# *Sobre los espacios Frechet-Schwartz de dimensión diametral máxima*

POR JESUS M. F. CASTILLO.

Recibido: 12 noviembre 1986.

*Presentado por el Académico Numerario D. Manuel Valdivia Ureña*

**Abstract.**

We give an elementary proof that the variety $\Omega$ of Schwartz spaces of maximal diametral dimension is not generated by an ideal. This is done by characterizing the metrizable spaces in $\Omega$ as precisely the subspaces of $R^N$.

**Resumen.**

Probaremos en forma elemental que la variedad $\Omega$ de espacios de Schwartz de dimensión diametral máxima no está generada por un ideal. La prueba se hace caracterizando los espacios metrizables de $\Omega$ como los subespacios de $R^N$.

## TERMINOLOGIA Y NOTACIONES.

La dimensión diametral de un espacio localmente convexo $E$, se define como el conjunto:

$$\Delta(E) = \{(x_n) \in R^N : \forall U \in U(E)\ \exists V \in U(E): x_n \delta_n(V, U) \underset{n}{\to} 0\}$$

donde $U(E)$ denota un sistema fundamental de entornos de 0 en $E$, mientras que $\delta_n(V, U)$ representa el n–ésimo diametro de Kolmogorov de $V$ con respecto a $U$. Las propiedades generales de los diámetros de Kolmogorov pueden encontrarse en Pietsch (1972).

Si $U \in U(E)$ y su funcional de Minkowski asociado es $p_U$, entonces $E_U$ representa el espacio $E/ker\ p_U$ provisto de la norma inducida por $p_U$. Si $\phi_u$ es la proyección sobre el cociente, $\|\phi_U x\|_U = p_U(x)$. Dado $V \in U(E)$, $V \subset U$, la aplicación canónica $T_{VU}: E_V \to E_U$ se define por: $T_{VU}\phi_V = \phi_U \cdot \hat{T}_{VU}$ representa la extensión de $T_{VU}$ a las compleciones $\hat{E}_V, \hat{E}_U$.

Una variedad de espacios localmente convexos es una clase cerrada por la toma de 1. subespacios 2. cocientes 3. productos arbitrarios 4. imágenes por isomorfismos; si, además, es estable por 5. compleciones 6. sumas directas numerables y 7. productos tensores (con la topología $\pi$) entonces se dice una clase de estabilidad.

Si $A$ representa un ideal de operadores (una clase de operadores cerrada por la suma, composición y que contiene a los operadores finito dimensionales), un espacio localmente convexo $E$ se dice un $A$-espacio si para cada

$U \in U(E)$ puede elegirse $V \in U(E)$ de modo que $\hat{T}_{VU}$ pertenezca a $A$. Una clase de espacios localmente convexos se dice generada por un ideal $A$ si todo espacio de la clase es un $A$–espacio.

A lo largo de todo el trabajo puede suponerse que el cuerpo base de los espacios es $R$ ó $C$ indistintamente.

Fenske y Schock (1973) introducen la clase de los espacios de Schwartz (que necesariamente deben también ser nucleares) de dimensión diametral máxima, denotada $\Omega$, y estando formada por los espacios localmente convexos $E$ tales que $\Delta(E) = R^N$.

Ellos prueban acerca de $\Omega$:

1.– $\Omega$ es una variedad (de hecho una clase de estabilidad);
2.– $\Omega$ no está generada por un ideal.

La primera de estas propiedades y el hecho, hablando un poco a la ligera, de que "dimensión diametral máxima" debería corresponder a "mínima clase de estabilidad" sugirió la cuestión de si $\sigma(R) = \Omega$ (donde $\sigma(R)$ representa la más pequeña clase de estabilidad: la generada por $R$). Moscatelli en un trabajo sin publicar probó efectivamente la igualdad $\sigma(R) = \Omega$.

En este trabajo daremos una demostración elemental de que $\Omega$ no puede estar generada por un ideal, y también, por el camino, identificaremos los espacios metrizables y dual–metrizables de $\Omega$ como los subespacios de $R^N$ y $\underset{N}{\oplus} R$ respectivamente.

Nuestras demostraciones son completamente distintas de las más complejas que dan Fenske, Schock y Moscatelli.

Comenzaremos con un lema:

*Lema* 1.– *Sea* $(\delta_n^k)_{n \in N}$ *una colección numerable de sucesiones de números reales distintos de* 0. *Existe entonces una sucesión* $(x_n)_{n \in N}$ *de números reales, tal que la sucesión* $(x_n \ \delta_n^k)_{n \in N}$ *no converge a cero para ningún* $k \in N$.

*Prueba:* El resultado se sigue si no existe una colección infinita de índices $k$ tales que $\delta_n^k \underset{n}{\nrightarrow} 0$. Y por tanto podemos suponer que $\delta_n^k \underset{n}{\rightarrow} 0$ para todo $k \in N$. Sólo es necesario poner:

$$x_n = (\min_{k \leqslant n} \ \delta_n^k \ )^{-1}$$

Y tendremos:

$$x_n \, \delta_n^k \geqslant 1 \text{ para } n \geqslant k$$

(diremos "esencialmente" cuando nos encontremos en este caso).

*Lema 2: Sea E un espacio metrizable; E está en* $\Omega$ *si y sólo si para cada* $U \in U(E)$ *existe un* $V \in U(E)$, $V \subset U$, *de modo que la sucesión* $(\delta_n(V, U))_{n \in N}$ *posee tan sólo un número finito de términos no nulos.*

*Prueba*: Probaremos el "sólo si".

Supongamos que la hipótesis no se cumple, y sea $(U_k)_{k \in N}$ un sistema fundamental de entornos de 0 en $E$. Existe entonces un índice $i$ tal que ninguna de las sucesiones $(\delta_n\ (U_{i+k},\ U_i)_{k \in N}$ consiste esencialmente de ceros.

Escribamos: $\delta_n^k = \delta_n^k\ (U_{i+k},\ U_i)$ y apliquemos el lema 1, a la colección numerable $\{(\delta_n^k)_{n \in N}\}_{k \in N}$. La sucesión $(x_n)$ así obtenida no puede pertenecer a $\Delta(E)$.

*Teorema 1.— E es un espacio metrizable en* $\Omega$ *si y sólo si es un subespacio de* $\mathrm{R}^N$.

*Prueba:* Obsérvese que $\delta_n(V, U) = 0$ significa que $V$ está contenido en un subespacio finito–dimensional (y de dimensión menor o igual que $n$) de $E_U$; así que $T_{VU}$ es de rango finito y $E_u$ es de dimensión finita.

Finalmente, el espacio $E$ es un subespacio de un producto (numerable si $E$ es metrizable) de sus espacios de Banach asociados.

*Corolario: E es un espacio DF en* $\Omega$ *si y sólo si es un subespacio de* $\underset{N}{\oplus} R$.

*Teorema 2.—* $\Omega$ *no está generada por un ideal.*

*Prueba:* Supongamos que existe un ideal $A$ de operadores que genera $\Omega$. Sea $E$ un espacio de $\Omega$ y tomemos $(U_i)_{i \in I}$ un sistema fundamental de entornos de 0 en $E$.

Dado $U_i$ podemos encontrar un índice $i1$ tal que la aplicación canónica $T_1 : E_{i1} \to E_i$ pertenezca a $A$; y entonces un nuevo índice $i2$ tal que la aplicación canónica $T_2 : E_{i2} \to E_{i1}$ pertenezca a $A$ y entonces un nuevo índice $i2$ tal que la aplicación canónica $T_2 : E_{i2} \to E_{i1}$ pertenezca a $A$ y así sucesivamente; construímos un $A$—espacio metrizable: $E^i = \lim_n E_{in}$.

Comencemos con otro $U_j \in U(E)$ y, procediendo en la misma forma, construyamos el $A$—espacio metrizable $E^j = \lim_n E_{jn}$. Prosigamos así hasta agotar el sistema fundamental $(U_i)$. Es claro que $E$ puede tomarse como un subespacio del producto $\prod_{i \in I} E^i$ (la prueba seguiría de cerca (Köthe, 1969 18. 3. (7) pág 208)).

Sin embargo esto implicaría, tras el teorema 1, que cada espacio de $\Omega$ es un subespacio de una potencia de $R$. Por supuesto que este no es el caso de $\underset{N}{\oplus} R$, y así la prueba concluye.

Observación: Aunque la variedad $\Omega$ no está generada por un ideal, la subvariedad generada por los espacios metrizables de $\Omega$ si lo está (ciertamente está generada por el ideal $F$ de operadores de rango finito). Esta parece ser la primera vez que se muestra este fenómeno.

## BIBLIOGRAFIA

[1] FENSKE, CH. AND SCHOCK, E.: Nuclear spaces of maximal diametral dimension, *Compo. Math.* 26, 3, 303–308. (1973).

[2] KOTHE, G.: Topological Vector Spaces I (Berlin–Springer). (1969).

[3] MOSCATELLI, V. B.: Characterization of the class of nuclear spaces of maximal diametral dimension. (preprint anterior a 1984).

[4] PIETSCH, A.: Nuclear locally convex spaces (Berlin–Springer). (1972)

Departamento de Matemáticas.
Universidad de Extremadura.
Avda de Elvas s/n 06071 Badajoz