Bases y casirreflexividad en espacios de Banach

POR MANUEL VALDIVIA UREÑA , ACADEMICO NUMERARIO

Recibido: 3 Febrero 1988

Abstract

Let X be a separable non quasi-reflexive Banach space. In this paper it is proved there is a closed subspace Y of X such that Y and X/Y are not quasi-reflexive and X/Y has a Schauder basis. Moreover, if X^* is separable, Y can taken such than X/Y has a shrinking Schauder basis.

Resumen

Sea X un espacio de Banach separable que no es casirreflexivo. En este artículo se prueba que existe un subespacio cerrado Y de X tal que Y y X/Y no son casirreflexivos y X/Y tiene una base de Schauder. Además, si X^* es separable, se puede tomar Y de manera que X/Y tenga una base de Schauder contractiva.

Los espacios vectoriales que utilizamos aquí están definidos sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de los números reales o complejos. Si X es un espacio de Banach, ponemos $\|\cdot\|$ para su norma; X^* es el espacio de Banach conjugado de X, X^{**} y X^{***} son los conjugados de X^* y X^{**}, respectivamente. Identificamos X y X^*, en la forma usual, con subespacios de X^{**} y X^{***}, respectivamente.

Si B es la bola unidad cerrada de un espacio de Banach X, B^* es la bola unidad cerrada de X^*. Ponemos

$$\langle x, u\rangle, \quad x \in X^{**}, \quad u \in X^{***}$$

en vez de $u(x)$. Si (x_n) es una sucesión en X (en X^*) escribimos $[x_n]$ para su envoltura lineal cerrada. Análogamente, si (x_{mn}) es una sucesión doble, $[x_{mn}]$ es su envoltura lineal cerrada. Decimos que (x_n) $((x_{mn}))$ está normalizada si

$$\|x_n\| = 1, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad (\|x_{mn}\| = 1, \quad m, n = 1, 2, \ldots).$$

Si (x_n) es una sucesión básica en un espacio de Banach X, es decir, si (x_n) es una base de Schauder en $[x_n]$, ponemos x_n^*, $n = 1, 2, \ldots$, para las

* Subvencionado en parte por CAICYT.

funcionales de $[x_n]^*$ asociadas a la base (x_n). La sucesión básica es contractiva si $[x_n^*] = [x_n]^*$. La sucesión básica es acotadamente completa si dada una sucesión (a_n) en $\mathbb{K}$ tal que

$$\sup \{\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \| : n = 1, 2, ...\} < \infty$$

la serie $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j$ converge en X.

Si X es un espacio de Banach, la topología débil-estrella sobre X^* es la topología de la convergencia puntual sobre cada punto de X. Análogamente, la topología débil-estrella sobre X^{**} (X^{***}) es la topología de la convergencia puntual sobre cada punto de X^* (X^{**}). Decimos que un subespacio E de X es casidenso si cada vector u de X está en la clausura débil-estrella de un acotado de E. Si P es una proyección en X, P^* es la proyección en X^* conjugada de P.

Un espacio de Banach X es casirreflexivo si es de codimensión finita en X^{**}. En particular, cada espacio de Banach reflexivo es casirreflexivo. El primer ejemplo de un espacio de Banach casirreflexivo y no reflexivo se debe a R. C. James [4]. En [10] hemos obtenido un método para conseguir espacios de Banach casirreflexivos.

El lema siguiente comprende, como casos particulares, algunos resultados clásicos sobre sucesiones (ver [1], [5] y [9]). En parte de la prueba se utiliza un método debido a Mazur que permite construir sucesiones básicas.

Lema.— Sea (x_{mn}) *una sucesión doble normalizada en un espacio de Banach* X. *Sea* (u_n) *una sucesión en* X^* *tal que* $[u_n]$ *es casidenso en* X. *Si*

$$\lim_n \langle x_{mn}, u_j \rangle = 0, \quad m, j = 1, 2, ...$$

existe una subsucesión $(y_{mn})_{n=1}^{\infty}$ *de* $(x_{mn})_{n=1}^{\infty}$, $m = 1, 2, ...,$ *de manera que*

$$y_{11}, y_{12}, y_{21}, ..., y_{1n}, y_{2(n-1)}, ..., y_{(n-1)2}, y_{n1}, ...$$

es una sucesión básica de X *y el conjunto de las restricciones de los elementos de* $[u_n]$ *a* $[y_{mn}]$ *coincide con* $[y_{mn}^*]$.

Demostración.— Sea A la bola unidad cerrada de X^*. Sea F la envoltura lineal de (u_n). Tomamos en $F \cap A$ un subconjunto numerable denso

$$\{v_1, v_2, ..., v_n, ...\}$$

Obviamente,

$$\lim_n \langle x_{mn}, v_j \rangle = 0, \quad m, j = 1, 2, ...$$

Podemos B para el conjunto polar de $F \cap A$ en X. Puesto que $[u_n]$ es casidenso en X^*, es inmediato que B es un acotado de X. Tomamos ahora B como bola unidad de X. Entonces, B^* es la clausura débil-estrella de $\{v_1, v_2, ..., v_n, ...\}$ en X^*. Denotamos por $\|\cdot\|$ la norma asociada a la bola B.

Ordenemos los subíndices mn en la sucesión:

$$11, 12, 21, ..., 1n, 2(n-1), ..., (n-1)2, n1, ..., \tag{1}$$

es decir, el subíndice pq es anterior al mn si $p + q < m + n$ o bien $p + q = m + n$ y $p < m$. Tomamos $0 < \varepsilon_{mn} < 1$ de manera que

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \varepsilon_{mn} < \infty$$

Ponemos $y_{11} = x_{11}$. Procedemos por recurrencia y suponemos que para un cierto subíndice pq hemos obtenido los vectores y_{mn} de manera que mn coincide con pq o es anterior a él en la sucesión (1). Escribimos Y_{pq} para la envoltura lineal de dichos vectores. Sea rs el subíndice siguiente al pq en (1). La restricción de B^* a Y_{pq} coincide con la bola unidad cerrada de Y_{pq}^* y, puesto que esta bola es compacta, existe un subconjunto finito A_{pq} en $\{v_1, v_2, ..., v_n, ...\}$, que contiene a $\{v_1, v_2, ..., v_{p+q}\}$, de manera que si u es un elemento cualquiera de B^*, existe un v en A_{pq}, que depende de u, tal que

$$\sup \{|\langle x, u - v\rangle| : x \in B \cap Y_{pq}\} < \frac{1}{4} \varepsilon_{pq} \tag{2}$$

Sea n_0 el mayor de los enteros positivos $m + n$ tales que x_{mn} pertenece a Y_{pq}. Puesto que

$$\lim_n \langle x_{rn}, v_j\rangle = 0, \quad j = 1, 2, ...,$$

existe un entero positivo $n_1 > n_0$ tal que

$$|\langle x_{rn}, w\rangle| < \frac{1}{8} \varepsilon_{pq}, \quad n \geqslant n_1, \quad w \in A_{pq} \tag{3}$$

Ponemos $x_{rn_1} = y_{rs}$. Veamos ahora una propiedad que tiene el vector y_{rs}. Tomamos un vector z en Y_{pq} con $\|z\| = 1$. Hallamos un vector u en X^* tal que

$$\|u\| = 1, \qquad \langle z, u\rangle = 1$$

Determinamos un vector v en A_{pq} que verifique (2). Entonces:

$$|\langle z, v\rangle| \geqslant |\langle z, u\rangle| - |\langle z, v - u\rangle| \geqslant 1 - \frac{1}{4} \varepsilon_{pq}$$

Tomamos un elemento cualquiera λ de $\mathbb{K}$. Si $|\lambda| \geqslant 2$, se tiene que

$$\|z + \lambda y_{rs}\| \geqslant |\lambda|\ \|y_{rs}\| - \|z\| \geqslant 1.$$

Si $|\lambda| < 2$, resulta, teniendo en cuenta (3) para $n = n_1$ y $w = v$, que

$$\|z + \lambda y_{rs}\| \geqslant |\langle z + \lambda y_{rs}, v\rangle| \geqslant |\langle z, v\rangle| - |\lambda| \cdot |\langle y_{rs}, v\rangle| \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \frac{1}{4}\ \varepsilon_{pq} - 2\ \frac{1}{8}\ \varepsilon_{pq} = 1 - \frac{1}{2}\ \varepsilon_{pq} > \frac{1}{1 + \varepsilon_{pq}}.$$

Se obtiene de lo anterior para cada y de Y_{pq}, cada λ de $\mathbb{K}$:

$$\|y\| \leqslant (1 + \varepsilon_{pq})\ \|y + \lambda y_{rs}\| \tag{4}$$

Veamos ahora que

$$y_{11}, y_{12}, y_{21}, \dots, y_{1n}, y_{2(n-1)}, y_{3(n-2)}, \dots, y_{(n-2)2}, y_{n1}, \dots \tag{5}$$

es una sucesión básica de X. Tomamos dos subíndices cualesquiera pq y mn en (1) de manera que pq sea anterior a mn. Sea hk el subíndice inmediatamente anterior a mn. Tomamos

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, \dots, a_{pq}, \dots, a_{hk}, a_{mn}$$

en $\mathbb{K}$ con los subíndices colocados en el orden (1). Resulta, aplicando sucesivamente (4), que

$$\|a_{11}y_{11} + a_{12}y_{12} + a_{21}y_{21} + \dots + a_{pq}y_{pq}\| \leqslant$$

$$\leqslant (1 + \varepsilon_{pq}) \dots (1 + \varepsilon_{hk})\ \|a_{11}y_{11} + a_{12}y_{12} + a_{21}y_{21} + \dots +$$

$$+ a_{pq}y_{pq} + \dots + a_{hk}y_{hk} + a_{mn}y_{mn}\|$$

y, por tanto, (5) es una sucesión básica en X tal que las proyecciones P_{rs} definidas en $[y_{mn}]$ y asociadas a la base (5) verifican:

$$\lim_{r+s} \|P_{rs}\| = 1$$

A continuación probaremos que el conjunto de las restricciones de los elementos de $[u_n]$ a $[y_{mn}]$ está contenido en $[y^*_{mn}]$, para lo cual basta ver que dado un entero positivo p, la restricción v'_p de v_p a $[y_{mn}]$ está en $[y^*_{mn}]$. Dado el subíndice mn, ponemos m_1n_1 para el subíndice siguiente al mn en (1). Se obtiene de (3) que

$$|\langle y_{m_1n_1}, w\rangle| < \varepsilon_{mn}, \qquad w \in A_{mn}.$$

Se tiene que v_p está en A_{mn} para $m+n>p$ y, por tanto,

$$|\langle y_{m_1 n_1}, v_p\rangle| < \varepsilon_{mn}, \qquad m+n>p,$$

de donde se deduce que

$$\sum_{m_1+n_1>p+1} \|\langle y_{m_1 n_1}, v_p\rangle y^*_{m_1 n_1}\| \leqslant \sum_{m_1+n_1>p+1} \varepsilon_{mn} < \infty$$

y, en consecuencia, la serie

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \langle y_{mn}, v_p\rangle y^*_{mn}$$

converge absolutamente a v'_p, de aquí que este vector pertenezca a $[y^*_{mn}]$.

Sea $[y_{mn}]^{\perp}$ el subespacio de X^* ortogonal a $[y_{mn}]$. Sea φ la aplicación canónica de X^* sobre $X^*/[y_{mn}]^{\perp}$. Si u pertenece a X^*, identificamos en la forma ordinaria $\varphi(u)$ con la restricción de u a $[y_{mn}]$, es decir, identificamos $[y_{mn}]^*$ con $X^*/[y_{mn}]^{\perp}$. Hemos visto antes que $\varphi([u_n])$ está contenido en $[y^*_{mn}]$. Sea ψ la aplicación de $[u_n]$ en $[y^*_{mn}]$ que coincide con φ en cada punto de $[u_n]$. Se tiene que ψ es continua y vamos a ver ahora que también es casi-abierta [2, pág. 296]. Tomamos un vector y^* en $[y^*_{mn}]$, $\|y^*\| = 1$. Dado un $\varepsilon > 0$, hallamos un entero positivo q tal que

$$\varepsilon_{1q} < \frac{\varepsilon}{3(1+\varepsilon)}, \quad \|P_{1q}\| \leqslant 1+\varepsilon, \quad \sum_{m+n>q+1} \varepsilon_{mn} < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\|y^* - P^*_{1q} y^*\| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Si t_q es la restricción de $P^*_{1q} y^*$ a Y_{1q}, determinamos un w en A_{1q} tal que

$$\sup\{|\langle x, w - t_q\rangle| : x \in B \cap Y_{1q}\} < \varepsilon_{1q}.$$

Si w_1 es la restricción de w en $[y_{mn}]$ e I es la aplicación idéntica en este espacio, se tiene que

$$\|w_1 - y^*\| \leqslant \|w_1 - P^*_{1q} y^*\| + \|P^*_{1q} y^* - y^*\| \leqslant$$

$$\leqslant \|P^*_{1q} w_1 + (I^* - P^*_{1q}) w_1 - P^*_{1q} y^*\| + \frac{1}{3}\varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \|P^*_{1q}(w_1 - y^*)\| + \|(I^* - P^*_{1q}) w_1\| + \frac{1}{3}\varepsilon$$

Por otra parte,

$$\|P_{1q}^* (w_1 - y^*)\| = \sup \{|\langle x, P_{1q}^* (w_1 - y^*)\rangle| : x \in B \cap [y_{mn}]\} =$$

$$= \sup \{|\langle P_{1q} x, w_1 - y^*\rangle| : x \in B \cap [y_{mn}]\} =$$

$$= \sup \{|\langle P_{1q} x, w - t_q\rangle| : x \in B \cap [y_{mn}]\} =$$

$$= \|P_{1q}\| \sup \{||\langle \|P_{1q}\|^{-1} P_{1q} x, w - t_q\rangle| : x \in B \cap [y_{mn}]\} \leqslant$$

$$\leqslant (1 + \varepsilon) \sup \{|\langle z, w - t_q\rangle| : z \in B \cap Y_{1q}\} < (1 + \varepsilon)\, \varepsilon_{1q} < \frac{\varepsilon}{3}$$

y

$$\|(I^* - P_{1q}^*)\, w_1\| = \sup \{|\langle x, (I^* - P_{1q}^*)\, w_1\rangle| : x \in \cap [y_{mn}]\} =$$

$$= \sup \{|\langle x, \sum_{m+n>1+q} \langle y_{mn}, w\rangle\, y_n^*\rangle| : x \in B \cap [y_{mn}]\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m+n>1+q} |\langle y_{mn}, w\rangle| \leqslant \sum_{m+n>1+q} \varepsilon_{mn} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Por tanto,

$$\|w_1 - y^*\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

de donde se deduce que ψ es casi-abierta y, teniendo en cuenta el teorema de la gráfica cerrada, ψ es un homomorfismo topológico de $[u_n]$ sobre $[y_{mn}^*]$ y así $\psi([u_n]) = [y_{mn}^*]$, (ver [3, págs. 296, 297 y 298]).

Q.E.D.

Nota 1.– Si en el lema anterior, $x_{mn} = x_n$, $m, n = 1, 2, \ldots$, resulta que (5) es una subsucesión de (x_n). En consecuencia, se tiene: a) *Sea* (x_n) *una sucesión normalizada en un espacio de Banach X. Sea* (u_n) *una sucesión en* X^* *tal que* $[u_n]$ *es casidenso en X. Si*

$$\lim_n \langle x_n, u_m\rangle = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

existe una subsucesión básica (y_n) *de* (x_n) *de manera que el conjunto de las restricciones de los elementos de* $[u_n]$ *a* $[y_n]$ *coincide con* $[y_n^*]$.

Nota 2.– El resultado b) se encuentra en [4], utilizando sucesiones en vez de sucesiones dobles: b) *Sea Y un espacio de Banach separable. Sea* (x_{mn}) *una sucesión doble normalizada en Y tal que* $(x_{mn})_{n=1}^{\infty}$ *converge al origen para la topología débil-estrella,* $m = 1, 2, \ldots$ *Entonces existe una subsucesión* $(y_{mn})_{n=1}^{\infty}$ *de* $(x_{mn})_{n=1}^{\infty}$, $m = 1, 2, \ldots$, *tal que*

$$y_{11}, y_{12}, y_{21}, \ldots, y_{1n}, y_{2(n-1)}, \ldots, y_{(n-1)2}, y_{n1}, \ldots \tag{6}$$

es una sucesión básica débil-estrella de Y^*. Si además Y^* es separable, (6) *puede tomarse acotadamente completa.* El resultado b) es un caso particular de nuestro lema tomando $Y^* = X$ y eligiendo una sucesión (u_n) en Y^{**} tal que $[u_n] = Y$. Si Y^* es separable, se puede renormar Y en la forma realizada por Kadec [6] y Klee [7] (ver [8, págs. 12-13]) y obtener (6) acotadamente completo (ver [5 y [8, págs. 13]).

El siguiente resultado que se encuentra en [2] lo necesitaremos después: c) *Si X es un espacio de Banach que no es casirreflexivo, existe un subespacio cerrado separable Y de X tal que Y y X/Y no son casirreflexivos.*

Teorema 1.– Si X es un espacio de Banach separable que no es casirreflexivo, existe un subespacio cerrado Y de X que tiene las siguientes propiedades:

1. *Y no es casirreflexivo.*
2. *X/Y no es casirreflexivo y tiene una base de Schauder.*

Demostración.– De acuerdo con el resultado c), hallamos un subespacio cerrado T de X tal que T y X/T no son casirreflexivos. Denotamos X/T por Z y escribimos $Z^\perp$ para el subespacio de Z^{***} ortogonal a Z. Identificamos, en la forma usual, $Z^\perp$ con el conjugado del espacio de Banach Z^{**}/Z. Este último espacio es de dimensión infinita y, en consecuencia, podemos hallar dos sucesiones (z_n) y (u_n) en Z^{**}/Z y $Z^\perp$, respectivamente, de manera que

$$\|u_n\| = 1, \quad \langle z_n, u_m\rangle = 0, \quad n \neq m, \quad \langle z_n, u_n\rangle = 1, \quad m, n = 1, 2, \ldots$$

Si φ es la aplicación canónica de Z^{**} sobre Z^{**}/Z, hallamos x_n en Z^{**} tal que $\varphi(x_n) = z_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Sea

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$$

un subconjunto denso de Z. La esfera unidad de Z^* es densa en la bola unidad de Z^{***} para la topología débil-estrella y, por tanto, podemos hallar, para cada entero positivo m, una sucesión (u_{mn}) en Z^* tal que

$$\|u_{mn}\| = 1, \quad \lim_n \langle x_j, u_{mn}\rangle = \langle x_j, u_m\rangle = 0, \quad j \neq m,$$

$$\lim_n \langle x_j, u_{jn}\rangle = \langle x_j, u_j\rangle = 1, \quad \lim_n \langle y_j, u_{mn}\rangle = \langle y_j, u_m\rangle = 0, \qquad m, j = 1, 2, \ldots$$

Entonces $(u_{mn})_{n=1}^\infty$ converge al origen en Z^* para la topología débil-estrella y, aplicando el resultado b), obtenemos una subsucesión $(v_{mn})_{n=1}^\infty$ de $(u_{mn})_{n=1}^\infty$, $m = 1, 2, \ldots$, tal que

$$v_{11}, v_{12}, v_{21}, \ldots, v_{1n}, v_{2(n-1)}, \ldots, v_{(n-1)2}, v_{n1}, \ldots \tag{7}$$

es una subsucesión básica débil-estrella de Z^*. Sea S la envoltura lineal débil-estrella cerrada de la sucesión (7) en Z^*. Si $S^\perp$ es el subespacio de Z ortogonal a S, se tiene que $Z/S^\perp$ tiene una base de Schauder y suponiendo que S tiene la norma inducida por Z^*, S es el espacio de Banach conjugado de $Z/S^\perp$. Veamos ahora que S no es casirreflexivo. En efecto, $(v_{mn})_{n=1}^\infty$ es una sucesión acotada de S y, por tanto, tiene un punto de adherencia w_m en Z^{***} para la topología débil-estrella. Obviamente, w_m coincide con u_m en Z en $\{x_1, x_2, ..., x_p, ...\}$, $m = 1, 2, ...$ Tomemos los elementos de $\mathbb{K}$:

$$a_1, a_2, ..., a_r$$

y supongamos que existe un u en S tal que

$$u + a_1 w_1 + a_2 w_2 + ... + a_r w_r = 0$$

Entonces

$$0 = \langle y_p, u + a_1 w_1 + a_2 w_2 + ... + a_r w_r \rangle = \langle y_p, u \rangle + a_1 \langle y_p, u_1 \rangle +$$

$$+ a_2 \langle y_p, u \rangle + ... + a_r \langle y_p, u_r \rangle = \langle y_p, u \rangle, \qquad p = 1, 2, ...,$$

y, en consecuencia, $u = 0$. Resulta de aquí que

$$0 = \langle x_p, a_1 w_1 + a_2 w_2 + ... + a_r w_r \rangle = a_1 \langle x_p, u_1 \rangle + a_2 \langle x_p, u_p \rangle + ... +$$

$$+ a_r \langle x_p, u_r \rangle = a_p, \qquad p = 1, 2, ..., \mathrm{r}.$$

Por tanto, S es de codimensión r en la envoltura lineal de

$$S \cup \{w_1, w_2, ..., w_r\},$$

de donde se deduce que S es de codimensión infinita en S^{**} y, consecuentemente, $Z/S^\perp$ no es casirreflexivo.

Sea ψ la aplicación canónica de X sobre $X/T = Z$. Ponemos

$$Y := \psi^{-1} (S^\perp).$$

Puesto que Y contiene a T, Y no es casirreflexivo. Por otra parte, X/Y es isomorfo a $(X/T)/S^\perp = Z/S^\perp$, que no es casirreflexivo y tiene una base de Schauder.

Q.E.D.

Corolario 1.1.— Un espacio de Banach X, separable y de dimensión infinita, es casirreflexivo si, y sólo si, cada cociente separado de X con base Schauder es casirreflexivo.

Teorema 2.– Si X es un espacio de Banach que no es casirreflexivo y X^* es separable, existe un subespacio cerrado Y de X que cumple las siguientes condiciones:

1. *Y no es casirreflexivo.*
2. *X/Y no es casirreflexivo y tiene una base de Schauder contractiva.*

Demostración.– Es análoga a la prueba del teorema 1, tomando la sucesión básica (7) acotadamente completa. Entonces X/Y tiene una base de Schauder contractiva.

Q.E.D.

El corolario siguiente es consecuencia inmediata del teorema anterior.

Corolario 1.2.– Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Si X^* es separable, X es casirreflexivo si, y sólo si, cada cociente separado de X con base de Schauder contractiva es casirreflexivo.

BIBLIOGRAFIA

[1] BESSAGA, C. y PELCZYNSKI, A.: *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces.* Studia Math. *17*, 151-164 (1958).

[2] DAVIS, J. W. y JOHNSON, W. B.: *Basic sequences and norming subspaces in non-quasi-reflexive Banach spaces.* Israel J. Math. *14*, 353-367 (1973).

[3] HORVÁTH, J.: *Topological vector spaces and distributions I.* Reading, Massachussetts, 1966.

[4] JAMES, R. C.: *Bases and reflexivity of Banach spaces.* Ann. of Math. *52*, 518-527 (1950).

[5] JOHNSON, W. B. y ROSENTHAL, H. R.: *On w*-basic sequences and their applications to the study of Banach spaces.* Studia Math. *43*, 77-92 (1972).

[6] KADEC, M. I.: *On the connection between weak and strong convergence.* Dopovidi Akad. Nauk Ukrain *9*, 949-952 (1959).

[7] KLEE, V. I.: *Mapping into normed linear spaces.* Fund. Math. *49*, 25-34 (1960/61).

[8] LINDESTRAUSS, J. y TZAFRIRI, L.: *Classical Banach spaces I.* Springer-Verlag, Berlin 1977.

[9] PELCZYNSKI, A.: *A note on the paper of I. Singer "Basic sequences and reflexivity of Banach spaces".* Studia Math. *21*, 371-374 (1962).

[10] VALDIVIA, M.: *Banach spaces X with X** separable.* Israel J. Math. *59*, 107-111 (1987).

Departamento de Análisis
Dr. Moliner, 50
Burjasot
46100 - VALENCIA