Bases K-monótonas en los espacios escalonados de Kothe, II

Por J. C. DIAZ

Abstract

We study here some topological properties of the ehelon Köthe spaces having a K–monotone basis. From the above mentioned spaces, we characterize those wich are quasinormables.

INTRODUCCION

Este trabajo completa un artículo anterior ([3]) en el que caracterizabamos, en función de los escalones, los espacios escalonados de Köthe que poseen base K–monótona.

En esta nota proporcionaremos una amplia gama de ejemplos de espacios escalonados de Köthe que son isomorfos a espacios escalonados de Köthe con base K–monótona, y usaremos la caracterización antes mencionada para probar que tales espacios son infinitamente reproducibles en un cierto sentido, –esto representa un primer paso en el estudio de la primaridad de tales espacios (ver [4] para completar esta idea)–. Probaremos que la estructura topológica de un espacio escalonado de Köthe con base K–monótona (ciertamente más "compleja' que la de un espacio de sucesiones), viene determinada tan sólo por una matriz infinita de valores reales (a_n^k); por último, nos serviremos de esta analogía con los espacios escalonados de sucesiones para caracterizar los espacios escalonados de Köthe con base K–monótona que son casinormables, basándonos para ello en conocidos resultados de Valdivia ([8]).

Recordaremos brevemente los conceptos y resultados básicos de [3].

Dado un espacio medida $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, y una sucesión creciente (μ–cpd) de funciones positivas (μ–cpd) $\mathfrak{A}$–medibles $\{g_k\}_k$, tal que la unión de los soportes de las funciones g_k, $k \in \mathbb{N}$, es igual a X, salvo un conjunto de medida nula, y dado $p \in \mathbb{R}$, $p \geqslant 1$, se define *espacio escalonado de Köthe* de orden p, como el conjunto de las (clases de equivalencia) funciones reales $\mathfrak{A}$–medibles f, tales que

$$\|f\|_k = \left(\int_X |f|^p g_k \, d\mu\right)^{1/p} < \infty, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Lo denotaremos $\Lambda^p(X, \mathfrak{A}, \mu, g_k)$ ó Λ_p, y es un espacio de Fréchet por la sucesión de seminormas $\{\|\cdot\|_k\}_k$. Dados dos espacios escalonados de Köthe $\Lambda^p(X, \mathfrak{A}, \mu, g_k)$ y $\Gamma^p(Y, \beta, \nu, k_k)$, se dicen *K–isomorfos* si existe una biyección lineal $G: \Lambda^p \to \Gamma^p$, tal que $\|G(f)\|_k = \|f\|_k$, para cada $k \in \mathbb{N}, f \in \Lambda^p$. La aplicación G se llama K–isomorfismo, y claramente es un isomorfismo vectorial topológico.

Dado un espacio de Fréchet (F, T), cuya topología viene dada por una sucesión de seminormas $\{\|\cdot\|_k\}$, diremos que una base $\{x_n\}_n$ de F, es *K–monótona* respecto de las seminormas $\{\|\cdot\|_k\}$ si, para cada $k, n \in \mathbb{N}$, y cada familia $\{a_i\}_{i=1}^{n+1} \subset \mathbb{R}$, se verifica

$$\| \Sigma_{i=1}^{n} a_i x_i \|_k \leqslant \| \Sigma_{i=1}^{n+1} a_i x_i \|_k$$

Cuando hablemos de base K–monótona en un espacio escalonado de Köthe, se entenderá que es respecto a las seminormas definidas por los escalones g_k.

Dado un espacio escalonado de Köthe $\Lambda^p(X, \mathfrak{A}, \mu, g_k)$, y una sucesión de conjuntos mutuamente disjuntos $\{A_n\}_n \subset \mathfrak{A}$ de medida no nula, tal que $X = \cup \{A_n ; n \in I\!N\}$ μ–cpd, diremos que una matriz $(\lambda_{n,k})_{n,k \in I\!N}$ de valores reales, es una *matriz asociada* a Λ^p respecto de la familia $\{A_n\}$, si se verifica

$$g_k \chi_{A_n} = \lambda_{n,k}\, g_{k+1}\, \chi_{A_n}, \qquad \forall n, k \in I\!N$$

Un espacio Λ^p se dirá que posee matriz asociada si posee una matriz asociada $(\lambda_{n,k})$ respecto de alguna familia $\{A_n\}_n$.

Nuestro principal resultado en [3] ha sido el siguiente

Teorema A.– Sea $\Lambda^p(X, \mathfrak{A}, \mu, g_k)$, $p \neq 2$, un espacio escalonado de Köthe separable. Entonces, Λ^p tiene una base K–monótona si y sólo si posee una matriz asociada.

Ejemplos.–

El teorema A indica que los espacios escalonados de Köthe con base K–monótona poseen una forma muy determinada y constituyen una clase "reducida" entre los espacios escalonados de Köthe separables. No obstante, veremos una serie de ejemplos de espacios sin base K–monótona, que son isomorfos a espacios escalonados de Köthe con base K–monótona. Con esta gama de ejemplos pretendemos mostrar el alcance de las bases K–monótonas como herramientas, ya que las principales aplicaciones que señalaremos de las mismas son de caracter topológico y se conservan por isomorfismos.

Para estudiar los dos primeros ejemplos necesitaremos nuestro siguiente resultado (rf. [4]).

Lema A.– Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ puramente no atómico, $\Lambda^p(X, \mathfrak{A}, \mu, g_k)$ un espacio escalonado de Köthe, y $A \in \mathfrak{A}$, con $\mu(X - A) > 0$, tal que el subespacio seccional Λ^p/A es normable, entonces $\Lambda^p/(X - A)$ es isomofo a Λ^p.

Denotaremos con dx la medida usual de Lebesgue y con $\mathfrak{M}$ la σ- álgebra de los conjuntos Lebesgue medibles.

Ejemplo 1.– Sea $\Lambda^p([0, 1], \mathfrak{M}, dx, x^{1/k})$, y veremos que es isomorfo a un espacio con base K–monótona. En primer lugar seleccionamos una subsucesión de los escalones, sea

$$g_k(x) = x^{1/2^k}$$

y trabajamos con $\Gamma^p([0, 1], \mathfrak{M}, dx, g_k)$ que es isomorfo a Λ^p. Sea ahora

$0 < x_0 < 1$, y consideramos el subespacio seccional $\Gamma^p/(x_0, 1]$. Para cada $k \in I\!N$ y $x \in (x_0, 1]$, es

$$g_{k+1}(x) \leqslant 1 < (1/x_0) g_k(x),\ \forall x \in (x_0, 1],\ k \in I\!N$$

luego $\Gamma^p/(x_0, 1]$ es normable. Por el Lema A, Γ^p es isomorfo a $\Gamma^p/[0, x_0]$. Ahora, en el conjunto $[0, x_0]$, definimos

$$h_k = \Sigma_{n \geqslant 1}\, \chi_{(x_0^{2^n},\, x_0^{2^{n-1}}]}\, x_0^{2^{n-k-1}},\ h_k(0) = 0$$

para cada $k \in I\!N$. Se tiene que

$$g_k(x) \leqslant h_k(x) \leqslant g_{k+1}(x),\quad \forall k \in I\!N, x \in [0, x_0]$$

luego la aplicación identidad es un isomorfismo entre $\Gamma^p/[0, x_0]$ y el espacio $V^p([0, x_0], \mathfrak{M}, dx, h_k)$. Finalmente, es inmediato comprobar que V^p posee matriz asociada y por tanto base K–monótona.

Ejemplo 2.– El espacio de las funciones rapidamente decrecientes definidas en $[1, \infty)$, $\Lambda^p([1, \infty), \mathfrak{M}, dx, x^k)$ es isomorfo a un espacio con base K–monótona.

En efecto, el subespacio $\Lambda^p/[1, 4)$ es normable luego, usando el Lema A, Λ^p es isomorfo a $\Lambda^p/[4, \infty)$ que es isomorfo al espacio escalonado $\Gamma^p([4, \infty), \mathfrak{M}, dx, g_k)$. Siguiendo la técnica anterior seleccionamos los escalones

$$g_k = x^{2^k}$$

que forman una subsucesión de los escalones originales, luego Γ^p es isomorfo a $\Lambda^p([4, \infty), \mathfrak{M}, dx, g_k)$. Construimos ahora en $[4, \infty)$

$$h_k = \Sigma_{n=1}^{\infty}\, 2^{2^{n+1+k}} \chi[2^{2^n}, 2^{2^{n+1}})$$

Se comprueba sin dificultad que $g_k \leqslant h_k \leqslant g_{k+1}$ en $[4, \infty)$, luego Λ^p es isomorfo al espacio escalonado con base K–monótona $\Lambda^p([4, \infty), \mathfrak{M}, dx, h_k)$.

Ejemplo 3.– Usando un método semejante a los dos anteriores, que no repetiremos, se demuestra que dada una función f: $[0, \infty) \to [1, \infty)$ monótona no decreciente, entonces $\Lambda^p([0, \infty), \mathfrak{M}, dx, k^f)$ es isomorfo a un espacio escalonado de Köthe con base K–monótona.

Finalmente, es preciso señalar que no conocemos en este momento ningún ejemplo de espacio escalonado de Köthe separable, *no isomorfo* a un espacio escalonado con base K–monótona.

Aplicaciones.–

Veremos unos resultados positivos cuya demostración se deriva de la forma de los escalones en los espacios con base K–monótona (es decir, de la existencia de matriz asociada).

Veamos que si $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ es puramente no atómico, la topología de un espacio $\Lambda^p(X, \mathfrak{A}, \mu, g_k)$ con matriz asociada $(\lambda_{n,k})$ respecto de $\{A_n\}$, no depende de la familia $\{A_n\}$, sino sólo de los valores de la matriz.

Proposición 1.– Sean $(X,\mathfrak{A},\mu)$, (Y,β,ν) espacios medida puramente no atómicos y $\Lambda^p(X,\mathfrak{A}, \mu, g_k)$, $\Gamma^p(Y, \beta, \nu, h_k)$ dos espacios escalonados de Köthe que poseen una misma matriz asociada $(\lambda_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ respecto de familias $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ respectivamente. Entonces los dos espacios son K–isomorfos.

Demostración: Probaremos que Λ^p es K–isomorfo al espacio escalonado $V^p([0, \infty), \mathfrak{M}, dx, \psi_k)$ donde $\psi_0 = 0$, ψ_1 está definido en $[n-1, n)$ como 1 si $\lambda_{n,1} \neq 0$ y como 0 si $\lambda_{n,1} = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y, en general, si $k \geqslant 2$

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_{n,k} = 0 \\ \psi_{k-1}(x)/\lambda_{n,k-1} & \lambda_{n,k} \neq 0, \lambda_{n,k-1} \neq 0 \\ 1 & \lambda_{n,k} \neq 0, \lambda_{n,k-1} = 0 \end{cases}$$

para cada $x \in [n-1, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Esto equivale a que se verifique, si $\psi_0 = 0$

$$\begin{aligned} \psi_k(\chi_{S(\psi_k)-S(\psi_{k-1})}) &= \chi_{S(\psi_k)-S(\psi_{k-1})}, \; k \geqslant 1 \\ \psi_k &= \Sigma_{n\geqslant 1} \lambda_{n,k} \psi_{k+1} \chi_{[n-1,n)} \end{aligned} \qquad (**)$$

donde $S(\psi_k)$ dependerá sólo de la matriz $(\lambda_{n,k})$. Con esto obtendremos el resultado ya que, usando el mismo razonamiento, Γ^p también será K–isomorfo a V^p y por tanto a Λ^p.

Veamos en primer lugar que podemos suponer que los escalones g_k son integrables, para cada $k \in \mathbb{N}$, y $\mu(A_n) = 1, n \in \mathbb{N}$.

En efecto, esquemáticamente, como Λ^p es separable entonces $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ es σ–finito, y existe una función $h \in \Lambda^p$ con $S(h) = X$ (rf. [6]).

Por otra parte, un argumento estandar permite definir, por la σ–finitud de $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, una medida ν sobre la σ–álgebra $\mathfrak{A}$, tal que μ y ν son absolutamente continuas una respecto de la otra y tal que $\nu(A_n) = 1, n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Radon–Nikodym existe una única (salvo un conjunto de medida nula) función g, ν–medible, con $S(g) = X$, tal que

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu, \quad \forall A \in \mathfrak{A}$$

Consideremos ahora el espacio $\theta^p(X, \mathfrak{A}, \nu, |h|^p g_k)$; este espacio verifica las dos condiciones anunciadas, y posee a $(\lambda_{n,k})$ por matriz asociada respecto de los conjuntos $\{A_n\}$. Por último, es inmediato comprobar que el operador lineal T: $\Lambda^p \to \theta^p$ que aplica $f \in \Lambda^p$ en $fh^{-1}g^{-1/p} \in \theta^p$ es un K–isomorfismo. Así, podemos suponer desde el principio que los escalones g_k son integrables y $\mu(A_n) = 1, n \in \mathbb{N}$.

Dada la sucesión de conjuntos $\{A_n\}$, se tiene, por hipótesis

$$g_k \chi_{A_n} = \lambda_{n,k}\, g_{k+1}\, \chi_{A_n}, \quad \forall n, k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(A_n \cap S(g_k)) > 0$$

es fácil probar, por la condición (1) y el crecimiento de los escalones, que debe ser $A_n \subset S(g_k)$ μ—cpd. Por tanto, podemos encontrar subconjuntos de $\mathbb{N}$ (finitos o infinitos), $\Upsilon_1(\mathbb{N}) \subset \Upsilon_2(\mathbb{N}) \subset \ldots \subset \Upsilon_k(\mathbb{N}) \subset \ldots$ tales que

$$S(g_k) = \cup\{A_i \,;\, i \in \Upsilon_k(\mathbb{N})\}$$

Veamos que los conjuntos $\{\Upsilon_i(N)\}_i$ dependen sólo de los valores de la matriz $(\lambda_{n,k})$. En efecto, por nuestro anterior comentario se deduce que, dado $n \in \mathbb{N}$, existe un único $k(n) \in \mathbb{N}$ tal que

$$A_n \subset S(g_{k(n)}), \quad \text{y} \quad \mu(A_n \cap S(g_{k(n)-1})) = 0 \tag{2}$$

y esto es equivalente, por (1), a la condición

$$\lambda_{n,k} > 0 \ \text{ si } k \geqslant k(n), \quad \text{y} \quad \lambda_{n,k} = 0 \ \text{ si } k < k(n) \tag{3}$$

que sólo depende de la matriz asociada, lo que prueba nuestra afirmación.

Ahora, denotemos por $\bar{\mathfrak{A}}$(resp. $\bar{\mathfrak{M}}$) el cociente que resulta al identificar dos elementos de $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{M}$) que son iguales salvo un conjunto de medida nula, y por $\bar{\mathfrak{A}}_n$ (resp. $\bar{\mathfrak{M}}_{[n-1,n)}$) la restricción de $\bar{\mathfrak{A}}$ al conjunto A_n (resp. $[n-1, n)$). Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\bar{\mathfrak{A}}_n, \mu)$ es un espacio medida separable (por la separabilidad de A^p, rf. [1]) con $\mu(A_n) = 1$ y puramente no atómico (pues un átomo de $\bar{\mathfrak{A}}_n$ provendría de un átomo de $\bar{\mathfrak{A}}$); por el Teorema de Caratheodory (rf. [7]) existe un isomorfismo de σ—álgebra que conserva las medidas de los conjuntos

$$\phi_n : (\bar{\mathfrak{A}}_n, \mu) \to (\bar{\mathfrak{M}}_{[n-1,n)}, dx)$$

y definimos

$$\begin{aligned} \phi: (\bar{\mathfrak{A}}, \mu) &\to (\bar{\mathfrak{M}}, dx) \\ A &\to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi_n(A \cap A_n) \end{aligned}$$

ϕ es un isomorfismo de σ—álgebras y conserva las medidas de los conjuntos.

Construiremos a partir de ϕ unos escalones ψ'_k en $[0, \infty)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Para ello definiremos unas medidas v_k sobre $\bar{\mathfrak{M}}$, $k \in \mathbb{N}$. No distinguiremos entre un elemento $A \in \mathfrak{M}$ y su clase en $\bar{\mathfrak{M}}$. Definimos entonces

$$v_k(A) = \int_{\phi^{-1}(A)} g_k\, dx, \ \forall A \in \bar{\mathfrak{M}},\ k \in \mathbb{N}$$

Por ser los escalones g_k integrables y por las propiedades de ϕ, la definición anterior no depende del representante elegido; además v_k es una medida absolutamente continua respecto de dx, luego existen funciones ψ'_k, $\mathfrak{M}$–medibles tal que

$$v_k(A) = \int_A \psi'_k dx, \ \forall A \in \mathfrak{M}$$

Es fácil compobar que dado $A \subset [n-1, n)$, $A \in \mathfrak{M}$, es

$$v_k(A) = \lambda_{n,k}\, v_{k+1}(A)$$

de donde

$$\psi'_k\, \chi_{[n-1,n)} = \lambda_{n,k}\, \psi'_{k+1}\, \chi_{[n-1,n)}, \quad \forall n, k \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Por otra parte, dado $k(n) \in \mathbb{N}$, como en (2) y (3), entonces

$$0 = \int_{A_n} g_{k(n)-1}\, d\mu = v_{k(n)-1}([n-1, n)) = \int_{[n-1,n)} \psi'_{k(n)-1}\, dx$$

de donde

$$\mu([n-1, n) \cap S(\psi'_{k(n)-1})) = 0$$

Análogamente, sea $A \subset [n-1, n)$, $A \in \mathfrak{M}$, $\mu(A) > 0$, como $\phi^{-1}(A) \subset$ $\subset A \subset S(g_{k(n)})$

$$\int_A \psi'_{k(n)}\, dx = v_{k(n)}(A) = \int_{\phi^{-1}(A)} g_{k(n)}\, d\mu > 0$$

luego $[n-1, n) \subset S(\psi'_{k(n)})$. Se concluye que

$$S(\psi'_k) = \cup\, \{[i-1, i); i \in \Upsilon_k(\mathbb{N})\}, \quad k \geqslant 1 \tag{5}$$

luego $S(\psi'_k)$ sólo depende de la matriz $(\lambda_{n,k})$.

Consideremos ahora el espacio $\Lambda^p([0, \infty), \mathfrak{M}, dx, \psi'_k)$, y definimos T: $\Lambda^p \to \Lambda^p$ de tal forma que $T(\chi_A) = \chi_{\phi(A)}$, para cada $A \in \mathfrak{A}$; a partir de esta definición, T se amplia por linealidad y continuidad, por las propiedades de ϕ, y no es dificil comprobar que T es un K–isomorfismo entre los dos espacios.

Por último, sea $\psi'_0 = 0$, consideramos la función

$$f = \Sigma_{n \geqslant 1}\, (\psi'_n - \psi'_n\, \chi_{S(\psi'_{n-1})})$$

Se tiene que $S(f) = [0, \infty)$ y si definimos los escalones $\psi_k = \psi'_k / f$, $k \in \mathbb{N}$, es fácil comprobar de (4) y (5), que verifican las condiciones (**) anunciadas con lo que concluimos la construcción de $V^p([0, \infty), \mathfrak{M}, dx, \psi_k)$.

Finalmente, el operador lineal que aplica $g \in \Lambda^p$ en $gf^{1/p} \in V^p$ es un K–isomorfismo, luego Λ^p es K–isomorfo a V^p lo que completa la demostración.

c.q.d.

Este resultado prueba, si el espacio medida es puramente no atómico, la no dependencia de la topología de Λ^p respecto de los conjuntos $\{A_n\}$, sea cual sea su medida (no nula por definición). No es difícil encontrar ejemplos que ilustran la necesidad de la hipótesis sobre la atomicidad del espacio medida.

En efecto, definimos, para cada $k, n \in \mathbb{N}$

$$a_n^k = k^n, \quad b_{2n}^k = k^n, \quad b_{2n-1}^k = k$$

y consideramos los espacios $\lambda^p(a_n^k)$, $\partial^p(b_n^k)$; en λ^p sean los conjuntos $A_n = \{n\}, n \in \mathbb{N}$, y en ∂^p

$$B_1 = \{2\} \cup \{2j-1; j \in \mathbb{N}\}, \quad B_n = \{2n\}, n \geqslant 2$$

Si tomamos $\lambda_{n,k} = (k/(k+1))^n$, entonces $(\lambda_{n,k})$ es una matriz asociada a λ^p (resp. ∂^p) respecto de $\{A_n\}$ (resp. $\{B_n\}$); sin embargo, λ^p no es isomorfo a ∂^p porque λ^p es de Montel y ∂^p contiene un subespacio seccional infinito dimensional (∂^p/B_1) normable.

Antes de continuar, recordaremos la definición de suma de tipo l^p de espacios de Fréchet. Dada una sucesión de espacios de Fréchet $\{F_n\}_n$, cuyas topologías están generadas por las seminormas $\{\|\cdot\|_{k,n}\}_k$, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la suma de tipo l^p de la familia $(\{F_n\}, \{\|\cdot\|_{k,n}\})$, como

$$(\Sigma_n F_n)_{l^p} = \{(f_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} F_n ; \|(f_n)\|_k = (\Sigma_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{k,n}^p)^{1/p} < \infty, \forall k \in \mathbb{N}\}$$

que es un espacio de Fréchet con la topología definida por las seminormas $\{\|\cdot\|_k\}_k$.

Podemos introducir ahora el concepto de reproducibilidad infinita.

Sea F un espacio de Fréchet y $\{\|\cdot\|_k\}_k$ una sucesión de seminormas que definen su topología. Diremos que F es *infinitamente reproducible* en sentido l^p si F es isomorfo al espacio $(\Sigma_n F_n)_{l^p}$, donde F_n es el espacio $(F, \{\|\cdot\|_k\})$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que si se toma otra familia de seminormas $\{p_k(\cdot)\}_k$ para generar la topología de F, y si F_n' es el espacio $(F, \{p_k(\cdot)\}_k)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $(\Sigma_n F_n')_{l^p}$ es isomorfo a $(\Sigma_n F_n)_{l^p}$, luego la anterior definición no depende del sistema de seminormas elegido para definir la topología de F. Esta observación viene motivada por el hecho de que la suma de tipo l^p sí depende en general del sistema de seminormas que escojamos para definir la topología de cada espacio sumando.

Es fácil encontrar ejemplos de espacios que no son infinitamente reproducibles en sentido l^p. Por ejemplo, si F es un espacio de Fréchet Montel, entonces no puede ser infinitamente reproducible en sentido l^p, ya que el espacio $(\Sigma_n F_n)_{l^p}$, contiene un subespacio isomorfo a l^p (rf. [1]).

En el caso de los espacios escalonados de Köthe con base K–monótona, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.– Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio medida puramente no atómico y $\Lambda^p(X, \mathfrak{A}, \mu, g_k)$, $p \neq 2$, un espacio escalonado de Köthe que posee base K–monótona. Entonces Λ^p es infinitamente reproducible en sentido l^p.

Demostración.— En primer lugar vamos a construir un espacio escalonado $\Gamma^p(Y, \beta, \upsilon, h_k)$ isomorfo a $(\Sigma_n \Lambda_n^p)_{l^p}$. Para ello sea $(X_n, \mathfrak{A}_n, \mu_n)$ el espacio medida $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, Y es la unión disjunta de los conjuntos X_n, $n \in \mathbb{N}$; los elementos de β son uniones disjuntas de la forma $\cup \{A_n ; n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathfrak{A}_n\}$, y υ está definida como

$$\upsilon(\bigcup_n A_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n), \bigcup_n A_n \in \beta$$

Por último consideramos

$$I_n(g_k)(x) = \begin{cases} g_k(x) & x \in X_n \\ 0 & x \notin X_n \end{cases}$$

y definimos

$$h_k = \Sigma_{n=1}^{\infty} \chi_{X_n} I_n(g_k)$$

No es difícil comprobar que $\Gamma^p(Y, \beta, \upsilon, h_k)$ es isomorfo al espacio $(\Sigma_n \Lambda_n^p)_{l^p}$ (rf. [1]).

Ahora, por el Teorema A, el espacio Λ^p posee una matriz asociada $(\lambda_{j,k})$ respecto de una familia de conjuntos $\{A_j\}_j$. Nuestro propósito es comprobar que Γ^p posee la misma matriz asociada; así, como (Y, β, υ) es puramente no atómico por construcción y por serlo $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, podremos aplicar la Proposición 1 y obtendremos que Λ^p es K–isomorfo a Γ^p, luego será isomorfo a $(\Sigma_n \Lambda_n^p)_{l^p}$.

En efecto, denotamos por $A_{j,n}$ el conjunto A_j considerado en X_n y construimos

$$B_j = \cup\{A_{j,n} ; n \in \mathbb{N}\}, j \in \mathbb{N}$$

Es claro que los conjuntos B_j tienen medida no nula, son disjuntos dos a dos y $Y = \bigcup_j B_j$. Es fácil comprobar que

$$h_k \chi_{B_j} = \lambda_{j,k} h_{k+1} \chi_{B_j}$$

con lo que $(\lambda_{j,k})$ es una matriz asociada para Γ^p, concluyendo la demostración.

c.q.d.

Como consecuencia de esta Proposición, y aplicando un método de demostración semejante al de descomposición de Pelcynski, es posible probar el siguiente Corolario.

Corolario 1.— Sea $\Lambda^p(X, \mathfrak{A}, \mu, g_k)$ un espacio escalonado de Köthe, en las condiciones de la Proposición anterior, y sea F un subespacio complementado de Λ^p. Entonces F es isomorfo a Λ^p si y sólo si F contiene un subespacio complementado isomorfo a Λ^p.

Como una segunda aplicación del Teorema A estudiaremos la "semejanza" entre los espacios escalonados de Köthe con base K—monótona y los espacios escalonados de sucesiones; este hecho nos permitirá caracterizar los espacios escalonados de Köthe con base K—monótona *casinormables.*

Lema 1.— Si $\Lambda^p(X, \mathfrak{A}, \mu, g_k)$ es un espacioo escalonado de Köthe con matriz asociada $(\lambda_{n,k})$ respecto de la familia $\{A_n\}$, entonces Λ^p es K—isomorfo a un espacio $\Gamma^p(X, \mathfrak{A}, \mu, h_k)$ que posee la misma matriz asociada y los escalones h_k son constantes sobre cada conjunto A_n, $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $g_k = 0$, y construimos

$$f = \Sigma_{n=1}^{\infty} g_n(\chi_{S(g_n)} - \chi_{S(g_{n-1})})$$

y definimos $h_k = g_k/f$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Es claro que $\Gamma^p(X, \mathfrak{A}, \mu, h_k)$ tiene a $(\lambda_{n,k})$ por matriz asociada respecto a $\{A_n\}$, y cada escalon h_k es constante en cada conjunto A_n. Por otra parte, el operador lineal que aplica $\xi \in \Lambda^p$ en $\xi f^{1/p} \in \Gamma^p$ es un K—isomorfismo, lo que cierra la demostración.

c.q.d.

En virtud de este Lema, dado un espacio escalonado de Köthe $\Lambda^p(X, \mathfrak{A}, \mu, h_k)$ con matriz asociada $(\lambda_{n,k})$ respecto de $\{A_n\}$, podemos suponer (salvo un K—isomorfismo), que existe una matriz real $(a_n^k)_{n,k\in\mathbb{N}}$, tal que

$$h_k \chi_{A_n} = a_n^k \chi_{A_n}, \qquad \forall n, k \in \mathbb{N}$$

Así pues, en el tipo de espacios que nos ocupa, resulta que la topología del espacio viene determinada por una tabla de valores constantes (a_n^k), como ocurre con los espacios escalonados de sucesiones. Esto sugiere adaptar los resultados y técnicas de demostración que se han desarrollado en los espacios escalonados de sucesiones a los espacios escalonados de Köthe con base K—monótona, cuya estructura topológica es más "compleja" (para ilustrar esta afirmación, haremos notar que la clase de espacios escalonados de Köthe con base K—monótona contiene a los espacios escalonados de sucesiones; por otra parte, todo espacio escalonado de sucesiones es isomorfo a un subespacio complementado de un espacio escalonado de Köthe con base K—monótona, mientras que un espacio $\Lambda^p(X, \mathfrak{A}, \mu, g_k)$, $p \neq 2$, con $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ no puramente atómico, no puede ser isomorfo a un subespacio de un espacio escalonado de sucesiones (ver [1])).

En este sentido, hemos obtenido la siguiente caracterización, que generaliza la caracterización de Valdivia de los espacios escalonados de sucesiones, ([8]).

Teorema.— Sea $\Lambda^p(X, \mathfrak{A}, \mu, g_k)$ un espacio escalonado de Köthe con base K—monótona y con matriz de valores constantes (a_n^k). Entonces es casi normable si y sólo si para cada $p \in \mathbb{N}$, existe $q \in \mathbb{N}$, tal que para cada $r \geqslant q$, si

$$\inf\{(a_m^p / a_m^q);\quad m \in P\} > 0, \quad P \subset \mathbb{N}$$

entonces

$$\inf\{(a_m^p / a_m^r);\quad m \in P\} > 0$$

No transcribiremos la extensa demostración de este resultado, que consiste por otra parte en una adecuada generalización de la demostración de Valdivia en el caso de medidas discretas (espacios escalonados de sucesiones).

Queda planteado el problema de estudiar el alcance real de la riqueza de resultados que se obtienen para los espacios escalonados de Köthe con base K–monótona, de los que aquí hemos dado sólo unos ejemplos que justifican su introducción y estudio.

Nota.— El autor ha demostrado, recientemente, que todo espacio escalonado de Köthe, separable, es isomorfo (incluso orden isomorfo) a un espacio escalonado de Köthe con una base K–monótona.

BIBLIOGRAFIA

[1] DIAZ, J. C.: Subespacios y bases K-monótonas en los espacios escalonados de Köthe. Tesis Doctorales de la Universidad de Granada. Granada, (1985).

[2] — : Subespacios de un espacio escalonado de Köthe K–isomorfos a un espacio de sucesiones. *Collec. Math. XXXV,* 2, 149–166, (1984).

[3] — : Bases K–monótonas en los espacios escalonados de Köthe I. *Rev. Real Acad. Cien.* Madrid.

[4] LOPEZ–MOLINA, J. A.: Primaridad en los espacios escalonados de Köthe. Actas de las X Jornadas Hispano–Lusas de Matemáticas. Murcia, (1985).

[5] LOPEZ–MOLINA, J. A.: The dual and bidual of an echelon Köthe space. *Collec. Math.* 31, 2, 159–191, (1980).

[6] — : Subespacios de un espacio escalonado de Köthe. *Rev. Real Acad. Cien de* Madrid, 75, 3°, 597–624, (1981).

[7] ROYDEN, H. L.: Real Analysis. *Mac Millan*, (1968).

[8] VALDIVIA, M.: On quasi–normable echelon spaces. *Proc. Edinburgh. Math. Soc.* 24, 73–80, (1981).

J. C. Díaz Alcaide
Cátedra de Matemáticas
E.T.S.I. Agrónomos
14004 Córdoba