que $g' = 1$ ó 2. Si $g' = 2$ entonces

$$2N - 2 + (\tau + p)N + (N-1)(s - t' - p - 2) + Y = 0 \qquad (3)$$

(en adelante se denotará por Y la cantidad positiva o nula

$$\sum_{i=1}^{t} (N - k_i) + \sum_{\substack{n|N \\ n \neq 1,N}} N(1 - 1/n)t_n).$$

Teniendo en cuenta las limitaciones establecidas por las proposiciones 3.3, 3.4, 3.5, y 3.6, en este caso, si $s - p - t' = 2$, se tiene de (3):

$$2N - 2 + (\tau + p)N + Y = 0,$$

puesto que $Y \geqslant 0$, $(p + \tau)N > 0$ y $2N - 2 > 0$, no presenta solución. Si $s - t' - p = 1$, se tiene de (3)

$$N - 1 + (\tau + p)N + Y = 0,$$

que no presenta solución (por la razón de que $N \geqslant 2$, $(\tau + p)N > 0$ y $Y \geqslant 0$). Cuando $s - p - t' = 0$, se tiene de (3) la expresión

$$(\tau + p)N + Y = 0,$$

y la única solución es $\tau + p = 0$, $Y = 0$; ahora, teniendo en cuenta que $Y \geqslant 0$, la única solución para $Y = 0$ será

$$k_i = N, \; i = 1 \ldots t', \; t_n = 0, n|N \text{ y } n \neq 1, N;$$

además, debido a que τ y p son enteros positivos, será $\tau = p = 0$.

Se deduce así, de la expresión de k, la relación $k = t'N$; por lo tanto la signatura de Γ' es

$$(2\,;-;[-];\{(-)^{t'}\}).$$

Dado un grupo $NEC\,\Gamma'$ con esta signatura, vamos a ver si existe un epimorfismo $\theta: \Gamma' \to Z/(N)$ con $ker\,\theta \approx \Gamma$, verificando las condiciones deseadas.

Si existe este epimorfismo, entonces $Z/(N) \approx \Gamma'/ker\theta$ es un grupo de auto morfismos de $U/ker\theta$.

Como $k = t'N$, entonces, por [6] $\theta(c_i) = \theta\,(e_i) = \overline{0}$, $i = 1 \ldots t'$. Ya que θ tiene que ser un epimorfismo, tiene que existir algún elemento de Γ' tal que su imagen bajo θ genere $Z/(N)$; se tiene entonces que $\theta\,(d_1) = \overline{p}$ (donde $\overline{p}$ genera $Z/(N)$) y puesto que el epimorfismo θ tiene que conservar las relaciones básicas entre generadores

$$\theta\,(e_1 \ldots e_{t'}\cdot d_1^2 d_2^2) = \overline{0}$$

y como consecuencia $\theta\,(d_2) = \overline{(N-2p)/2}$.

Si $N = \dot{2}$ pero $N \neq \dot{4}$, entonces $(N/2) - p$ es un número par y por lo tanto existe un número α impar tal que $\theta\,(d_2^\alpha) = \overline{0}$, luego $d_2^\alpha \in ker\theta$; por [8] $ker\theta$ tendría signo $-$ en su signatura, luego $ker\theta \neq \Gamma$.

Si $N = \dot{4}$ se tiene, por [8], que $ker\theta$ tiene signo $+$ en su signatura; por la relación de las áreas de $ker\theta$ y Γ, por [5] y [3], se tiene que $ker\theta \approx \Gamma$.

Operando de forma semejante al caso anterior se obtienen las restantes signaturas del enunciado del teorema.

Un razonamiento análogo al efectuado en el teorema anterior, nos permite obtener los siguientes resultados:

Teorema 3.8.– Sea $X = U/\Gamma$ un toro con k componentes en la frontera y con estructura de superficie de Klein.

Si X posee un automorfismo Φ de orden N, n impar y $<\Phi> \approx \Gamma'/\Gamma$, entonces $N = 3$ o divide a k y la signatura de Γ' es una de las siguientes:

$(0;+\,;[3];\{(-)^{t'+2}\})$, $t' = (k-2)/3$, $N = 3$

$(0;+\,;[3,3];\{(-)^{t'+1}\})$, $t' = (k-1)/3$, $N = 3$

$(0;+\,;[3,3,3];\{(-)^{t'}\})$, $t' = k/N$

$(1;+\,;[-];\{(-)^{t'}\})$, $t' = k/N$

Teorema 3.9.– Sea $X = U/\Gamma$ un plano proyectivo con k componentes en la frontera y con estructura de superficie de Klein.

Si X posee un automorfismo Φ de orden N, impar y $<\Phi> \approx \Gamma'/\Gamma$, entonces N divide a $k-1$ y k, y la signatura de Γ' es una de las siguientes:

$(1;-\,;[-];\{(-)^{t'+1}\})$, $t' = (k-1)/N$

$(1;-\,;[N];\{(-)^{t'}\})$, $t' = k/N$.

Teorema 3.10.– Sea $X = U/\Gamma$ un plano proyectivo con k componentes en la frontera y con estructura de superficie de Klein.

Si X posee un automorfismo Φ de orden N, par, y $<\Phi> \approx \Gamma'/\Gamma$, entonces N divide a k y $k-1$, y la signatura de Γ' es una de las siguientes:

$$(0;+\,;[-];\{(-)^{t'+1}(2,..\overset{\tau'_1}{}..,2)\}),\ (k-1)/N = t' + \tau'_1/4$$

$$(0;+\,;[-];\{(-)^{t'+2}\}),\ t' = (k-1)/N$$

$$(0;+\,;[N];\{(-)^{t'+1}\}),\ t' = k/N$$

$$(0;+\,;[N];\{(-)^{t'}(2...\overset{\tau'_1}{}...2)\}),\ k/N = t' + \tau'_1/4$$

BIBLIOGRAFIA

[1] ALLING, N. L. AND GREENLEAF, N.: "Foundations of the theory of Klein surfaces". *Lecture Notes in Math.* Vol. 219, Springer–Verlag. Berlín (1971).

[2] BUJALANCE, E.: "Normal Subgroups of *NEC* groups". *Math. Zeit.* 178, 331–334. (1981)

[3] –. "Proper periods of normal *NEC* subgroups with even index". *Rev. Math. Hisp.–Amer.* (4) 41, 121–127. (1981).

[4] –. "Automorphism groups of compact planar Klein surfaces. (Preprint).

[5] BUJALANCE, J. A.: "Normal subgroups of even index of an *NEC* groups". *Arch. Math.*, Vol 49, 470–478. (1987)..

[6] ETAYO, J. J.: "Sobre grupos de automorfismos de superficies de Klein". Tesis doctoral, Universidad Complutense. Madrid (1983).

[7] HEINS, M.: On the number of 1–1 directely conformal maps which a multiply–connected plane region of finite connectivity p(> 2) admits onto it self". *Bull. Amer. Math. Soc.* 52, 454–457. (1946).

[8] HOARE, A. H. M. AND SINGERMAN, D.: "The orientability of subgroups". London *Math–Soc.* Lecture Note Series 71, 221–227. (1982).

[9] MAY, C. L.: "Large automorphism groups of compact Klein surface with boundary". *Glasgow Math. j.* 18, 1–10. (1977).

[10] GEENLEAF, N.: "Bordered Klein surfaces with maximal symetry". *Transation of Amer. Math. Soc.* 274, 265–283. (1982).

[11] PRESTON, R.: "Projective structures and fundamental domains on compact Klein surfaces". Ph. D. Thesis Univ. of Texas (1975).

Departamento de Matemáticas
Colegio Universitario de Toledo
(San Juan de la Penitencia)
Toledo