Juegos sobre retículos

Por NOEMI ZOROA ALONSO

Recibido: 10 diciembre 1986

Presentado por el académico numerario D. Sixto Ríos

Abstract

In this paper we introduce some geometric games on a lattice and we relate these with other well-known games.

All these games are solved using the same method. The method is based upon some transformations in the lattice and this method is applicable to other geometric games.

1. INTRODUCCION

Un juego geométrico G sobre un conjunto dado L es un juego de dos personas

$$G = (X, Y, M)$$

donde los conjuntos X, Y son subconjuntos de las partes del espacio L

$$X \subset \wp(L), \qquad Y \subset \wp(L)$$

y

$$M\colon\ X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$$

es una función acotada de valores reales que se define apoyándose en la posible estructura del conjunto L.

Los conjuntos X, Y se llaman respectivamente conjuntos de las estrategias de los jugadores I y II, y M recibe el nombre de función de pago y representa la ganancia del jugador I y la pérdida del jugador II.

En este trabajo L va a ser un conjunto finito y por tanto X, Y son forzosamente finitos.

La extensión mixta

$$\Gamma = (X^*, Y^*, M^*)$$

del juego $G = (X, Y, M)$ es un nuevo juego en el que X^*, Y^* son los conjuntos de las distribuciones de probabilidad sobre X e Y respectivamente, y para

$$\xi \in X^*, \qquad \eta \in Y^*$$

M^* está definida por

$$M^* (\xi, \eta) = \int_{X \times Y} M (A, B)\, d\xi\, d\eta$$

Nosotros representaremos las distribuciones de probabilidad sobre X mediante la función puntual de probabilidad, es decir $\xi \in X^*$ será una función no negativa

$$\xi : X \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\sum_{A \in X} \xi (A) = 1.$$

Lo mismo diremos para $\eta \in Y^*$. Por ser X, Y finitos esto no representa ninguna limitación. Es fácil ver que puede considerarse $X \subset X^*$, $Y \subset Y^*$, y que M^* es una extensión de M al dominio $X^* \times Y^*$, por lo que para M^* puede utilizarse la misma notación M sin riesgo a confusión,

$$M (\xi, \eta) = \sum_{\substack{A \in X \\ B \in Y}} M (A, B)\, \xi (A)\, \eta (B)$$

En las secciones 2 y 3 estudiaremos las transformaciones de un espacio L y su relación con un juego geométrico sobre l.

En la sección 4 estudiaremos algunos nuevos juegos definidos sobre un retículo rectangular, resolviéndolos utilizando los resultados obtenidos en las secciones precedentes. También relacionaremos estos juegos con otros ya conocidos.

2. JUEGOS RELACIONADOS CON UNA TRANSFORMACION

En el estudio de los juegos geométricos sobre un conjunto finito son útiles ciertas transformaciones de L en sí mismo.

En relación con el juego geométrico

$$G = (X, Y, M)$$

sobre L haremos uso de transformaciones

$$T : L \to L$$

que cumplan las condiciones

1. T es una biyección.
2. $T(X) = X$, $T(Y) = Y$.
3. $M (TA, TB) = M (A, B)$ para todo $A \in X$, $B \in Y$.

En primer lugar interesa extender esta transformación a los conjuntos X^*, Y^* de las estrategias mixtas.

Dada $\xi \in X^*$ se define $T\xi$ mediante

$$T\xi(A) = \xi(T^{-1}A) \qquad \text{para cada} \quad A \in X$$

y evidentemente resulta ser $T\xi$ una distribución de probabilidad sobre X, o sea,

$$T\xi \in X^*.$$

La definición de $T\eta$ para $\eta \in Y^*$ es correlativa.

Ahora se tiene para todo $\xi \in X^*$, $\eta \in Y^*$

$$M(T\xi, T\eta) = M(\xi, \eta).$$

En efecto, teniendo en cuenta que ξ y η son distribuciones de tipo discreto se tiene

$$M(T\xi, T\eta) = \sum_{A,B} T\xi(A)\, T\eta(B)\, M(A, B) =$$

$$= \sum_{A,B} \xi(T^{-1}A)\, \eta(T^{-1}B)\, M(A, B) =$$

$$= \sum_{A,B} \xi(T^{-1}A)\, \eta(T^{-1}B)\, M(T^{-1}A, \ T^{-1}B) =$$

$$= \Sigma\, \xi(A')\, \eta(B')\, M(A', B') = M(\xi, \eta)$$

que prueba la relación propuesta.

Supondremos en lo que sigue que nuestra transformación T satisface las condiciones anteriores. Entonces es fácil ver que para cada $A \subset L$ existe un r_A tal que

$$T^{r_A}(A) = A$$
$$T^i(A) \neq A \qquad \text{para} \quad 1 \leqslant i < r_A.$$

Para cada $A \subset L$ representaremos con $\bar{A}$ la clase de elementos de $\mathcal{P}(L)$

$$\bar{A} = \{A, \ TA, \ T^2A, \ \ldots, \ T^{r_A - 1}A\}$$

Denotaremos el cardinal de un conjunto cualquiera C por $|C|$. Con esto para la clase anterior se tiene

$$|\bar{A}| = r_A$$

De las propiedades de la transformación T se sigue que las clases anteriores producen sendas particiones en X, Y

$$\overline{X} = \{\overline{A}, \overline{A}', ...\}$$
$$\overline{Y} = \{\overline{B}, \overline{B}', ...\}$$

Ahora definimos la función

$$\overline{M}: \overline{X} \times \overline{Y} \to \mathbb{R}$$

por

$$\overline{M}(\overline{A}, \overline{B}) = M(\xi_{\overline{A}}, \eta_{\overline{B}})$$

donde $\xi_{\overline{A}}$, $\eta_{\overline{B}}$ son distribuciones sobre X, Y concentradas uniformemente en los conjuntos

$$\overline{A} = \{A,\ TA,\ T^2A,\ ...,\ T^{r_A-1}A\}$$
$$\overline{B} = \{B,\ TB,\ T^2B,\ ...,\ T^{r_B-1}B\}$$

Con estos datos podemos definir el juego

$$\overline{G} = (\overline{X}, \overline{Y}, \overline{M})$$

que llamaremos juego asociado del G.

Teorema 2.1.– Supongamos se cumplen las condiciones anteriores para la transformación T de L en el juego $G = (X, Y, M)$.

Sean $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$ estrategias óptimas en el juego auxiliar

$$\overline{G} = (\overline{X}, \overline{Y}, \overline{M}),$$

formado con la notación anterior.

Entonces ξ^*, η^* definidas por

$$\xi^*(A) = \frac{1}{r_A}\,\overline{\xi}(\overline{A}) \qquad A \in X$$

$$\eta^*(B) = \frac{1}{r_B}\,\overline{\eta}(\overline{B}) \qquad B \in Y$$

son estrategias óptimas en el juego inicial

$$G = (X, Y, M).$$

Ambos juegos G y $\overline{G}$ tienen el mismo valor.

Demostración.– Sea $\xi \in X^*$ una estrategia mixta del juego G que reparte uniformemente la probabilidad en las clases de X, es decir,

$$\xi(A) = \xi(TA) = \ldots = \xi(T^{r_A-1}A) \qquad \text{para todo} \quad A \in X$$

Es fácil ver que

$$M(\xi, B) = M(T\xi, TB) = M(\xi, TB) = M(\xi, T^r B) = M(\xi, \eta_{\overline{B}}),$$
$$\text{para todo} \quad B \in Y$$

donde $\eta_{\overline{B}}$ es la distribución concentrada uniformemente en $\overline{B}$.

Luego con la notación del enunciado, para cualquier $B \in Y$

$$M(\xi^*, B) = M(\xi^*, \eta_{\overline{B}}) =$$

$$= \sum_A M(A, \eta_{\overline{B}}) \frac{1}{r_A} \overline{\xi}(\overline{A}) = \Sigma\, \overline{\xi}(\overline{A})\, \overline{M}(\overline{A}, \overline{B}) = \overline{M}(\overline{\xi}, \overline{B}) \geqslant \overline{v}$$

donde $\overline{v}$ es el valor del juego.

Del mismo modo se ve que

$$M(A, \eta^*) \leqslant \overline{v}$$

con lo que queda probado el Teorema. #

3. EXISTENCIA DE VARIAS TRANSFORMACIONES

Dado el juego $G = (X, Y, M)$ sobre el conjunto finito L, supongamos que tenemos las n transformaciones

$$T_1, T_2, \ldots, T_n,$$
$$T_i\colon\ L \to L, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

que conmutan

$$T_i T_j = T_j T_i \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

y tales que para cada i se cumple

1. T_i es una biyección.
2. $T_i X = X, \quad T_i Y = Y.$
3. $M(T_i A, T_i B) = M(A, B), \quad A \in X, \quad B \in Y.$

Supondremos además:

4. Para cada $A \in X$ (ó $A \in Y$) existe un r_{iA} para el que vale

$$T_i^{r_{iA}-1} A = A$$

y para todo conjunto de números

$$s_1, s_2, \dots, s_n$$

no todos nulos tales que

$$0 \leqslant s_i < r_{iA}$$

se cumple

$$T_1^{s_1} T_2^{s_2} \dots T_n^{s_n} A \neq A.$$

Para cada $A \in X$ definamos la clase

$$\bar{A} = \{C\colon \; C = T_1^{i_1} T_2^{i_2} \dots T_n^{i_n} A, \quad \text{para algún } i_1, i_2, \dots, i_n\}$$

y definición análoga para cada $B \in Y$.

Llamaremos también

$$\bar{X} = \{\bar{A}\colon \; A \in X\}$$
$$\bar{Y} = \{\bar{B}\colon \; B \in Y\}$$

y definiremos la función $\bar{M}\colon \; \bar{X} \times \bar{Y} \to \mathbb{R}$ mediante

$$\bar{M}(\bar{A}, \bar{B}) = M(\xi_{\bar{A}}, \eta_{\bar{B}})$$

donde $\xi_{\bar{A}} \in X^*$, $\eta_{\bar{B}} \in Y^*$ son distribuciones de probabilidad concentradas uniformemente en $\bar{A}$ y $\bar{B}$ respectivamente.

Las clases $\bar{A}$ constituyen una partición de X, y las $\bar{B}$ de Y.

Con estos datos se puede definir el juego auxiliar $\bar{G} = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{M})$ y del mismo modo que en la sección anterior se obtiene el siguiente Teorema.

Teorema 3.1.– Sea $G = (X, Y, M)$ un juego geométrico sobre el conjunto finito L, donde existen las transformaciones

$$T_1, T_2, \dots, T_n$$

en las condiciones antes señaladas, y

$$\bar{G} = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{M})$$

el juego auxiliar asociado a G, con las notaciones que acabamos de dar.

Si

$$\bar{\xi}, \bar{\eta}$$

son estrategias óptimas del juego $\bar{G}$, entonces las estrategias ξ^*, η^* definidas por

$$\xi^* (A) = \frac{1}{r_A} \xi(\bar{A}), \qquad r_A = |\bar{A}|$$

$$\eta^* (B) = \frac{1}{r_B} \eta(\bar{B}), \qquad r_B = |\bar{B}|$$

para $A \in X$, $B \in Y$ son óptimas en el juego G y ambos juegos tienen el mismo valor.

Demostración.— Similar a la del Teorema 2.1. #

4. JUEGOS SOBRE RETICULOS

Sean m y n dos números naturales dados. Llamaremos

$$L = \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., m\}$$

Sobre este retículo rectangular L han sido estudiados varios juegos geométricos: AG, SAG, SSG, etc.

Nosotros aquí vamos a plantear algunos juegos generales sobre este retículo L (la función de pago contendrá una función arbitraria) de los cuales resultarán como casos particulares los citados AG, SAG, SSG, etc.

En el retículo L llamaremos columna L_i al conjunto

$$L_i = \{i\} \times \{1, 2, ..., m\} \subset L.$$

En los juegos sobre este conjunto L, los conjuntos X, Y serán familias de subconjuntos de L. Una familia especial F es la formada por las funciones

$$A: \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., m\}$$

Así pues $A \in F$ equivale a decir que A es un subconjunto de L con un solo elemento en cada columna de L, es decir

$$|A \cap L_i| = 1, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Juego general sobre retículos (JGR)

Vamos a llamar juego general sobre retículos (JGR) al juego

$$\text{JGR} = (X, Y, M)$$

sobre el conjunto

$$L = \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., m\}$$

tal que

$$X = \{A:\ A \subset L,\quad |A| \in H,\quad |A \cap L_i| \in H_i,\quad i = 1, 2, ..., n\}$$
$$Y = \{B:\ B \subset L,\quad |B| \in K,\quad |B \cap L_i| \in K_i,\quad i = 1, 2, ..., n\}$$
$$M(A, B) = f(|A|,\ |B|,\ |A \cap B|)$$

donde H, H_i, K, K_i, son subconjuntos de enteros dados. Las condiciones anteriores sobre $|A \cap L_i|$, $|B \cap L_i|$ pueden ser sustituidas por otras cualesquiera siempre que se mantengan las propiedades exigidas en la sección 3 para las transformaciones T_i que se utilicen en L.

Y además

$$f:\ \{0, 1, 2, ..., nm\}^3 \to \mathbb{R}$$

es una función dada.

El dominio de la función anterior podría reducirse a $H \times K \times N$ con un conjunto N conveniente pero, en general, esto no es necesario. También puede incluirse aquí el caso en que M dependa sólo de dos o de uno de los tres cardinales $|A|$, $|B|$, $|A \cap B|$.

En el conjunto L asociado al juego general sobre retículos (JGR) utilizaremos las n transformaciones

$$T_s:\ L \to L, \qquad s = 1, 2, ..., n$$

definidas por

$$T_s(i, j) = \begin{cases} (i, j) & \text{si } i \neq s \\ (s, j+1) & \text{si } i = s,\ j < m \\ (s, 1) & \text{si } i = s,\ j = m. \end{cases}$$

Estas transformaciones cumplen las condiciones señaladas en la sección 3.

Por ello se puede aplicar el Teorema 3.1 que facilita la resolución de este juego, si sabemos resolver el juego auxiliar asociado

$$\overline{G} = (\overline{X}, \overline{Y}, \overline{M})$$

siendo aquí

$$\overline{M}(\overline{A}, \overline{B}) = M(\xi_{\overline{A}}, \eta_{\overline{B}}) = \frac{1}{|\overline{A}|} \sum_{A \in \overline{A}} f(|A|,\ |B|,\ |A \cap B|)$$

donde $\xi_{\overline{A}} \in X^*$, $\eta_{\overline{B}} \in Y^*$ son distribuciones concentradas uniformemente en las clases $\overline{A}$ y $\overline{B}$ respectivamente.

Una vez resuelto el juego $\overline{G}$ se obtiene la solución del JGR mediante la aplicación del Teorema 3.1.

Una mayor concreción de los conjuntos X, Y del JGR $= (X, Y, M)$ permitirá obtener resultados más precisos por lo que consideraremos tres casos especiales que llamaremos primer juego sobre retículos (JR1), segundo juego sobre retículos (JR2) y juego de penetración ponderado (JPP).

Primer juego y segundo juego sobre retículos (JR1) y (JR2)

Si en el JGR se toma

$$X=F$$

y

$$M(A,B)=f(|B|,\ |A\cap B|)$$

donde f es una función dada con dominio apropiado, se obtiene el primer juego sobre retículos (JR1).

Si en el JGR se toma

$$Y=F$$

y

$$M(A,B)=f(|A|,\ |A\cap B|)$$

siendo f una función conocida, se obtiene el segundo juego sobre retículos (JR2).

Es inmediato que por las transformaciones T_i que estamos considerando en L el conjunto F se reduce a una sola clase de estrategias, o sea, si $A\in F$, $\overline{A}=F$.

Así pues en el juego $\overline{G}=(\overline{X},\overline{Y},\overline{M})$ asociado a

$$\mathrm{JR1}=(X,Y,M) \qquad (X=F)$$

el conjunto $\overline{X}=\{F\}$ es unitario por lo que la resolución del juego $\overline{G}$ se reduce a un problema de mínimo, que consiste en calcular $B_0\in Y$ de modo que

$$\min_{B\in Y}\overline{M}(\overline{X},\overline{B})=\min_{B\in Y}M(\xi_F,B)=\frac{1}{m^n}\min_{B}\sum_{A\in F}f(|B|,\ |A\cap B|)=$$

$$=\frac{1}{m^n}\sum_{A\in F}f(|B_0|,\ |A\cap B_0|)$$

y la distribución uniforme sobre $F=X$ y la concentrada uniformemente sobre $\overline{B}_0\subset Y$ son las estrategias óptimas para los jugadores I y II respectivamente.

De un modo simétrico en el $\mathrm{JR2}=(X,\ Y,\ M)$ se debe calcular un $A_0\in X$ tal que

$$\max_{A}M(A,\eta_Y)=\frac{1}{m^n}\max_{A\in X}\sum_{B\in Y}f(|A|,\ |A\cap B|)=$$

$$=\frac{1}{m^n}\sum_{B\in Y}f(|A_0|,\ |A_0\cap B|)$$

y las estrategias óptimas son, para el jugador I la concentrada uniformemente en el conjunto $\bar{A}_0 \subset X$ y para el jugador II la uniforme en Y.

Casos particulares del JR1 son:

El AG (ambush game) que se obtiene tomando

$$Y = \{B\colon\ B \subset L,\ \ |B| \leqslant s,\ \ |B \cap L_i| \leqslant k,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n,\ \ s \leqslant kn,\ \ 1 \leqslant k \leqslant n\}$$
$$M(A, B) = f(|A \cap B|)$$

donde f está definida por

$$f(0) = 1, \qquad f(i) = 0 \qquad \text{para} \quad i \geqslant 1.$$

El SAG (simple ambush game), caso particular del anterior en el que se omite la restricción $|B \cap L_i| \leqslant k$.

El SSG (simple search game) que se obtiene con

$$Y = \{B\colon\ B \subset L,\ \ |B| \geqslant s\}$$
$$M(A, B) = f(|A \cap B|)$$

donde f está definida por

$$f(0) = 0, \qquad f(i) = 1 \qquad \text{para} \quad i \geqslant 1.$$

El MSG (multiple search game) que resulta con

$$Y = \{B\colon\ B \subset L,\ \ |B| \geqslant s\}$$
$$M(A, B) = |A \cap B|$$

es decir

$$f(i) = i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Son casos particulares del JR2:

El CG (concealment game) en el que

$$X = \{\mathrm{A}\colon\ A \subset L\}$$
$$M(A, B) = f(|A|,\ \ |A \cap B|)$$

donde

$$f(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } j \neq 0. \end{cases}$$

El CMAG (compound multiple ambush game) que se obtiene tomando

$$X = \{A:\ A \subset L,\ \ |A| \leqslant s,\ \ |A \cap L_i| \leqslant k\}$$
$$M(A, B) = |A \cap B|.$$

El MAG (multiple ambush game) es el caso particular del anterior en el que $k = m$.

El VMSG (variant of the multiple search game) para el que

$$X = \{A:\ A \subset L,\ \ t \leqslant |A| \leqslant s\}$$
$$M(A, B) = a\,|A| - b\,|A \cap B| \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Todos estos casos particulares pueden verse tratados de modo individual en la obra de Ruckle (1983), pudiéndose obtener por el método expuesto anteriormente los resultados allí conseguidos para cada uno de dichos juegos.

Juego de penetración ponderado (JPP)

La tercera clase citada de juegos que se obtiene a partir del JGR es el juego de penetración ponderado (JPP) que exponemos a continuación.

Para cada entero positivo h llamaremos F_h al conjunto de las funciones de la forma

$$\text{A:}\ \ \{1, 2, \ldots, h\} \to \{1, 2, \ldots, m\}.$$

En el juego de penetración ponderado

$$\text{JPP} = (X, Y, M)$$

$$X = \bigcup_{h=1}^{n} F_h$$

$$Y = \{B:\ B \subset L,\ \ |B| \leqslant s,\ \ |B \cap L_i| \leqslant k\}$$
$$(k \leqslant m,\ \ s \leqslant kn)$$

y la función de pago se define por

$$M(A, B) = f(|A|)\,\langle A, B\rangle$$

donde f es una función positiva y

$$\langle A, B\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } A \cap B = \phi \\ 0 & \text{si } A \cap B \neq \phi \end{cases}$$

Para resolver este juego tendremos en cuenta que el conjunto

$$Q = \{B: \ B \in Y, \ \ |B| = s\}$$

es una clase completa.

Para aplicar el Teorema 3.1 al juego JPP y según lo anterior hay que resolver el juego auxiliar

$$\overline{G} = (\overline{X}, \overline{Q}, \overline{M})$$

donde

$$\overline{X} = \{F_1, F_2, ..., F_n\} \qquad \overline{Q} = \{\overline{B}: \ |B| = s\}$$

$$\overline{M}\,(F_h, \overline{B}) = M\,(\xi_{F_h}, B) = \frac{1}{m^h} \sum_{A \in F_h} f(|A|)\, \langle A, B\rangle =$$

$$= \frac{1}{m^h} f(h) \prod_{1}^{h} (m - s_i) = g\,(h, S)$$

donde hemos utilizado las notaciones

$$s_i = |B \cap L_i|, \qquad i = 1, 2, ..., n$$
$$0 \leqslant s_i \leqslant k, \qquad s_1 + s_2 + ... + s_n = s$$
$$S = (s_1, s_2, ..., s_n)$$

Para dar la solución de este juego definiremos S^0 y h_0 mediante las condiciones

$$S^0 = (s_1^0, s_2^0, ..., s_n^0)$$

con

$$s_i^0 = \begin{cases} k & 1 \leqslant i \leqslant p \\ r & i = p + 1 \\ 0 & i > p + 1 \end{cases}$$

donde

$$p = [s/k], \qquad r = s - pk$$

y

$$g\,(h) = g\,(h, S^0) = \begin{cases} f(h)\,\dfrac{(m-k)^h}{m^h} & \text{si } \ h \leqslant p \\[2ex] f(h)\,\dfrac{(m-k)^p\,(m-r)}{m^{p+1}} & \text{si } \ h > p \end{cases}$$

$$g\,(h_0) = \max_{1 \leqslant h \leqslant n} g\,(h)$$

y

$$B_0 = \{(i, j): \ 1 \leqslant j \leqslant k, \quad \text{para} \quad i \leqslant p, \ \ 1 \leqslant j \leqslant r \quad \text{para} \quad i = p + 1\}$$

Teorema 4.1.– En el juego JPP con las notaciones precedentes una estrategia óptima para el jugador I es la distribución concentrada uniformemente en F_{h_0} y para el jugador II la distribución concentrada uniformemente en la clase $\overline{B}_0$, siendo el valor del juego $g(h_0)$.

Demostración.– Según las consideraciones anteriores debemos probar que $(F_{h_0}, \overline{B}_0)$ es un punto de silla de $\overline{M}$ lo que equivale a probar que

$$g(h, S^0) \leqslant g(h_0, S^0) \leqslant g(h_0, S)$$

para todo h y S.

El lado izquierdo de estas relaciones está asegurado por la definición de h_0.

Para el lado derecho se tiene, incluso para todo h, que

$$g(h, S) \geqslant g(h, S^0).$$

En efecto, es evidente que

$$\prod_1^h (m - s_i) \geqslant (m - k)^h$$

que aplicaremos si $h \leqslant p$, mientras que si $h > p$ recordando que un producto de enteros de la forma

$$m - s_i, \qquad (s_i \leqslant k), \qquad s_1 + s_2 + \ldots + s_n = s$$

es mínimo cuando aparecen $s_i = k$ el mayor número posible de veces, lo que equivale a decir $S = S^0$, se tiene

$$\prod_1^h (m - s_i) \geqslant \frac{1}{\prod_{h+1}^n \mathrm{m}} \prod_1^n (m - s_i) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(m-k)^p (m-r) m^{n-p-1}}{m^{n-h}} \geqslant \frac{(m-k)^p (m-r)}{m^{p+1}}$$

que prueba que

$$g(h, S) = \frac{f(h)}{m^h} \prod_1^h (m - s_i) \geqslant g(h, S^0)$$

según se deseaba. #

Casos particulares del JPP son:

El MPG (modified penetration game), se obtiene considerando la función

$$f(h)=h, \qquad h=1,2,\ldots,n.$$

El PG (penetration game), se obtiene del anterior MPG tomando $k=m$.

El VCG (variant of the concealment game) que se obtiene a partir del MPG tomando

$$k=1, \qquad s=n$$

lo que equivale a tomar

$$Y=F.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDERSON, E. J. (1981): *Mazes: Search games on unknown networks.* Networks 11.

[2] GAL, SHUMEL (1980): *Search games.* Mathematics in Science and Engineering, 149. Academic Press, Inc.

[3] JOHNSON, S. M. (1964): *A search game.* Advances in Game Theory. Ann. Math. Stud. 52.

[4] NEUMANN, J. VON; MORGENSTERN, O. (1944): *Theory of games and economic behaivour.* Princeton University Press.

[5] OWEN, GUILLERMO (1968): *Game Theory.* W. B. Saunders Company.

[6] PRADHAN, B. K. (1982): *Solution of finite two-person games when it is not solved by relation of dominance.* Math. Educ., Sect. A 16.

[7] RUCKLE, W.; FENNELL, R.; HOLMES, P. T.; FENNEMORE, C. (1976): *Ambushing random walks I: Finite models.* Opns. Res. 24.

[8] RUCKLE, W. (1980): *On the constructability of solution to a pair of two person search games.* Int. J. of Game Theory. 8.

[9] RUCKLE, W. (1983): *Geometric games and their applications.* Pitman Advanced Publishing Program.

[10] SUBELMAN, EDUARDO J. (1981): *A hide-search game.* J. Appl. Probab. 18.

[11] ZOROA ALONSO, N. (1986): *Contribuciones a la teoría de los juegos geométricos.* Tesis. Universidad de Murcia.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Murcia