Ensayo de Teoría Unitaria de las Ondas Relativistas de Materia y Radiación. Las funciones fractales y los objetos fractales en Mecánica y en Probabilidad

Por Dario Maravall Casesnoves

Recibido: 3 febrero 1988

Abstract

Firstly the intrinsic equations of the relativistic dynamics of the material point is developed. The paper presents a unified theory of the relativistic waves of matter and the radiation in a refringent medium and the new Lorentz transformations of frequence and wavelength are calculated as well as the Lorentz transformations of the partial differentials confirming the invariance of the new equation od waves, the physical consecuences are discussed. Fractal objetcs in Mechanics and Probability Theory are introduced, as it is the new concept of a fractal function. Finally the paper analyzes the properties of random variables with uniform distribution in the triadic set of Cantor.

1. LAS ECUACIONES INTRINSECAS DE LA DINAMICA RELATIVISTA DE UN PUNTO MATERIAL. APLICACIONES AL ELECTROMAGNETISMO

De la ecuación de la dinámica relativista del punto material:

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = \vec{F} \tag{1}$$

donde m y v son la masa y la velocidad del punto material, c la velocidad de la luz en el vacío y $\vec{F}$ la fuerza, si $\vec{T}$, $\vec{N}$ y $\vec{B}$ son los vectores unitarios de la tangente, la normal principal y la binormal de la trayectoria del punto, teniendo en cuenta que el primer miembro de (1) se escribe:

$$\vec{v} = v\vec{T}; \qquad \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\vec{T}}{dt} \tag{2}$$

si ρ es el radio de curvatura de la trayectoria; por la segunda fórmula de Frenet es:

$$v = \frac{ds}{dt}; \qquad \frac{d\vec{T}}{dt} = v \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{v}{\rho} \vec{N} \tag{3}$$

se sigue que:

$$\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\ \frac{dv}{dt}=F_t\,;\qquad \frac{mv^2}{\rho\sqrt{1-v^2/c^2}}=F_n\,;\qquad 0=F_b \tag{4}$$

donde F_t, F_n y F_b son las proyecciones de la fuerza sobre T, N y B. Las (4) son las ecuaciones intrínsecas de la dinámica relativista del punto material libre.

En el caso en que el movimiento del punto material es forzosamente sobre una curva, al segundo miembro de (4) hay que sumarle la reacción normal N de la curva sobre el punto, con lo que las ecuaciones intrínsecas se escriben:

$$\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\ \frac{dv}{dt}=F_t\,;$$

$$\frac{mv^2}{\rho\sqrt{1-v^2/c^2}}=F_n+N_n\,;\qquad F_b+N_b=0 \tag{5}$$

En el caso en que el punto material se mueve forzosamente sobre una superficie, al segundo miembro de (4) hay que sumarle la reacción normal N de la superficie sobre el punto y proyectando sobre el triedro geodésico de la superficie en vez de sobre el triedro intrínseco de la curva, las ecuaciones intrínsecas son:

$$\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\ \frac{dv}{dt}=F_t\,;\qquad \frac{mv^2}{\rho_g\sqrt{1-v^2/c^2}}=F_g\,;$$

$$\frac{mv^2}{\rho_n\sqrt{1-v^2/c^2}}=F_n+N \tag{6}$$

donde los subíndices g y n significan proyección sobre la normal geodésica y la normal a la superficie.

Las tres ecuaciones intrínsecas (4), (5) y (6) difieren de las de la dinámica clásica por la aparición de los factores:

$$\frac{1}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\,;\qquad \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{7}$$

para la aceleración tangencial la primera (7) y para la aceleración normal la segunda. Surgen de esta manera los ya conocidos conceptos de masa longitudinal y masa transversal de la dinámica relativista. Ahora bien, teniendo en cuenta la definición relativista de masa, si seguimos llamando aceleración a la magnitud mecánica que multiplicada por la masa da la fuerza, se sigue que la aceleración normal relativista es igual a la clásica y la aceleración tangencial relativista se obtiene multiplicando la clásica por:

$$\frac{1}{1 - v^2/c^2} \tag{8}$$

En el caso del movimiento sobre una superficie, si las fuerzas aplicadas ($\vec{F}$) son nulas, se sigue el mismo resultado que para la dinámica clásica, es decir, que el punto sigue una geodésica con velocidad constante porque de las dos primeras (6) se sigue:

$$\frac{dv}{dt} = 0; \qquad \frac{1}{\rho_g} = 0 \Rightarrow \rho = \rho_n \tag{9}$$

y de la tercera:

$$\frac{mv^2}{\rho\sqrt{1 - v^2/c^2}} = N \tag{10}$$

la reacción normal es directamente proporcional a la curvatura, pero mayor en valor absoluto que la correspondiente a la dinámica clásica.

En el caso de una carga eléctrica que se mueve en un campo magnético uniforme, las ecuaciones del movimiento son las mismas que para la física clásica (ver bibliografía) con tal de sustituir el tiempo ordinario t por el propio τ, por tanto la trayectoria es helicoidal o circular, ya que la ecuación del movimiento es:

$$m\vec{r}'' = \frac{q}{c}\, \vec{r}' \wedge \vec{B} \tag{11)(*}$$

donde q es la carga eléctrica y B la inducción magnética constante; el acento significa derivación respecto a τ. De (11) se sigue que la fueza es normal a la velocidad, luego:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{cte} \tag{12}$$

Como no hay aceleración tangencial, tomando módulos en (11) de la segunda (5) se deduce:

$$\frac{mv^2}{\rho\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{q}{c}\, |\vec{v} \wedge \vec{B}| \tag{13}$$

en el caso en que el movimiento es helicoidal y:

$$\frac{mv^2}{R\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{q}{c}\, vB \Rightarrow R = \frac{mvc}{qB\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{14}$$

en el caso en que es circular. Las fórmulas anteriores se distinguen de las clásicas en la aparición del factor constante:

(*) $\vec{r}$ es el vector de posición.

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{15}$$

es decir, el radio relativista es mayor que el clásico.

La ecuación relativista tomando como variable independiente t en vez de τ de (11) y (15) es:

$$\frac{q}{c}\,\vec{\dot{r}} \wedge \vec{B} = \frac{dt}{d\tau}\, m\vec{\ddot{r}} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,\vec{\ddot{r}} \tag{16}$$

donde los puntos significan derivación respecto a t.

En el caso de un punto material obligado a moverse sobre una recta, la segunda (5) es:

$$F_n + N = 0 \tag{17}$$

que expresa que la presión que ejerce el punto sobre la recta (igual y opuesta a N) es igual a la componente normal de la fuerza aplicada. Una corriente eléctrica rectilínea es la materialización de la trayectoria forzada sobre una recta de electrones, y la fuerza ejercida por un campo magnético cualquiera, es igual a la fuerza ejercida sobre los electrones en movimiento de la corriente por el dicho campo; se sigue que en la física clásica y en la relativista son iguales las fuerzas que se ejercen entre corrientes rectilíneas. Por tanto *la definición de amperio es la misma en la física clásica que en la relativista.*

2. INVARIANTES RELATIVISTAS Y TRANSFORMACIONES DE LORENTZ PARA LAS ONDAS DE MATERIA Y DE RADIACION EN UN MEDIO REFRINGENTE

En el caso de un punto material de masa m, velocidad V, cantidad de movimiento p, energía E, hemos obtenido en memorias anteriores (véase bibliografía) para la frecuencia ν, la longitud de onda λ, las velocidades de grupo V_g y de fase V_f, las fórmulas:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - mc^2 = h\nu;$$

$$\frac{h}{\lambda} = p = \sqrt{2m}\,\sqrt{E\left(1 + \frac{E}{2mc^2}\right)}$$

$$\frac{2}{V_g} = \frac{1}{V_f} + \frac{V_f}{c^2};$$

$$\frac{1}{V_g} + \sqrt{\frac{1}{V_g^2} - \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{V_f} = \sqrt{\frac{2m}{h\nu} + \frac{1}{c^2}}$$

$$V = V_g = \frac{p}{m + E/c^2} = \frac{hc^2}{\lambda\,(h\nu + mc^2)} \tag{18}$$

en las que c es la velocidad de la luz en el vacío y h la constante de Planck. Al igual que existen figuras de difracción de partículas en movimiento si inciden sobre un cristal en reposo, existen también, si un cristal en movimiento choca con partículas en reposo.

A una partícula en reposo respecto a un observador no hay onda asociada. Si O es un observador que se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme de velocidad V' respecto al observador O_1 y en el mismo sentido y dirección que la partícula, entre las medidas de O y O_1 por las transformaciones de Lorentz para ondas relativistas de materia (ver bibliografía) existen las relaciones:

$$\frac{\nu}{c} + \frac{mc}{h} = \left(\frac{\nu_1}{c} + \frac{mc}{h}\right)\,\mathrm{Ch}\,\alpha - \frac{1}{\lambda_1}\,\mathrm{Sh}\,\alpha$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1}\,\mathrm{Ch}\,\alpha - \left(\frac{\nu_1}{c} + \frac{mc}{h}\right)\,\mathrm{Sh}\,\alpha, \qquad \mathrm{Th}\,\alpha = \frac{V'}{c} \tag{19}$$

y por tanto los dos invariantes relativistas que son consecuencia el uno del otro:

$$\left(\frac{\nu}{c} + \frac{mc}{h}\right)^2 - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{m^2c^2}{h^2} \Rightarrow m = \frac{h}{2\nu}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\nu^2}{c^2}\right) \tag{20}$$

Si en las fórmulas (18) y (20) hacemos:

$$V_f = c, \qquad \text{ó} \qquad \lambda\nu = c \tag{21}$$

se obtienen las:

$$m = 0; \quad E = h\nu; \quad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}; \quad V_f = V_g = c \tag{22}$$

que corresponden a las ondas de radiación en el vacío.

Si en (18) hacemos:

$$V_f = \frac{c}{n}; \qquad \text{ó} \qquad \lambda\nu = \frac{c}{n} \tag{23}$$

se obtienen las:

$$V_g = \frac{2nc}{n^2 + 1}; \qquad m = \frac{h\nu\,(n^2 - 1)}{2c^2};$$

$$E = h\nu; \qquad W = E + mc^2 = \frac{h\nu\,(n^2 + 1)}{2}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu n}{c} = \frac{mV_g}{\sqrt{1 - V_g^2/c^2}} \tag{24}$$

y también las:

$$n = \sqrt{\frac{V_g}{2V_f - V_g}} = \frac{c}{V_g} - \sqrt{\frac{c^2}{V_g^2} - 1}\,; \qquad \frac{dt}{d\tau} = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \tag{25}$$

en donde en la última (25) t es el tiempo medido por el observador y τ por el fotón. Las (23), (24) y (25) corresponden a las ondas de radiación en un medio de índice de refracción n. Si en éstas hacemos $n = 1$ se obtienen las (21) y (22).

Obsérvese que:

$$V_f < V_g < c \tag{26}$$

En estas últimas fórmulas m es la masa del fotón que es nula en el vacío y no lo es fuera. *W es la energía total del fotón y E* la energía cinética, p la cantidad de movimiento, V_g la velocidad del fotón y V_f la velocidad de la luz.

Obsérvese que para una misma frecuencia W, p y m crecen con n, E permanece constante, mientras que V_f y V_g decrecen con n.

Los invariantes relativistas (20) de las ondas de materia, para las ondas de radiación, se transforman en los:

$$\frac{\nu^2 (n^2 + 1)^2}{4c^2} - \frac{1}{\lambda^2}\,; \qquad \nu (n^2 - 1) \tag{27}$$

Las transformaciones de Lorentz (19) habida cuenta del valor de m, se transforman en las:

$$\frac{\nu}{c} = \frac{\nu_1}{2c}\,[(n_1^2 + 1)\,\mathrm{Ch}\,\alpha - n_1^2 + 1] - \frac{1}{\lambda_1}\,\mathrm{Sh}\,\alpha$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1}\,\mathrm{Ch}\,\alpha - \frac{\nu_1}{2c}\,(n_1^2 + 1)\,\mathrm{Sh}\,\alpha \tag{28}$$

y dividiendo la segunda por la primera, habida cuenta de la (23) se obtiene la transformada de Lorentz del índice de refracción n, que es:

$$n = \frac{2n_1\,\mathrm{Ch}\,\alpha - (n_1^2 + 1)\,\mathrm{Sh}\,\alpha}{(n_1^2 + 1)\,\mathrm{Ch}\,\alpha - n_1^2 + 1 - 2n_1\,\mathrm{Sh}\,\alpha} \tag{29}$$

También las (28) habida cuenta de la (23) se escriben:

$$\nu = \nu_1 \left[\frac{(n_1^2 + 1)\,\mathrm{Ch}\,\alpha - n_1^2 + 1}{2} - n_1\,\mathrm{Sh}\,\alpha\right]$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1}\left[\mathrm{Ch}\,\alpha - \frac{n_1^2+1}{2n_1}\,\mathrm{Sh}\,\alpha\right] \tag{30}$$

Obsérvese que mientras los invariantes (20) vienen expresados en forma de igualdad, los (27) no lo son así.

Cuando la dirección de propagación de la onda no coincide con la del movimiento de O respecto a O_1, si llamamos $1/\lambda$, $1/\lambda'$, $1/\lambda''$ las proyecciones sobre la dirección del movimiento de O respecto a O_1, y sobre dos direcciones perpendiculares a la anterior de la inversa de la longitud de onda, se conservan las (28) a las que hay que añadir:

$$\lambda' = \lambda_1' \,; \quad \lambda'' = \lambda_1'' \,; \qquad n = \frac{c}{\nu}\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} + \frac{1}{\lambda''^2}} \tag{31}$$

Las fórmulas anteriores dan el efecto Döppler para las ondas relativistas de materia y de radiación en un medio de índice de refracción n.

Obsérvese que en este caso en vez de la (24), para la cantidad de movimiento se desdoblan en las tres vectoriales:

$$p_x = \frac{h}{\lambda} \,; \quad p_y = \frac{h}{\lambda'} \,; \quad p_z = \frac{h}{\lambda''} \,; \qquad |\vec{p}| = \frac{h\nu n}{c} \tag{32}$$

Para un fotón en el vacío el tiempo no existe, no fluye, porque de (25) es $d\tau = 0$, lo que no sucede si está fuera del vacío.

Las dos desigualdades de (21) y (23) son equivalentes, porque de (18) se sigue que:

$$V_f = \lambda\nu = \frac{E}{p} \tag{33}$$

No es V_f la que sigue la ley de composición de velocidades de Einstein, sino V_g, de modo que:

$$V_g = \frac{V_{g1} - V'}{1 - V'V_{g1}/c^2} \tag{34}$$

se tiene por tanto que:

$$V' \ll V_{g1} \;\Rightarrow\; V_g \simeq V_{g1} - V'\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2 \tag{35}$$

La V_f se transforma a partir de (29) de modo que:

$$V' \ll V_{g1} \;\Rightarrow\; V_f \simeq V_{f1} - V'\,\frac{n_1^2-1}{2n_1^2} \,; \qquad n \simeq n_1 + \frac{n_1^2-1}{2}\,\frac{V'}{c} \tag{36}$$

el coeficiente de arrastre de Fresnel es la mitad del dado en los textos. Las fórmulas anteriores son invertibles, efectuando el cambio de ν, λ, n, α por $\lambda_1, \nu_1, n_1, -\alpha$.

La teoría anterior es una teoría unitaria de las ondas relativistas de materia y de radiación en un medio de índice de refracción n; si por el contrario admitimos una teoría no unitaria, en la que la energía, cantidad de movimiento y masa m del fotón: E, p, m son:

$$E = h\nu; \quad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu n}{c}; \quad m = 0 \tag{37}$$

entonces las transformaciones de Lorentz para ν y λ son:

$$\nu = \nu_1 (\mathrm{Ch}\,\alpha - n\,\mathrm{Sh}\,\alpha); \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1}\left(\mathrm{Ch}\,\alpha - \frac{\mathrm{Sh}\,\alpha}{n}\right) \tag{38}$$

y es V_f la que sigue la ley de composición de velocidades de Einstein. $V_g = V_f$ y:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \tag{39}$$

3. EL EFECTO COMPTON EN UN MEDIO DE INDICE DE REFRACCION n

Según la teoría unitaria desarrollada en el &2, si f y ϕ son los ángulos que forman la dirección del electrón y del fotón después del choque con la dirección del fotón antes del choque, la conservación de la energía conduce a la ecuación:

$$h\nu \frac{n^2 + 1}{2} = h\nu' \frac{n^2 + 1}{2} + \frac{1}{2} mV^2 \tag{40}$$

y la de la cantidad de movimiento a las:

$$\frac{h\nu n}{c} = \frac{h\nu' n}{c} \cos\phi + mV\cos\delta; \quad 0 = \frac{h\nu' n}{c} \operatorname{sen}\phi - mV \operatorname{sen}\delta \tag{41}$$

Eliminando δ entre ambas se obtiene:

$$m^2 V^2 = \frac{h^2 n^2}{c^2} (\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos\phi) \tag{42}(*)$$

y de (40) y (42) suponiendo $\nu = \nu'$ en (42) ya que difieren muy poco entre sí, se sigue:

$$h(\nu - \nu') \frac{n^2 + 1}{2} = \frac{h^2 \nu^2 n^2}{mc^2} (1 - \cos\phi) \tag{43}$$

(*) m y V son la masa y la velocidad del electrón.

y de aquí:

$$\Delta\nu = \nu' - \nu = -\frac{4h\nu^2 n^2}{mc^2 (n^2+1)} \operatorname{sen}^2 \phi/2 \tag{44}$$

y teniendo en cuenta que:

$$\Delta\lambda = -\frac{c\,\Delta\nu}{n\nu^2} \tag{45}$$

se obtiene para la variación de la longitud de onda del fotón con el choque:

$$\Delta\lambda = 2\lambda_0 \operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2}\ ; \quad \lambda_0 = \frac{2hn}{(n^2+1)\,mc} = \frac{h}{mV_g} \tag{46}$$

siendo λ la longitud relativista de Compton.

Si aplicamos la teoría no unitaria, es decir, las fórmulas (27), entonces las (41) se conservan, así como la (42), mientras que la (40) se transforma en la:

$$h\nu = h\nu' + \frac{1}{2}\, mV^2 \tag{47}$$

La (44) se transforma en las:

$$\Delta\nu = -\frac{4h\nu^2 n^2}{mc^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2} \tag{48}$$

la (15) se conserva y la primera (46), mientras que la segunda (46) se transforma en la:

$$\lambda_0 = \frac{hn}{mc} = \frac{h}{mV_f} \tag{49}$$

4. LA ECUACION DE ONDAS DE UNA PARTICULA RELATIVISTA EN AUSENCIA DE POTENCIAL

La primera (20) que puede escribirse también:

$$\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\nu^2}{c^2} - \frac{2m\nu}{h} = 0 \tag{50}$$

es la condición para que la exponencial:

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(\nu t - kx)}\, \varphi(k)\, dk; \qquad k = \frac{1}{\lambda} \tag{51}$$

sea solución de la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{4\pi m i}{h}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{52}$$

siendo ν la solución positiva de (50), es decir:

$$\nu = \sqrt{\frac{m^2 c^4}{h^2} + k^2 c^2} - \frac{mc^2}{h} \tag{53}$$

Por tanto:

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i [t(\sqrt{(m^2 c^4/h^2) + k^2 c^2} - (mc^2/h)) - kx]} \varphi(k)\, dk \tag{54}$$

$\varphi(k)$ viene determinada por las condiciones iniciales. Siendo invertible la integral (54) para $t = 0$:

$$\varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x} \phi(x,0)\, dx \tag{55}$$

y si llamamos:

$$\varphi(k,t) = e^{2\pi i t(\sqrt{(m^2 c^4/h^2) + k^2 c^2} - (mc^2/h))} \varphi(k) \tag{56}$$

es

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k x} \varphi(k,t)\, dk \tag{57}$$

integral que también es invertible, y por tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(k)|^2\, dk = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x,0)|^2\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x,t)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(k,t)|^2\, dk \tag{58}$$

que muestran que si una de las anteriores funciones subintegrales está normalizada, lo están las otras tres, y que si una de ellas es una función de frecuencias de una variable aleatoria absolutamente continua, las otras tres lo son también. Por tanto existen soluciones de la ecuación de ondas (52) de la forma (54)-(55), que son ondas de probabilidad.

Como para la solución exponencial (51) se cumple que:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 2\pi i \nu \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{59}$$

Llevando este valor a (52) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{2m}{h\nu}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{V_f^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \qquad (60)$$

luego la solución exponencial (51), con la condición (53), de (52) es equivalente a la de (60).

Como para la solución exponencial se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 2\pi i\nu; \qquad \frac{\partial}{\partial x} = -2\pi ik \qquad (61)$$

la (52) que simbólicamente se puede escribir:

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2\pi imc}{h} I\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h} I \qquad (62)$$

en la que I es el operador unidad, es invariante para las transformaciones de Lorentz para las derivadas parciales que resultan de efectuar en (19) el cambio (61), es decir, para las:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2\pi imc}{h} I = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{2\pi imc}{h} I\right) \operatorname{Ch} \alpha + \frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{Sh} \alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{Ch} \alpha + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{2\pi imcI}{h}\right) \operatorname{Sh} \alpha \qquad (63)$$

Para las ondas relativistas de radiación en un medio de índice de refracción n, hay que efectuar en (52), (62) y (63) el cambio de m por su valor (24). Las nuevas ecuaciones dependen de la frecuencia ν.

Obsérvese que $\varphi(k) = \varphi(k, 0)$ es distinta de $\varphi(k, t)$, mientras que sus módulos son iguales debido a (56), lo que significa que la probabilidad de que el cociente de dividir la cantidad de movimiento p por la constante de Planck h esté comprendido entre k y $k + dk$ no varía con el tiempo, mientras que los fenómenos de interferencia de probabilidades sí varían con el tiempo. Por el contrario, tanto $\phi(x, t)$ como su módulo, son distintos de $\phi(x, 0)$ y de su módulo, por lo que la probabilidad de que la partícula esté entre x y $x + dx$, varía con el tiempo, así como las interferencias de las probabilidades.

5. LA BARRA TRIADICA DE CANTOR Y OTROS OBJETOS FRACTALES EN MECANICA

Objetos fractales geométricos de longitud, área o volumen nulos, dotándoles de masa y de una conveniente distribución de la misma, se pueden transformar en objetos mecánicos con la misma característica geométrica, y con masa y momentos de inercias finitos y no nulos.

Vamos a exponer un ejemplo, que señala el método a seguir en otros muchísimos casos. El conjunto triádico de Cantor (CTC) como es sabido es el conjunto de todos los números reales comprendidos en el intervalo cerrado [0, 1], que escritos en el sistema de numeración de base 3, no tienen la cifra 1 en su desarrollo trienal, tiene la potencia del continuo, y admite una representación geométrica (polvo de Cantor) que es la siguiente: de un segmento cerrado de longitud ℓ, se excluye su tercio central abierto (excluidos sus extremos); de los dos tercios laterales cerrados se excluyen sus tercios centrales abiertos y así sucesivamente, de modo que en operaciones sucesivas de cada subsegmento cerrado que queda, se excluye su tercio central abierto.

A partir de este objeto fractal geométrico (polvo de Cantor) de longitud nula, formado por un conjunto discontinuo de puntos con la potencia del continuo, se puede formar un objeto mecánico fractal que proponemos llamar barra triádica de Cantor, que denotamos por B_∞, que se obtiene de la siguiente manera: Sea B_0 una barra homogénea de longitud ℓ, masa m, densidad ρ_0, que incluye sus extremos, se extrae de ella su tercio central (excluidos sus extremos), y se reparte la masa total m de B_0 uniformemente entre las dos partes de la nueva barra B_1. La barra B_1 está formada por dos subbarras de longitud $\ell/3$, densidad $\rho_1 = 3m/2\ell$, y masa $m_1 = m/2$; para dotar de rigidez a B_1, se sustituye la parte de barra excluida por otra barra de masa nula.

Si se repite indefinidamente esta operación, se obtiene una sucesión de barras $\{B_n\}$, tales que el número N_n de subbarras de B_n, sus masas m_n, longitudes ℓ_n y densidades ρ_n valen:

$$N_n = 2^n; \quad m_n = \frac{m}{2^n}; \quad \ell_n = \frac{\ell}{3^n}; \quad \rho_n = \frac{3^n m}{2^n \ell} \tag{64}$$

análogamente al caso de B_1, para asegurar la rigidez de B_n, se sustituyen las partes excluidas de B_0 por barras de masa nula.

Si llamamos L_0, ..., L_n, ..., las longitudes totales de las barras B_0, ..., B_n, ..., de densidad no nula, es:

$$L_0 = \ell; \quad L_n = \frac{2^n}{3^n \ell} \tag{65}$$

y la masa total de las barras de la sucesión es siempre la misma m. Se tiene que:

$$n \to \infty \Rightarrow N \to \infty; \quad m_n \to 0, \ \ell_n \to 0, \ \rho_n \to \infty, \ L_n \to 0 \tag{66}$$

La B_∞ es el límite generalizado:

$$B_\infty = G - \lim_{n \to \infty} B_n \tag{67}$$

Obsérvese que el infinito a que tiende N_n es el número cardinal del conjunto de los números reales, mientras que el infinito a que tiende n es el número cardinal del conjunto de los números naturales.

Vamos a calcular el momento de inercia de B_n, respecto a su punto medio que es su c.d.g. (centro de gravedad): el momento de inercia I_{n-1} de B_{n-1} es la suma de los 2^{n-1} momentos de inercia de las 2^{n-1} subbarras de densidad no nula que la integran:

$$I_{n-1} = \Sigma\, I_{in-1}\,; \qquad i = 1, 2, ..., 2^{n-1} \tag{68}$$

siendo:

$$I_{in-1} = m_{n-1} x_{in-1}^2 + m_{n-1} \frac{\ell_{n-1}^2}{12} \tag{69}$$

en la que x_{in-1} es la abscisa respecto al punto medio de las B, del punto medio de la ísima subbarra de B_{n-1}.

Como la ísima subbarra de B_{n-1} por exclusión de su tercio central da origen a dos subbarras de las 2^n subbarras de B_n, por la ley de formación de éstas, la contribución a I_n de los momentos de inercia de estas dos subbarras suyas es:

$$I_{in} = m_n \left[\left(x_{in-1} + \frac{\ell_{n-1}}{3}\right)^2 + \left(x_{in-1} - \frac{\ell_{n-1}}{3}\right)^2\right] + 2m_n \frac{\ell_n^2}{12} =$$

$$2m_n x_{in-1}^2 + 2m_n \frac{\ell_{n-1}^2}{9} + 2m_n \frac{\ell_n^2}{12} \tag{70}$$

y como:

$$2m_n = m_{n-1}\,; \qquad 3\ell_n = \ell_{n-1} \tag{71}$$

es:

$$I_{in} = m_{n-1} x_{in-1}^2 + m_{n-1} \ell_{n-1}^2 \frac{13}{108} \tag{72}$$

y de (69) y (72) se sigue que:

$$I_{in} = I_{in-1} + m_{n-1} \frac{\ell_{n-1}^2}{27} \tag{73}$$

y efectuando la sumación (68) se obtiene:

$$I_n = I_{n-1} + 2^{n-1} m_{n-1} \frac{\ell_{n-1}^2}{27} = I_{n-1} + \frac{m\ell^2}{3^{2n+1}} \tag{74}$$

fórmula recurrente que permite calcular I_n:

$$I_1 = I_0 + \frac{m\ell^2}{27}\,; \quad I_n = I_0 + \frac{m\ell^2}{27} \frac{1-(1/9^n)}{1-(1/9)} \tag{75}$$

y como $I_0 = m\ell^2/12$, se sigue que:

$$I_\infty = \frac{m\ell^2}{8} \tag{76}$$

que da el valor del momento de inercia de B_∞; se sigue que este objeto mecánico fractal se comporta como un sólido de masa m, momento de inercia $m\ell^2/8$, longitud entre extremos ℓ, longitud total nula, densidad infinita y centro de gravedad su punto medio.

Se sigue que los objetos mecánicos fractales no tienen representación en la mecánica clásica, pero se comportan como si fueran objetos mecánicos ordinarios.

A partir de otros objetos geométricos fractales como pueden ser los tamices de Apolonio y Sierpinski se pueden obtener objetos mecánicos fractales de masa y momentos de inercia finitos no nulos, área nula, densidad infinita, que se comportan como objetos mecánicos ordinarios. En estos casos el cálculo de los momentos de inercia habría que hacerlo por ordenador.

Obsérvese que:

$$I_n = \Sigma\, m_n x_{in}^2 + 2^n m_n \frac{\ell_n^2}{12} \;;\quad i = 1, 2, \ldots, 2^n \tag{77}$$

y como:

$$2^n m_n = m; \quad \lim_{n\to\infty} \ell_n = 0 \tag{78}$$

es:

$$I_\infty = m \lim_{n\to\infty} \Sigma \frac{x_{in}^2}{2^n} \;;\quad i = 1, 2, \ldots, 2^n \tag{79}$$

cuyo resultado de dividir por $m\ell^2$, es decir $1/8$, es el cuadrado del valor medio cuadrático de las diferencias respecto a $1/2$ de los números reales que componen CTC.

6. FUNCIONES FRACTALES

Hemos visto que:

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \rho_\infty(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \rho_n(x)\, dx = m$$

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \rho_\infty(x)\, x^2\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \rho_n(x)\, x^2\, dx = \frac{m\ell^2}{8} \tag{80}$$

siendo:

$$\rho_n(x) = \begin{cases} m3^n/\ell 2^n, & \forall x \in B_n \\ 0, & \forall x \in B_0 - B_n \end{cases} \qquad \rho_\infty(x) = \begin{cases} \infty, & \forall x \in \mathrm{CTC} \\ 0, & \forall x \in \overline{\mathrm{CTC}} \end{cases} \tag{81}$$

donde $\overline{\mathrm{CTC}}$ es el complementario de CTC.

Se puede pues definir una nueva clase de funciones que proponemos llamar fractales, tales que las $f(x)$ correspondientes a CTC, vendrían definidas por la propiedad:

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & \forall x \in \mathrm{CTC} \\ 0, & \forall x \in \overline{\mathrm{CTC}} \end{cases} \qquad \left| \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(x)\, dx \right| < \infty \tag{82}$$

de modo que una sucesión $f_n(x)$ de funciones ordinarias converge en un sentido generalizado a una función fractal $f(x)$ si:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} \infty, & \forall x \in \mathrm{CTC} \\ 0, & \forall x \in \overline{\mathrm{CTC}} \end{cases} \qquad \lim_{n \to \infty} \left| \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f_n(x)\, dx \right| < \infty \tag{83}$$

y entonces escribimos:

$$f(x) = G - \lim_{n \to \infty} f_n(x); \qquad \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f_n(x)\, dx \tag{84}$$

En (80) tanto $\rho_\infty(x)$ como $x^2 \rho_\infty(x)$ son funciones fractales, siendo su cociente la función ordinaria x^2.

Estas funciones generalizan la delta de Dirac, extienden la integración a conjuntos de medida nula, y se pueden considerar como distribuciones en correspondencia con objetos fractales.

7. VARIABLES ALEATORIAS REPARTIDAS UNIFORMEMENTE AL AZAR SOBRE EL CONJUNTO TRIADICO DE CANTOR. LOS OBJETOS FRACTALES EN CALCULO DE PROBABILIDADES

Se puede definir una v.a. ξ_n repartida uniformemente al azar sobre B_n (&5), cuyo valor medio es 1/2 y su varianza:

$$\sigma_n^2 = \frac{I_n}{m\ell^2} \tag{85}$$

Se tiene entonces que la v.a. ξ:

$$\xi = \lim_{n \to \infty} \xi_n \tag{86}$$

tiene por valor medio 1/2 y por varianza:

$$\sigma^2 = \frac{1}{8} \tag{87}$$

y es una v.a. repartida uniformemente al azar sobre B_∞ y por tanto sobre CTC, lo que confirma la propiedad establecida al final del &6 después de (79). La v.a.ξ pertenece al dominio de atracción de la ley normal.

Dada la equivalencia entre valor medio y varianza con el c.d.g. y el momento de inercia, existe una equivalencia entre los objetos mecánicos fractales y las distribuciones de probabilidad definidas sobre objetos geométricos fractales.

Se puede definir la v.a. anterior ξ, por otro procedimiento asintótico diferente que es el siguiente: Se echa n veces al aire una moneda que en una cara lleva un cero y en la otra un dos, y que tiene la misma probabilidad de salir una cara u otra, se escribe en el sistema de numeración de base tres el número 0, ..., donde cada punto es el resultado de escribir un 2 ó un 0, según que en la tirada que tiene el mismo número de orden que el punto correspondiente salga 2 ó 0; se define así una v.a.χ_n repartida uniformemente al azar sobre el subconjunto del CTC cuyos elementos multiplicados por 3^n son números enteros. Se tiene pues que:

$$\xi = \lim_{n \to \infty} \chi_n \tag{88}$$

8. FUNCIONES FRACTALES ASOCIADAS A FUNCIONES INTEGRABLES

Si $f(x)$ es integrable en el intervalo cerrado $[-\ell/2, \ell/2]$, y si $\{S_n\}$ es la sucesión de los soportes geométricos de la sucesión de barras $\{B_n\}$ (&5), entonces hay asociada una función fractal $\varphi(x)$ que es el límite generalizado de la sucesión de funciones ordinarias $\varphi_n(x)$ definidas por:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} f(x)\,(3/2)^n, & \forall x \in S_n \\ 0, & \forall x \in S_0 - S_n \end{cases} \tag{89}$$

y como:

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \varphi_n(x)\,dx = \int_{S_n} \varphi_n(x)\,dx; \quad \lim_{n \to \infty} S_n = \text{CTC} \tag{90}$$

es:

$$\varphi(x) = G - \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x);$$

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \varphi(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_{S_n} \varphi_n(x)\,dx = \int_{\text{CTC}} \varphi(x)\,dx \tag{91}$$

donde la última integral extendida a CTC es simbólica.

Esta asociación de funciones ordinarias y fractales puede extenderse a otros muchos objetos fractales.

CONCLUSIONES

En el &1 hemos puesto las ecuaciones intrínsecas de la dinámica relativista del punto material y las hemos aplicado al movimiento de una carga eléctrica en un campo magnético uniforme y a demostrar que la definición de amperio es la misma en la física clásica que en la relativista.

En &2, 3 y 4, hemos ensayado una teoría unitaria de las ondas relativistas de materia y radiación en un medio refringente, y hemos obtenido las transformaciones de Lorentz para la frecuencia y la longitud de onda y hemos mostrado que según esta teoría la masa del fotón es nula en el vacío y no lo es fuera del mismo, siendo para una misma frecuencia la energía y la cantidad de movimiento del fotón mayores fuera del vacío que en él. Como ejemplo hemos tratado el efecto Compton enun medio de índice de refracción n. Hemos dado las transformaciones de Lorentz para las derivadas parciales que aseguran la invariancia del nuevo tipo de ecuación de propagación de ondas de una partícula en ausencia de campo o de un fotón en un medio refringente, y mostrado que existen soluciones de la misma que son ondas de probabilidad. Del &5 en adelante hemos introducido objetos fractales en Mecánica, investigado las propiedades de distribución de probabilidad en objetos fractales, e introducido el nuevo concepto de funciones fractales como límites generalizados de sucesiones de funciones ordinarias. Las funciones fractales generalizan la delta de Dirac, y permiten extender la integración a conjuntos de medida nula.

De lo demostrado en el &5 se deduce que la función exponencial es discontinua para el número cardinal infinito "aleph cero" de los conjuntos numerables.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

La primera mitad de este trabajo prolonga las investigaciones que hemos expuesto en el publicado en esta Revista en 1986 que lleva por título "Los espacios de Hilbert-Lobatchewsky. La masa de un gas relativista. Las ondas relativistas de materia", en el que pueden verse otras referencias bibliográficas. La segunda mitad de este trabajo no tiene precedentes.