Algunos nuevos resultados de electrodinámica y mecánica estadística relativistas

Por Dario Maravall Casesnoves

Recibido: 25 marzo 1987

Abstract

It hast been established the analogy between a variational principle in four dimensions and the relativistic movement of an electric charge, and deduced under a relativistic approach the maxwell equation and the Lorentz transformations of the electric charge density and intensity.

We also investigated the properties of a statistical population os particles.

1. EL LAGRANGIANO DEL MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA ELECTRICA RELATIVISTA EN UN CAMPO ELECTROMAGNETICO. LA EXPRESION RELATIVISTA DE LA FUERZA DE LORENTZ

El movimiento de una partícula relativista de masa m y carga q, en un campo electromagnético se obtiene anulando la variación de la integral:

$$\delta \int L \, dz = 0 \tag{1}$$

donde L es el lagrangiano:

$$L = \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2) +$$

$$+ q \left(\frac{A_x}{c} x' + \frac{A_y}{c} y' + \frac{A_z}{c} z' - Vt' \right) \tag{2}$$

en la que t es el tiempo medido por el observador del movimiento, τ el tiempo medido por un reloj invariablemente ligado a la partícula, c la velocidad de la luz en el vacío, V y $\vec{A}\,(A_x, A_y, A_z)$ los potenciales escalar y vector, y el acento indica derivación respecto a τ.

Teniendo en cuenta que el campo eléctrico $\vec{E}$ y la inducción magnética $\vec{B}$ valen:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}; \qquad \vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{3}$$

las ecuaciones que anulan la variación de la integral (1) son las tres resumidas en la vectorial:

$$m\vec{r}\,'' = q\vec{E}t' + \frac{q}{c}\vec{r}\,' \wedge \vec{B} \tag{4}$$

y la cuarta:

$$mc^2 t'' = q\vec{E} \cdot \vec{r}\,' \tag{5}$$

en las que $\vec{r}\ (x, y, z)$ es el vector de posición de la partícula.

Se sigue de (3) y (4) que existe la integral primera:

$$x'^2 + y'^2 + x'^2 - c^2 t'^2 = -c^2 \tag{6}$$

con una adecuada elección de la constante de integración.

El segundo miembro de (4) es la expresión relativista de la fuerza de Lorentz en unidades gaussianas.

De (6) se sigue que:

$$\frac{dt}{d\tau} = t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{u^2}{c_2} \tag{7}$$

donde v es la velocidad de la partícula respecto al tiempo ordinario t, y u la velocidad respecto al tiempo propio de la partícula τ, es decir la suma de los tres primeros sumandos de (6).

Introduciendo el resultado (7) en (4) esta última se escribe:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v} \wedge \vec{B} \tag{8}$$

2. CASO PARTICULAR EN QUE LOS POTENCIALES ESCALAR Y VECTOR SON INDEPENDIENTES DEL TIEMPO. PRINCIPIOS DE MINIMA ACCION RELATIVISTAS Y CLASICOS EN LOS ESPACIOS DE FINSLER DEL ELECTROMAGNETISMO

Si los potenciales escalar y vector son independientes del tiempo, la (5) da:

$$mc^2 t'' = -q\,\frac{dV}{d\tau} \Rightarrow mc^2 t' + \mathrm{qV} = W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \mathrm{qV} \tag{9}$$

en donde W es la energía total de la partícula. El paso a las últimas (9) se obtiene a partir de (7).

La (9) teniendo en cuenta la (6) se transforma en la.

$$m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{(W - qV)^2}{mc^2} = -mc^2 \tag{10}$$

La (4) habida cuenta del valor de t' de (9) da para el primer sumando de su segundo miembro el valor.

$$q\vec{E}t' = -\frac{q\,(W - qV)}{mc^2}\,\text{grad}\,V \tag{11}$$

por tanto tomando como variable independiente el tiempo propio τ de la partícula en lugar del tiempo ordinario t del observador, el problema relativista se transforma en el problema clásico, cuando el potencial escalar es:

$$-\frac{(W - qV)^2}{2qmc^2}\,. \tag{12}$$

cuyo gradiente cambiado de signo es el segundo miembro de (11) dividido por q. Este potencial escalar es paramétrico, porque W depende de los valores iniciales de la velocidad y de la posición de la partícula por (9).

En este caso las ecuaciones del movimiento se obtienen anulando la variación de la integral (1), cuando el lagrangiano en vez de (2) es el:

$$L = \frac{m}{2}\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) + $$

$$+ \frac{q}{c}\,(A_x x' + A_y y' + A_z z') + \frac{(W - qV)^2}{2mc^2} \tag{13}$$

El movimiento se obtiene también, a partir de un principio de mínima acción en un espacio de Finsler, anulando la variancíon de la integral:

$$\int \sqrt{\frac{(W - qV)^2}{c^2} - m^2c^2}\,ds + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot d\vec{s} \tag{14}$$

en la que $d\vec{s}$ es el vector de componentes cartesianas dx, dy, dz. Las trayectorias de la partícula son las líneas geodésicas del espacio de Finsler, cuyo elemento lineal es la expresión subintegral de (14). Esto es así porque las ecuaciones diferenciales de estas geodésicas, coinciden con las que resultan de sustituir en la (4) el primer sumando del segundo miembro por (11), y la velocidad con que son recorridas (respecto a z) es:

$$u = \sqrt{\frac{(W - qV)^2}{m^2c^2} - c^2} \tag{15}$$

que coincide con la (10) habida cuenta de (7) y (10). La (10) es una integral primera del movimiento.

Si $V = 0$, la velocidad v (respecto a t) y u (respecto a τ) son constantes y las (4) y (8) se simplifican en las:

$$m \frac{d\vec{u}}{d\tau} = \frac{q}{c} \vec{u} \wedge \vec{B}; \qquad m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c} \vec{v} \wedge \vec{B} \tag{16}$$

y el principio de mínima acción (13) en el:

$$\int \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ds + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot d\vec{s} \tag{17}$$

En este caso la expresión relativista de la fuerza de Lorentz, segundo miembro de (16), difiere de la clásica en el factor:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{18}$$

siendo v constante.

Si en (14) efectuamos la sustitución:

$$W = E + mc^2 \tag{19}$$

el radical subintegral se transforma en:

$$\sqrt{2m\,(E - qV)\left(1 + \frac{E - qV}{2mc^2}\right)} \tag{20}$$

y si:

$$v \ll c; \qquad E - qV \leqslant mc^2 \tag{21}$$

en primera aproximación la (14) se transforma en la:

$$\int \sqrt{2m\,(E - qV)}\, ds + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot d\vec{s} \tag{22}$$

que es el principio de mínima acción para la electrodinámica clásica. Si además es $V = 0$, la (22) se escribe:

$$\int mv\, ds + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot d\vec{s} \tag{23}$$

siendo v constante.

3. LA EQUIVALENCIA ENTRE UN PROBLEMA DE CALCULO DE VARIACIONES Y LAS ECUACIONES DEL ELECTROMAGNETISMO. DEDUCCION RELATIVISTA DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Si en el lagrangiano (2) efectuamos la sustitución:

$$\vec{A} \to \vec{A}' + \operatorname{grad} f; \qquad V \to V' - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{24}$$

el principio variacional permanece el mismo, por agregarse a la integral (1) la integral de df.

Cualesquiera que sea (2), podemos introducir dos vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$ definidos por (3), y entonces:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0 \tag{25}$$

que son dos de las ecuaciones de Maxwell. Por otra parte es:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = -\Delta V - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{A}) \tag{26)(*}$$

A partir de (26) se pueden escoger un vector $\vec{j}$ y un escalar ρ que cumplan la ecuación de continuidad:

$$\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial z} = 0 \tag{27}$$

haciendo:

$$\frac{\mu}{c}\vec{j} = \operatorname{rot}\vec{B} - \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\vec{E}}{dt}; \qquad \frac{\rho}{\varepsilon} = \operatorname{div}\vec{E} \tag{28}$$

que son las otras dos ecuaciones de Maxwell. Estas están escritas utilizando unidades electrostáticas para las magnitudes eléctricas y unidades electromagnéticas para las magnitudes magnéticas.

Lo anterior constituye la deducción relativista de las ecuaciones de Maxwell a partir del principio variacional (1).

De (26), (28) y la segunda (3) se sigue que:

(*) Δ es el laplaciano.

$$-\frac{\mu}{c}\vec{j}=\Delta\vec{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\rho}{\varepsilon}=\Delta V-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial V}{\partial t}\right)\tag{29}$$

tanto las (3), (25) como las (28) son invariantes para el cambio (24). Si en:

$$\operatorname{div}\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial V}{\partial t}\tag{30}$$

efectuamos el cambio (24) se obtiene:

$$\operatorname{div}\vec{A}'+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial V'}{\partial t}+\Delta f-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\tag{31}$$

y si hacemos que f cumpla la condición:

$$\Delta f-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=(30)\tag{32}$$

se obtiene:

$$\operatorname{div}\vec{A}'+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial V'}{\partial t}=0\tag{33}$$

que es la condición de Lorentz, con lo que las (29) se escriben:

$$\Delta\vec{A}'-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}'}{\partial t^2}=-\frac{\mu}{c}\vec{j};\qquad \Delta V'-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 V'}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}\tag{34}$$

Por tanto siempre es posible escoger la lagrangiano L (2) de modo que se cumpla la (33) y en consecuencialas (34); $\vec{j}$ y ρ son las densidades de corriente y de carga.

Si $\vec{A}'$ y V' cumplen las (33), y φ es una función que satisface la ecuación:

$$\Delta\varphi-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0\tag{35}$$

entonces si:

$$\vec{A}''=\vec{A}'+\operatorname{grad}\varphi;\qquad V''=V'-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\tag{36}$$

$\vec{A}''$ y V'' cumplen la (33) y las (34).

Obsérvese que mientras la fuerza de Lorentz y en general las fuerzas que el campo electromagnético ejerce sobre cargas y corrientes eléctricas, cambian de la física clásica a la relativista, no cambian los campos electromagnéticos engendrados por las cargas y las corrientes eléctricas.

4. LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ DE LAS DENSIDADES DE CARGA Y CORRIENTE ELECTRICAS. INVARIANTES RELATIVISTAS(*)

Al efectuar una transformación de Lorentz:

$$dx = dx_1 \text{ Ch } \alpha + c\, dt_1 \text{ Sh } \alpha; \qquad c\, dt = c\, dt_1 \text{ Ch } \alpha + dx_1 \text{ Sh } \alpha \tag{37}$$

donde:

$$\text{Th } \alpha = \frac{v}{c} \tag{38}$$

en la que v es la velocidad con que se mueve sobre el eje de las x, el observador O_1 respecto al O, y el subíndice indica las magnitudes medidas por el observador con o sin subíndice, se obtiene como consecuencia de la invariancia del lagrangiano (2):

$$A_x = A_{x1} \text{ Ch } \alpha + V_1 \text{ Sh } \alpha; \qquad V = V_1 \text{ Ch } \alpha + A_{x1} \text{ Sh } \alpha \tag{39}$$

y en el vacío ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) las (34) dan:

$$j_x = j_{x2} \text{ Ch } \alpha + \rho_1 c \text{ Sh } \alpha; \qquad \rho c = \rho_1 c \text{ Ch } \alpha + j_{x1} \text{ Sh } \alpha \tag{40}$$

luego las densidades de carga y corriente eléctricas se componen para las transformaciones de Lorentz igual que las coordenadas. La magnitud $\vec{j}/\rho$ se transforma como las velocidades.

Por tanto son invariantes relativistas, es decir invariantes para las transformaciones de Lorentz las expresiones:

$$|\vec{j}|^2 - \rho^2 c^2; \qquad |\vec{A}|^2 - V^2 \tag{41}$$

Vamos a introducir los momentos electromagnéticos respecto al tiempo propio τ:

$$p_x = mx' + \frac{q}{c} A_x; \qquad p_y = my' + \frac{q}{c} A_x;$$

(*) Los resultados de este parágrafo son para el vacío: $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, mientras no se advierta lo contrario.

$$p_z = mz' + \frac{q}{c} A_z ; \qquad p_t = mc^2 t' + qV \tag{42}$$

por (37) y (39) mediante las transformaciones de Lorentz, se transforman también como las coordenadas:

$$p_x = p_{x1} \operatorname{Ch} \alpha + \frac{p_{t1}}{c} \operatorname{Sh} \alpha ; \qquad \frac{p_t}{c} = \frac{p_{t1}}{c} \operatorname{Ch} \alpha + p_{x1} \operatorname{Sh} \alpha \tag{43}$$

salvo un factor.

Por tanto son invariantes relativistas las expresiones:

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{p_t^2}{c^2} ; \qquad p_x\, dx + p_y\, dy + p_z\, dz - p_t\, dt$$

$$\left(p_x - \frac{q}{c} A_x\right)^2 + \left(p_y - \frac{q}{c} A_y\right)^2 +$$

$$+ \left(p_z - \frac{q}{c} A_z\right)^2 - \frac{1}{c^2} (p_t - qV)^2 = m^2 c^2 \tag{44}$$

La condición de Lorentz también es invariante para las transformaciones de Lorentz, como es sabido.

Como lo que en realidad es invariante no es el lagrangiano (2) sino la variación de la integral (1), es decir que se puede en todo momento efectuar el cambio (24), se sigue que de los invariantes anteriores, el único que tiene significación física intrínseca es el primero (41) que se reifere a las densidades de carga y de corriente eléctrica.

En caso distinto al vacío, la condición de Lorentz (30) no es invariante para las transformaciones de Lorentz, pero se puede reasegurar esta invariancia recurriendo a un cambio del tipo (24).

Como ya hemos dicho de (40) se sigue que el vector $\vec{j}/\rho$ se transforma como las velocidades en la relatividad restringida, pero sin que su módulo esté sujeto a la limitación de ser inferior a c. En el caso particular en que $\vec{j}$ y la velocidad $\vec{v}$ tengan la misma dirección ($\vec{j} = j_x$) de (40) se sigue:

$$\frac{j_x}{\rho} = \frac{\dfrac{j_{x1}}{\rho_1} + v}{1 + \dfrac{j_{x1} v}{\rho_1 c^2}} \tag{45}$$

que es la fórmula de composición de velocidades pero sin la limitación de que j_x/ρ ó j_{x1}/ρ sean inferiores a c, mientras que v, que es una auténtica velocidad, siempre ha de ser inferior a c. Se tiene que j_x/ρ y j_{x1}/ρ están ligadas por una transformación homográfica sobre una recta definida por (45), cuyos puntos dobles son c y $-c$, y cuyos puntos límites son c^2/v y $-c^2/v$, de modo que los puntos interiores al segmento $[c, -c]$ se transformen en puntos interiores al mismo, y los puntos exteriores al mismo en puntos exteriores, es decir:

$$\left|\frac{j_x}{\rho}\right| < c \Rightarrow \left|\frac{j_{x1}}{\rho_1}\right| > c;$$

$$\left|\frac{j_x}{\rho}\right| > c \Rightarrow \left|\frac{j_{x1}}{\rho_1}\right| < c \tag{46}$$

Tanto en el vacío como fuera del mismo se conservan todas las fórmulas (37) a (47), pero no se conserva la condición de Lorentz (30).

5. LAS DOS FORMAS DE LAS ECUACIONES CANONICAS DEL MOVIMIENTO RELATIVISTA DE UNA CARGA ELECTRICA

Si introducimos el hamiltoniano $H(p_x, p_y' p_z, p_t)$:

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(p_x - \frac{q}{c} A_x\right)^2 + \left(p_y - \frac{q}{c} A_y\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(p_z - \frac{q}{c} A_z\right)^2 - \frac{1}{c^2}(p_t - qV)^2\right] \tag{47}$$

de las (42) se deducen las:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_x}; \qquad \frac{dy}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_y};$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_z}; \qquad \frac{dt}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial p_t} \tag{48}$$

y como las ecuaciones de Euler-Lagrange que anulan la variación de la integral (1) son las:

$$\frac{dp_x}{d\tau} = q\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A_x}{c}x' + \frac{A_y}{c}y' + \frac{A_z}{c}z' - Vt'\right) \tag{49}$$

y las análogas para y, z, t, se sigue que se cumplen también las:

$$\frac{dp_x}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x}; \qquad \frac{dp_y}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial y};$$

$$\frac{dp_z}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial z}; \qquad \frac{dp_t}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{50}$$

que junto a las (48) son la primera forma de las ecuaciones canónicas del movimiento relativista de una carga eléctrica en un campo electromagnético.

De la integral primera (6) se sigue la integral primera:

$$H(p_x, p_y, p_z, p_t) = -\frac{mc^2}{2} \tag{51}$$

y la (7) es equivalente a la:

$$\frac{dt}{d\tau} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{m^2c^2}\left[\left(p_x - \frac{q}{c}A_x\right)^2 + \left(p_y - \frac{q}{c}A_y\right)^2 + \left(p_z - \frac{q}{c}A_z\right)^2\right]} \tag{52}$$

Como consecuencia de (7) las (42) se escriben:

$$p_x = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}} \tag{53}$$

y análogamente para y, z, el punto encima significa derivación respecto al tiempo t. Las (53) son invertibles respecto a $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, y se obtienen las:

$$m\dot{x} = \left(p_x - \frac{q}{c}A_x\right) \cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{m^2c^2}\left[\left(p_x - \dfrac{q}{c}A_x\right)^2 + \left(p_y - \dfrac{q}{c}A_y\right)^2 + \left(p_z - \dfrac{q}{c}A_z\right)^2\right]}} \tag{54}$$

y análogamente para y, z; las (54) resultan de (7) y (52).

Por otra parte, de (49) se sigue que:

$$\frac{dp_x}{dt} = q\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A_x}{c}\dot{x} + \frac{A_y}{c}\dot{y} + \frac{A_z}{c}\dot{z} - V\right) \tag{55}$$

y análogamente para y, z. Por tanto si introducimos el nuevo hamiltoniano $H(p_x, p_y, p_z)$:

$$H(p_x, p_y, p_z) = mc^2 \cdot$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{m^2 c^2}\left[\left(p_x - \frac{q}{c}A_x\right)^2 + \left(p_y - \frac{q}{c}A_y\right)^2 + \left(p_z - \frac{q}{c}A_z\right)^2\right]} + qV \quad (56)$$

las tres (54) se escriben:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x}; \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y}; \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_z} \quad (57)$$

y de (55) y (56) se siguen las:

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}; \qquad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}; \qquad \frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} \quad (58)$$

que junto a las (57) son la segunda forma canónica de las ecuaciones del movimiento relativista de una carga eléctrica en un campo electromagnético.

Cuando los potenciales vector y escalar son independientes del tiempo existe la integral primera (9) que habida cuenta de las (52) y (56) se escriben también:

$$H(p_x, p_y, p_z) = W \quad (59)$$

que expresa la constancia del hamiltoniano.

6. LA ESTADISTICA RELATIVISTA DE UN COLECTIVO DE PARTICULAS IDENTICAS EN UN CAMPO POTENCIAL

Si en las ecuaciones anteriores hacemos igual a cero el potencial vector $\vec{A}$ e igual a la unidad q, obtenemos las ecuaciones del movimiento relativista de una partícula de masa m. Si el potencial V es independiente del tiempo, hemos obtenido (véase bibliografía) que la función de distribución de un colectivo de partículas relativistas idénticas en un campo potencial V, viene dada por:

$$A \exp(-H/kT);$$

$$H = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{m^2 c^2}} + V(x, y, z) \quad (60)$$

donde A es un factor de normalización, k es la constante de Boltzmann, y T la temperatura absoluta, de modo que la integral del producto de (60) por $dx\ dy\ dz\ dp_x\ dp_y\ dp_z$ entre los límites inferiores x, y, z, p_x, p_y, p_z y superiores $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, $p_x + \Delta p_x$, $p_y + \Delta p_y$, $p_z + \Delta p_z$, da la fracción másica, es decir el cociente de dividir por M (masa total de todas las partículas idénticas) la masa ΔM de todas las partículas cuyos valores de las coordenadas y de los momentos están dentro de los límites de la integral.

Como la masa en movimiento de una partícula relativista se obtiene multiplicando la masa en reposo por $dt/d\tau$ dado por (52) con las A iguales a cero, si se divide la primera (60) por este valor de $dt/d\tau$, se obtiene la función de frecuencia para la fracción numérica en vez de la másica, es decir la probabilidad de que una partícula esté en el elemento diferencial de volumen del espacio de las coordenadas de los momentos, de modo que si hacemos:

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \tag{61}$$

la probabilidad de que el momento de la partícula esté comprendido entre p y $p + dp$ viene dada por:

$$B\left(1 + \frac{p^2}{m^2c^2}\right)^{-1/2} p^2 \exp\left(-mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} \,/\, kT\right) dp \tag{62}$$

donde B es un factor de normalización.

Debido a la relación entre los módulos de la velocidad v y del momento p, la probabilidad de que el valor de la velocidad esté comprendido entre v y $v + dv$ es:

$$Cv^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-2} \exp\left(-mc^2 \,/\, kT\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) dv \tag{63}$$

donde C es un factor de normalización.

La probabilidad de que la energía E:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \tag{63a}$$

de una partícula está comprendida entre E y $E + dE$ es:

$$D\sqrt{E\left(1 + \frac{E}{2mc^2}\right)} \exp\left(\frac{-E}{kT}\right) \tag{63b}$$

multiplicada por dE, siendo D un coeficiente de normalización.

7. LA VARIACION DE LA MASA CON LA TEMPERATURA

Como consecuencia de lo anterior, para un gas relativista de moléculas idénticas, la masa de una molécula es una variable aleatoria, cuyo valor medio teniendo en cuenta lo dicho en el parágrafo anterior, y el valor de la masa en movimiento:

$$m\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{64}$$

donde m es la masa en reposo, se obtiene multiplicando el valor de la masa en reposo por la función $I(T)$ definida por:

$$I(T) = \frac{\int_0^c v^2 (1 - v^2/c^2)^{-5/2} \exp(-mc^2 / kT\sqrt{1 - v^2/c^2})\, dv}{\int_0^c v^2 (1 - v^2/c^2)^{-2} \exp(-mc^2 / kT\sqrt{1 - v^2/c^2})\, dv} =$$

$$= \frac{\int_0^\infty p^2 \exp(-mc^2\sqrt{1 + p^2/m^2c^2} / kT)\, dp}{\int_0^\infty p^2 (1 + p^2/m^2c^2)^{-1/2} \exp(- mc^2\sqrt{1 + p^2/m^2c^2} / kT)\, dp} \tag{65}$$

Por tanto definido el mol por un número fijo de partículas, la masa molar $M(T)$ es función de la temperatura absoluta, y se tiene que:

$$\frac{M(T_1)}{I(T_1)} = \frac{M(T_2)}{I(T_2)} \tag{66}$$

8. LA RELACION ENTRE LA DISIMETRIA DEL ESPACIO Y DEL TIEMPO Y DE LOS CAMPOS ELECTRICO Y MAGNETICO

La disimetría entre el espacio y el tiempo en la integral (1), hace que en las ecuaciones diferenciales que anulan la variación de dicha integral, intervengan las derivadas parciales de los potenciales vector y escalar agrupadas en seis componentes, que pueden asociarse en dos vectores espaciales tridimensionales, de los cuales, solamente uno es un rotacional, que es la inducción magnética $\vec{B}$. Por esta causa no existen monopolos magnéticos, y si se descubriera la existencia de éstos, habría que abandonar las ecuaciones de Maxwell, y la teoría relativista aquí expuesta, por ser incompatibles con ese hecho físico. Esta disimetría entre electricidad y magnetismo, es consecuencia de la disimetría entre espacio y tiempo.

9. PRINCIPIO DE D'ALEMBERT DEL MOVIMIENTO RELATIVISTA DE UNA CARGA ELECTRICA EN UN CAMPO ELECTROMAGNETICO

Es:

$$\left(-m \frac{d^2 \vec{r}}{d\tau^2} + q\vec{E} \frac{dt}{d\tau} + \frac{q}{c} \frac{d\vec{r}}{d\tau} \wedge \vec{B}\right) \cdot \delta \vec{r} +$$

$$+ \left(mc^2 \frac{d^2 t}{d\tau^2} - q\vec{E} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\tau}\right) \delta t = 0 \qquad (67)$$

porque es cero la cantidad que hay que sumar al último paréntesis de la anterior, que es:

$$\frac{q}{c} \left(\frac{d\vec{r}}{d\tau} \wedge B\right) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\tau} = 0 \qquad (68)$$

CONCLUSIONES

Hemos demostrado que las ecuaciones de Maxwell son la consecuencia de un principio variacional en el espacio-tiempo, y que la existencia de campos eléctricos y magnéticos y de cargas y corrientes eléctricas, son resultado de una predicción de la teoría relativista anterior. Hemos visto también cómo puede utilizarse un espacio tridimensional de Finsler en lugar de un espacio-tiempo cuatridimensional, y obtenido algunos invariantes relativistas, y mostrado que aun cuando el cociente de dividir la densidad de corriente eléctrica por la de carga tiene las dimensiones de una velocidad, no está sujeta a la limitación de ser inferior a la velocidad de la luz. Se observa cómo la masa de un mol de gas relativista varía con la temperatura absoluta, a través de la mecánica estadística relativista.

FUENTES BIBLIOGRAFICAS

Esta memoria prolonga mis anteriores: "Algunos nuevos teoremas de mecánica estadística, mecánica analítica e hidrodinámica relativista" y "Los espacios de Hilbert-Lobachewsky, la presión y la masa de un gas relativista, las ondas relativistas de materia", publicadas en esta Revista en 1984 y 1986.