Algebras de Banach de medidas vectoriales

Por Oscar Blasco y J. Carlos Candeal

Recibido: 12 noviembre 1986

Presentado por el académico correspondiente D. Antonio Plans

Abstract

We define a convolution on V_A^p, provided A is a Banach algebra. The space of multipliers of V_A^1 is characterized for Banach algebras A with bounded sequential approximate identity and some questions about idempotent elements and the spectrum of these algebras are studied in the case $A = c_0$.

Resumen

Sobre los espacios V_A^p de medidas vectoriales con valores en un álgebra A se define la convolución por dos procedimientos distintos. Se estudian los multiplicadores del álgebra V_A^1 cuando A tiene unidad aproximada acotada secuencial y se resuelven algunas cuestiones relativas a los elementos idempotentes y espectros en el caso de $A = c_0$.

1. INTRODUCCION

El objetivo de este trabajo es el estudio de los espacios V_A^p de medidas de p-variación acotada sobre un grupo compacto G y con valores en un álgebra de Banach conmutativa A.

Estos espacios, considerados valorados en un espacio de Banach, han sido estudiados por diferentes autores y en distintos contextos. Son un sustituto de los espacios de Bochner-Lebesgue $L_A^p\ (G)$ en distintos casos. Así por ejemplo:

$$(L_A^p\ (G))^* = V_{A^*}^{p'} \qquad \text{con} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \text{y} \quad 1 \leqslant p < \infty$$

(ver [6]), V_A^p son los valores frontera de las funciones en $h_A^p\ (D)$ (ver [3]), aparecen como espacios de multiplicadores (ver [5]), ... Estos espacios apare-

Class AMS (1980): 46B22, 43A10, 46H05.
Key Words: Vector valued measures, multipliers, spectrum, idempotent element.

cen por primera vez en [4] en el caso de funciones real-valuadas y son estudiadas posteriormente por Leader [12] en el caso real y Dinculeanu [7] en el caso vectorial.

Supuesto que A es un álgebra de Banach, nosotros intentaremos dotar de un producto al espacio V_A^p de modo que lo convierta en álgebra de Banach y esto se hará por dos caminos diferentes.

A continuación estudiaremos para estos espacios algunos de los tópicos clásicos de la teoría de Algebras de Banach, como son el estudio de los multiplicadores y el estudio del espectro.

Aunque los espacios V_A^p están obviamente contenidos en M_A, siendo M_A las medidas regulares de variación acotada y M_A es álgebra de Banach (ver [15]), nosotros introduciremos sobre ellos una convolución directamente, ya que el espacio V_A^1, que definiremos a continuación, es un espacio de trabajo más sencillo y la convolución en este último es sencilla de definir.

En lo que sigue A será un álgebra de Banach conmutativa, G un grupo compacto con medida de Haar m.

Recordemos las definiciones de los espacios V_A^p.

Definiciones 1

– Si $1 < p < \infty$, V_A^p es el espacio de medidas aditivas $\mu: \mathscr{B}(G) \to A$ tales que

$$|\mu|_p = \sup_{\pi} \left(\sum_{E \in \pi} \frac{\|\mu(E)\|^p}{m(E)^{p-1}} \right)^{1/p} < +\infty \tag{1.1}$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones finitas de G.

– Para $p = 1$, V_A^1 es el espacio de medidas contablemente aditivas $\mu: \mathscr{B}(G) \to A$, absolutamente continuas respecto de m y de variación acotada, dotado de la norma $|\mu|_1 = |\mu|(G)$.

– Para $p = \infty$, V_A^∞ es el espacio de medidas finitamente aditivas tales que existe $C > 0$ de modo que $\|\mu(E)\| \leqslant Cm(E)$ para todo $E \in \mathscr{B}(G)$. La norma en este espacio es

$$|\mu|_\infty = \inf\{C: \|\mu(E)\| \leqslant Cm(E) \quad \forall E \in \mathscr{B}(G)\}. \tag{1.2}$$

Recordemos que en los casos $1 < p \leqslant \infty$ las medidas en estos espacios son necesariamente contablemente aditivas y absolutamente continuas y que V_A^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ son espacios de Banach con sus normas respectivas [7].

Es sencillo verificar la relación siguiente entre éstos

$$V_A^\infty \subseteq V_A^q \subseteq V_A^p \subseteq V_A^1 \subseteq M_A \qquad (1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty) \tag{1.3}$$

donde por M_A denotamos las medidas regulares sobre G y de variación acotada.

Expondremos en forma de proposición algunos de los resultados que utilizamos sobre estos espacios.

Proposición 1.– [2]. *Sea* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Si* $\mu \in V_A^p$ *entonces existe* $g \in L^p(G)$ *tal que*

$$|\mu|(E) = \int_E g(t)\,dm \qquad \forall E \in \mathscr{B}(G) \tag{1.3}$$

y

$$|\mu|_p = \|g\|_p . \tag{1.4}$$

Proposición 2.– [2]. *Sea* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

$$L_A^p(G) \subseteq V_A^p \quad \text{isométricamente.} \tag{1.5}$$

$$L_A^p(G) = V_A^p$$

si y sólo si A tiene la propiedad de Radon-Nikodym. (1.6)

Para poner de manifiesto las diferencias entre L_A^1 y V_A^1 demostraremos la siguiente proposición, donde $G = \mathbf{T} = \{z\colon |z| = 1\}$.

Proposición 3.– *Una medida* $\mu \in V_{c_0}^1$ *si y sólo si existe una sucesión de funciones* $\{f_n\}_{n\in Z}$ *en* $L^1(\mathbf{T})$ *y una función positiva* $f \in L^1(\mathbf{T})$ *tales que*

1) $|f_n(x)| \leqslant f(x)$ *a.e.*
2) $\hat{f}_n(m) \underset{|n|\to\infty}{\to} 0 \quad \forall m \in Z$

y con

$$\mu(E) = \left(\int_E f_n(t)\,dt\right)_{n\in Z}.$$

Demostración.– Sea $\mu \in V_{c_0}^1$ y consideremos μ_n la medida que resulta de componer con el funcional coordenada n-ésima. Obviamente μ_n es una medida absolutamente continua y de variación acotada y entonces el teorema de Radon-Nikodym asegura que existe $f_n \in L^1(\mathbf{T})$ tal que

$$\mu_n(E) = \int_E f_n(t)\,dt \qquad \forall E \in \mathscr{B}(\mathbf{T}). \tag{1.7}$$

Análogamente $|\mu|$ es también absolutamente continua y de variación acotada y de ahí que existe $g \geqslant 0$, $g \in L^1$ (**T**) tal que

$$|\mu|(E) = \int_E g(t)\,dt \qquad \forall E \in \mathscr{B}(\mathbf{T}) \tag{1.8}$$

Al ser obviamente $|\mu_n|(E) \leqslant |\mu|(E)$ $\forall E$ se tiene de modo sencillo que

$$|f_n(t)| \leqslant g(t) \qquad t\text{-a.e.} \tag{1.9}$$

Para demostrar (2) tengamos en cuenta que

$$\int_E f_n(t)\,dt \underset{|n|\to\infty}{\to} 0$$

pues $\mu(E) \in c_0$ y por tanto para toda función simple s,

$$\int_{\mathbf{T}} s(t) f_n(t)\,dt$$

converge a cero. El teorema de Egoroff nos permite demostrar de forma sencilla que

$$\int_{\mathbf{T}} g(t) f_n(t)$$

converge a cero para toda g continua, ya que dada $g \in C(\mathbf{T})$ y dado $\varepsilon > 0$, existen $E \in \mathscr{B}(\mathbf{T})$ con $m(E) < \varepsilon$ y s simple tal que $|s(t) - g(t)| < \varepsilon$ $\forall t \notin E$. Así pues

$$\left|\int_{\mathbf{T}} f_n g\right| \leqslant \left|\int_{\mathbf{T}-E} f_n (s-g)\right| + \left|\int_{\mathbf{T}-E} f_n s\right| + \int_E |f_n g| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \, \|f_n\|_1 + \left|\int_{\mathbf{T}} f_n s\right| + \int_E \|f_n\| \cdot \sup_{x \in \mathbf{T}} |g(x)|$$

El segundo sumando puede hacerce "pequeño" para n suficientemente "grande" y el tercer sumando al ser $f_n \in L^1(T)$ tiende a cero si $\mu(E)$ tiende a cero.

Tomando $g(t) = e^{-imt}$ se obtiene la implicación directa. Para ver el recíproco, es obvio comprobar que

$$\mu(E) = \left(\int_E f_n(t)\,dt\right)_{n \in \mathbf{Z}}$$

es una medida con valores en l^∞. Para ver que el rango de μ está contenido en c_0, tengamos en cuenta que de ser

$$\hat{f}_n(m) \underset{|n|\to\infty}{\to} 0 \qquad \forall\, m \in \mathbf{Z}$$

y

$$|f_n(t)| \leqslant f(t) \quad \text{a.e.}$$

se deduce de modo simple que $\forall\, g \in C(\mathbf{T})$

$$\int_{\mathbf{T}} g(t) f_n(t)\, dt \underset{|n|\to\infty}{\to} 0.$$

Ahora el teorema de Lusin junto con el argumento de aproximación similar al anterior nos conduce a probar que

$$\{\mu_n(E)\} = \left\{\int_E f_n(t)\, dt\right\}_{n\in Z}$$

converge a cero si $|n| \to \infty$.

El hecho de ser una medida de variación acotada y absolutamente continua se desprende de la acotación $|f_n(t)| \leqslant f(t)$ a.e. #

Esta proposición pone de manifiesto las diferencias entre L^1_{c0} y V^1_{c0} puesto que una función $f \in L^1_{c0}(\mathbf{T})$ si f se corresponde con una sucesión $(f_n)_{n\in N}$ con $f_n \in L^1(\mathbf{T})$, tales que

(1) $|f_n(t)| \leqslant g(t)$ t-a.e.
(2) $\hat{f}_n(m) \underset{|n|\to\infty}{\to} 0$ uniformemente en $m \in \mathbf{Z}$.

Donde $g(t) = \sup_{t\in\mathbf{T}} |f_n(t)| \in L^1(\mathbf{T})$ y (2) es debido a que $f_n(x) \to 0$ x-a.e. luego

$$f_n(x)\varphi(x) \to 0 \quad x\text{-a.e.} \qquad \forall\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1.$$

Como $|f_n(t)\varphi(t)| \leqslant g(t)$ t-a.e. uniformemente $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$ entonces

$$\hat{f}_n(m) \underset{|n|\to\infty}{\to} 0$$

uniformemente en m.

2. DEFINICION DE LA CONVOLUCION EN V^p_A

Método 1

Dada $\mu \in M_A$ y $f \in C_A(G)$ es claro que tiene sentido la integración

$$\int_G f(t)\, d\mu\,(t) = \text{lím} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \mu\,(E_i) \tag{2.1}$$

donde $x_i \in E_i$, E_i son una partición de G y el límite se toma cuando el diámetro de la partición tiende a cero.

El límite en (2.1) existe por las condiciones sobre f y μ y ser A un álgebra de Banach.

Observemos que si estamos con medidas no sólo en M_A sino en V_A^1 podemos obtener el siguiente lema.

Lema 1.– Si $\nu \in V_A^1$ y $E \in \mathscr{B}(G)$ entonces si $E - s = \{x\colon\ x + s \in E\}$ la función $s \to \nu\,(E - s)$ es una función continua.

Demostración.– Utilizando la proposición 1 existe $g \in L^1\,(G)$ tal que

$$\begin{gathered}\|\nu\,(E-s) - \nu\,(E-s')\| = \\ = \|\nu\,((E-s)\setminus(E-s')) - \nu\,((E-s')\setminus(E-s))\| \leqslant \\ \leqslant |\nu|\,[(E-s)\setminus(E-s')] + |\nu|\,[(E-s')\setminus(E-s)] \leqslant \\ \leqslant |\nu|\,[(E-s)\,\Delta\,(E-s')] = \int_{(E-s)\,\Delta\,(E-s')} g\,(t)\, dm\,(t).\end{gathered}$$

Al ser

$$m\,((E-s)\setminus(E-s')) \underset{s \to s'}{\to} 0$$

y

$$m\,((E-s')\setminus(E-s)) \underset{s \to s'}{\to} 0$$

entonces

$$\nu\,(E-s) \underset{s \to s'}{\to} \nu\,(E-s').$$

Definición 2.– Dada $\mu \in M_A$ y $\nu \in V_A^1$ definimos

$$\nu * \mu\,(E) = \int_G \nu\,(E-s)\, d\mu\,(s). \tag{2.2}$$

Está bien definida por el lema 1 y obviamente es finitamente aditiva. Comprobemos que es regular y será entonces contablemente aditiva [8].

Al inspeccionar (2.2) y (2.1), es claro que

$$\|\nu * \mu\,(E)\| \leqslant \int_G |\nu|\,(E-s)\, d\,|\mu|\,(s)$$

y por tanto

$$\|\nu * \mu (E)\| \leqslant \int_G \left(\int_E g(t-s)\, dm(t) \right) d|\mu|(s) \leqslant$$

$$\leqslant \int_E \left(\int_G g(t-s)\, d|\mu|(s) \right) dm(t) =$$

$$= \int_E (|\mu| * g)(t)\, dm(t). \tag{2.3}$$

Al ser $|\mu| * g$ una función en $L^1(G)$ es claro que $\nu * \mu$ es regular y de variación acotada.

Veamos qué propiedades se mantienen al convolucionar.

Proposición 3.– Si $\mu \in M_A$ *y* $\nu \in V_A^p$ *con* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *entonces* $\mu * \nu \in V_A^p$. *Además* $|\mu * \nu|_p \leqslant |\mu|_1 \, |\nu|_p$.

Demostración.– Por (1.3) se tiene que

$$\|\nu * \mu (E)\| \leqslant \int_E (g * |\mu|)(t)\, dm(t)$$

y así tendremos, para cada partición π de G y $1 < p < \infty$.

$$\left(\sum_{E \in \pi} \frac{\|\nu * \mu(E)\|^p}{m(E)^{p-1}} \right)^{1/p} = \left(\sum_{E \in \pi} \left(\frac{\|\nu * \mu(E)\|}{m(E)^{1/p'}} \right)^p \right)^{1/p} =$$

$$= \sup_\pi \left\{ \sum_{E \in \pi} \frac{\|\nu * \mu(E)\|}{m(E)^{1/p'}} |\beta_E| : \sum_{E \in \pi} |\beta_E|^{p'} \leqslant 1 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_\pi \left\{ \int_G \left(\sum_{E \in \pi} \frac{|\beta_E|}{m(E)^{1/p'}} \chi_E \right) (g * |\mu|)(t)\, dm(t) : \sum_{E \in \pi} |\beta_E|^{p'} \leqslant 1 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \|g * |\mu|\|_p \leqslant \|g\|_p \cdot |\mu|_1 = |\nu|_p \cdot |\mu|_1$$

Los casos $p = 1$, $p = \infty$ se hacen de forma similar.

Corolario 1.–

a) *Para* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, V_A^p *son álgebras de Banach con la convolución.*

b) V_A^p *es un ideal en* M_A *para cualquier* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Método 2

Introduciremos, ahora, una convolución en V_A^p de un modo distinto. Para ello usaremos la teoría de operadores.

Dinculeanu en [7] encontró una formulación equivalente del espacio V_A^p en términos de operadores, demostrando la isometría existente entre V_A^p y

$$\mathscr{L}(L^{p'}(G), A), \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

donde $\mathscr{L}(L^{p'}(G), A)$ denota el espacio de los operadores en $L(L^{p'}(G), A)$ tales que

$$|||T|||_p = \sup \{\Sigma\, |\alpha_i| \cdot \|T(\chi_{E_i})\| : \|\Sigma\, \alpha_i \chi_{E_i}\|_{p'} \leqslant 1\} < +\infty. \tag{2.4}$$

La isometría viene dada gracias a $\mu(E) = T(\chi_E)$ para cada $E \in \mathscr{B}(G)$. Por otro lado, puede verse en [1] un procedimiento para definir una convolución entre ciertos tipos de operadores como sigue:

Definición 3.– Para $1 \leqslant p' < \infty$.

Si $R \in L(L^{p'}(G), A)$ y $K \in L(C_A(G), A)$ podemos definir $K * R: L^{p'}(G) \to A$ dado por:

$$K * R(\psi) = K(g_\psi) \tag{2.5}$$

donde g_ψ es la función dada por

$$g_\psi(s) = R(\psi_s) \qquad \text{con} \quad \psi_s(t) = \psi(s - t) \tag{2.6}$$

como $s \to \psi_s$ es continua se deduce que g_ψ lo es también. #

Vamos a abordar la definición de convolución entre medidas.

Sean $\nu \in V_A^p$ con $1 < p \leqslant \infty$ y $\mu \in M_A$.

Consideremos $T_\nu \in \mathscr{L}(L^{p'}(G), A)$ el operador asociado a ν por la isometría de Dinculeanu y sea $K_\mu: C_A(G) \to A$ dado por

$$K_\mu(g) = \int_G g(t)\, d\mu(t)$$

según (2.1).

Claramente $K_\mu * T_\nu \in L(L^{p'}(G), A)$.

Proposición 4.– En las condiciones anteriores $K_\mu * T_\nu \in \mathscr{L}(L^{p'}(G), A)$ y

$$|||K_\mu * T_\nu|||_p \leqslant |\nu|_p \cdot |\mu|_1. \tag{2.7}$$

Demostración.— Por la proposición 1,

$$|\nu|(E) = \int_E g(t)\,dm(t) \qquad \text{con} \quad g \in L^p(G)$$

y por tanto

$$|\nu|(E-s) = \int_E g(t-s)\,dm,$$

así pues, dada

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i} \Big\|_{p'} \leqslant 1,$$

se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot \|K_\mu * T_\nu(\chi_{E_i})\|_A = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot \Big\| \int_G \nu(E_i - s) \cdot d\mu(s) \Big\|_A \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \int_G \|\nu(E_i - s)\|_A \cdot d\,|\mu|(s) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot \int_G \left(\int_{E_i} g(t-s)\,dm(t) \right) d\,|\mu|(s) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot \int_{E_i} g * |\mu|(t)\,dm(t) \leqslant$$

$$\leqslant \|g * |\mu|\|_p \leqslant |\mu|_1 \cdot \|g\|_p = |\mu|_1 \cdot |\nu|_p. \qquad \#$$

Nota.— En el caso $p = 1$ puede hacerse un proceso análogo teniendo en cuenta que $\mu \in M_A$ si y sólo si $T_\mu : C(G) \to A$ definido por

$$T(\psi) = \int \psi(s)\,d\mu(s)$$

es absolutamente sumante (ver [6]).

3. MULTIPLICADORES Y ESPECTRO PARA V_A^1

Es conocida la siguiente caracterización de los multiplicadores del álgebra $L_A^1(G)$ (ver [13]).

Si A es un álgebra conmutativa con unidad aproximada acotada secuencial entonces

$$\text{Mul}(L_A^1(G)) = M_{\text{Mul}(A)} \qquad (3.1)$$

Usando (1.6) tenemos que en caso de que A tenga la propiedad de Radon-Nikodym se verifica que

$$\mathrm{Mul}\,(V_A^1) = M_{\mathrm{Mul}\,A}\,.$$

Este último resultado es el que perseguimos en caso de que A sea cualquiera con las condiciones precedentes, tanto si tiene la propiedad de Radon-Nikodym como si no la tiene. Para ello daremos el siguiente

Lema 2.– Sean A, B álgebras de Banach conmutativas y A con u.a.a. Si $A \leqslant B \leqslant \mathrm{Mul}\,(A)$ entonces $\mathrm{Mul}\,(B)$ *es isométrico a* $\mathrm{Mul}\,(A)$ *(donde $A \leqslant B$ indica que A es ideal en B y está contenida isométricamente en B).*

Demostración.– Sea
$$\begin{array}{rl} \phi\colon & \mathrm{Mul}\,(B) \to \mathrm{Mul}\,(A) \\ & T \to \phi\,(T) = T|_A \end{array}$$

Está bien definida. En efecto, como T es un multiplicador y A tiene u.a.a. el teorema de factorización de Cohen asegura que $A^2 = A$ y por tanto $T\,(A) = T\,(A^2) = A \cdot T\,(A)$ y como A es ideal en B se tiene que $T\,(A) \subset A$. Es claro que ϕ es homomorfismo de álgebras, inyectivo y continuo siendo

$$\| T|_A \|_{\mathrm{Mul}\,(A)} = \| T \|_{\mathrm{Mul}\,(B)}$$

Estudiemos la suprayectividad. Dado $S \in \mathrm{Mul}\,(A)$ consideremos el multiplicador

$$\begin{array}{rl} \phi_S\colon & \mathrm{Mul}\,(A) \to \mathrm{Mul}\,(A) \\ & T \to S \cdot T \end{array}$$

y pensemos en

$$\phi_{S|_B} = \tilde{S}$$

Es claro que $\tilde{S} \in \mathrm{Mul}\,(B)$ pues B es ideal en $\mathrm{Mul}\,(A)$, y además $\phi\,(\tilde{S}) = S$ pues $\tilde{S}|_A = S$.

Teniendo en cuenta que ϕ es inyectiva se observa que dado $T \in \mathrm{Mul}\,(B)$ y $T|_A = S$ entonces $\tilde{S} = T$, luego

$$\| T \|_{\mathrm{Mul}\,(B)} = \| \tilde{S} \|_{\mathrm{Mul}\,(B)} = \sup_{\|b\|_B < 1} \| \tilde{S} b \|_B \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|b\|_{\mathrm{Mul}\,(A)} < 1} \| S \cdot b \|_{\mathrm{Mul}\,(A)} \leqslant \| S \|_{\mathrm{Mul}\,(A)} = \| T|_A \|_{\mathrm{Mul}\,(A)}.$$

Proposición 5.– Si A es un álgebra conmutativa con u.a.a. secuencial entonces

$$\mathrm{Mul}\,(V_A^1) = M_{\mathrm{Mul}\,(A)}\,. \tag{3.2}$$

Demostración.– Se basa en el lema anterior junto con (3.1) ya que

$$L_A^1 \leqslant V_A^1 \leqslant M_A \leqslant M_{\mathrm{Mul}\,(A)}\,.$$

Por ser $L_A^1\ (G) = L^1\ (G) \hat{\otimes}_\pi A$ es conocido de forma sencilla que [14]

$$\mathrm{Spec}\,(L_A^1\ (G)) = \Gamma \otimes \mathrm{Spec}\,(A),$$

donde Γ es el grupo dual de G.

La pregunta que nos formulamos es saber si Spec (V_A^1) coincide con el Spec (L_A^1 (G)) o no.

Es claro que Spec (L_A^1 (G)) $\subset$ Spec (V_A^1), pero en general, el contenido es estricto.

Proposición 6.– Sea $G = \mathbf{T}$ y $A = c_0$

$$\mathrm{Spec}\,(L_{c_0}^1\ (\mathbf{T})) \subsetneqq \mathrm{Spec}\,(V_{c_0}^1)$$

Demostración.– Consideremos

$$\mu : \mathscr{B}(\mathbf{T}) \to c_0$$
$$E \to \{\hat{\chi}_E\ (n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$$

donde $\hat{\chi}_E$ denota la transformada de Fourier de χ_E.

Es una comprobación que $\mu \in V_{c_0}^1$. Además μ no es representable por una f en $L_{c_0}^1$ (**T**) pues $\|\hat{\mu}\ (n)\|_{c_0} = 1,\ \forall\, n \in \mathbf{Z}$.

Teniendo en cuenta que

$$\mu\,(E) = \left(\int_E e^{-int}\,dt\right)_{n \in \mathbf{Z}}$$

un cálculo simple prueba que μ es idempotente. En efecto,

$$(\mu * \mu)\,(E) = \int_{\mathbf{T}} \mu\,(E - s)\,d\mu\,(s) = \left(\int_{\mathbf{T}} \left(\int_{E-s} e^{-int}\,dt\right) e^{-ins}\,ds\right)_{n \in \mathbf{Z}} =$$

$$= \left(\int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} \chi_{E-s}\,(t)\, e^{-in(t+s)}\,dt\,ds\right)_{n \in \mathbf{Z}}.$$

Con el cambio

$$t + s = u$$
$$s = v$$

se obtiene que $\mu * \mu\,(E) = \mu\,(E)$ para todo $E \in \mathscr{B}(\mathbf{T})$. Ahora bien, si Spec ($V_{c_0}^1$) = Spec ($L_{c_0}^1$) entonces $V_{c_0}^1 / L_{c_0}^1$ (**T**) es un álgebra radical.

Por consiguiente

$$\|(\mu + L_{c_0}^1)^n\|^{1/n} = \|(\mu + L_{c_0}^1)\|^{1/n}$$

converge a 1, que es una contradicción.

En la demostración hemos utilizado que cierta medida es idempotente, ahora daremos un resultado general que nos permite encontrar idempotentes de norma 1 en $V^p_{c_0}$ con $1 < p \leqslant 2$.

Proposición 7.– Sea $1 < p \leqslant 2$ *y* $\mu \in V^p_{c_0}$ μ *es idempotente con* $|\mu|_p = 1$ *si y sólo si existen dos sucesiones* $\{\varepsilon_n\} \subset \{0, 1\}$ *y* $\{m_n\} \subset \mathbf{Z}$ *donde* card $\{n\colon m_n = k\}$ *es finito para todo* $k \in \mathbf{Z}$ *y*

$$\mu (E) = \left(\int_E \varepsilon_n \, e^{i m_n t} \, dt \right)_{n \in \mathbf{Z}}$$

para todo $E \in \mathcal{B}(\mathbf{T})$.

Demostración.– Dado $\mu \in V^p_{c_0}$ por la prop. 3, § 2 tenemos

$$\mu_n (E) = \int_E f_n (t) \, dt$$

con

$$|f_n| \leqslant f \quad a.e. \qquad \text{y} \qquad \hat{f}_n (m) \underset{|n| \to \infty}{\to} 0$$

para cada $m \in \mathbf{Z}$. Como

$$|\mu| (E) = \int_E f(t) \, dt \qquad \text{y} \qquad \mu \in V^p_{c_0}$$

entonces $f \in L^p (\mathbf{T})$ y por tanto $f_n \in L^p (\mathbf{T})$.

Al ser $\mu * \mu = \mu$ entonces $\mu_n * \mu_n = \mu_n$ y de aquí $f_n * f_n = f_n$ se deduce, pues, tomando los coeficientes de Fourier de f_n que $\hat{f}_n (m) = = \varepsilon_{n,m} \in \{0, 1\}$. Como

$$\hat{f}_n (m) \underset{|m| \to \infty}{\to} 0$$

se tiene que $\exists \, M_n$ tal que

$$f_n (t) = \sum_{m=-M_n}^{M_n} \varepsilon_{n,m} \, e^{imt} \tag{2.3}$$

Ahora bien, como $|\mu|_p = \|f\|_p$ entonces $\|f_n\|_p \leqslant \|f\|_p = 1$. Por otro lado, al ser $f_n \in L^p$, $1 < p \leqslant 2$, entonces $(\hat{f}_n (m))_{m \in \mathbf{Z}} \in 1^{p'}$ y así

$$\left(\sum_{m=1}^{M_n} \varepsilon^{p'}_{n,m} \right)^{1/p'} \leqslant 1$$

y consecuentemente $\varepsilon_{n,m} = 0$ salvo para a lo más un valor de m, llamémosle m_n. Así construimos m_n y ε_n donde $\varepsilon_n = 1$ si existe algún m_n con $\hat{f}_n(m_n) = 1$ y $\varepsilon_n = 0$ si $f_n = 0$.

Así hemos probado que

$$\mu(E) = \left(\int_E \varepsilon_n e^{im_n t}\, dt\right)_{n \in \mathbf{Z}}.$$

El hecho de no existir un número infinito de m_n que coinciden se debe a que en ese caso $\hat{f}_n(k) = 1$ para un número infinito de valores de n y $\hat{f}_n(k) \not\to 0$.

Para ver el recíproco, obsérvese que una medida dada por

$$\mu_n(E) = \int_E \varepsilon_n e^{im_n t}\, dt$$

es tal que

$$\mu_n(E) \underset{|n| \to \infty}{\to} 0$$

ya que la transformada de Fourier $\hat{\chi}_E(m_n) \to 0$ pues m_n debe ser una subsucesión no acotada de $\mathbf{Z}$ por las hipótesis.

Es inmediato verificar que $\mu \in V^p_{c_0}$ pues realmente $\mu \in V^\infty_{c_0}$ al ser $|\mu|(E) \leqslant m(E)$, $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbf{T})$. #

Observaciones.– De (1.3) se deduce que si $p > 2$ entonces $V^p_{c_0} \subset V^2_{c_0}$ y por tanto el teorema anterior es aplicable a medidas $\mu \in V^p_{c_0}$ con $1 < p \leqslant \infty$ con $\|\mu\|_p = 1$. Por otro lado la restricción de ser de norma 1, puede quitarse observando la demostración, obteniendo entonces un resultado similar.

Reconocimientos.– Queremos agradecer al profesor J. Galé Gimeno sus útiles sugerencias.

BIBLIOGRAFIA

[1] O. BLASCO: *Convolución generalizada y aproximación de la identidad.* Actas X Jornadas Hispano-Lusas, Murcia (1985).

[2] O. BLASCO: *Tesis Doctoral.* Zaragoza (1985).

[3] O. BLASCO: *Boundary values of harmonic functions considered as operators.* Studia Math. 86 (1987), 19-33.

[4] S. BOCHNER: *Additive set functions on groups.* Ann. of Math. 40 (1939), 769-799.

[5] J. C. CANDEAL: *Multipliers of some Banach-valued-functions spaces.* En preparación.

[6] J. DIELTEL, J. L. UHL: *Vector measures.* Amer. Math. Soc. Mathematical Surveys 15 (1977).

[7] N. DINCULEANU: *Vector measures.* Pergamon Press, New York (1967).

[8] N. DINCULEANU, I. KLUVANEK: *On vector measures.* Proc. and Math. Soc. 17 (1967), 505-512.

[9] Y. KATNELSON: *An introduction to Harmonic Analysis.* John Wiley and Sons, Inc. 1968.

[10] R. LARSEN: *Banach Algebras. An Introduction.* Marcel Deker. Inc. New York (1973).

[11] R. LARSEN: *An Introduction to the theory of multipliers.* Springer-Verlag, Berlín (1971).

[12] S. LEADER: *The theory of L^p-spaces for finitely additive ser functions.* Ann. of Math. 58 (1953), 528-543.

[13] MING-KAM CHAN: *Characterizations of the right multipliers for L^1 $(G; A)$.* Proc. Edin. Math. Soc. 22 (1979), 181-186.

[14] J. TOMIYANA: *Tensor Products of Conmutatives Banach Algebras.* Tohon. Math. J. 12 (1960).

[15] A. J. WHITE: *Convolution of vector measures.* Proc. Royal Soc. of Edinburgh 73 A (1975), 117-135.

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias
50009-Zaragoza (SPAIN)