Densidad de la transversalidad en multijets de variedades con borde anguloso

POR JUAN MARGALEF ROIG Y ENRIQUE OUTERELO DOMINGUEZ

Presentado por el académico numerario D. José J. Etayo

Recibido: 27 octubre 1986

Resumen

Se introducen los multijets en variedades con borde anguloso, se define una noción de transversalidad, para este tipo de variedades, que no coincide con la definición clásica, se define la noción de subvariedad fuertemente bien situada y se prueba un teorema de densidad de la transversalidad en multijets ($\{f \in C^p (X, X') / (j^r f)^{(t)} \pitchfork Y\}$ es residual en $C^p (X, X')$ con la topología de Whitney, donde Y es una subvariedad fuertemente bien situada de $J^r (X, X')^{(t)}$).

Como aplicación de dicho teorema se prueban los teoremas sobre la densidad de las inmersiones, que en particular dan los teoremas de inmersiones de variedades con borde anguloso en espacios euclídeos.

1. INTRODUCCION

Sean X, X' variedades paracompactas y Hausdorff de clase p ($p \in \in NU \{\infty\}$) con borde anguloso y modeladas sobre espacios de Banach reales, y $k \in NU \{0\}$ con $k \leqslant p$. (Para notaciones véase [3]).

Consideramos el conjunto $G^p (X, X') = \{(x, f) / x \in X$ y f es una aplicación de clase p definida sobre un entorno de x y con valores en $X'\}$. Entonces la relación binaria $(x, f) R_k (x', f')$ si y sólo si $x = x'$ y las localizaciones de f y f' tienen las mismas diferenciales hasta el orden k en x, es una relación de equivalencia en $G^p (X, X')$ y el conjunto cociente $G^p (X, X') / R_k$ se designa por $J^k (X, X')$. Para cada $(x, f) \in G^p (X, X')$ la clase de equivalencia correspondiente se designa por $[(x, f)]$ ó $j_x^k (f)$. ($j_x^k (f)$ es el k-jet de f en x).

Se tienen las aplicaciones

$$s: J^k (X, X') \to X, \quad s (j_x^k (f)) = x$$

y

$$b: J^k (X, X') \to X', \quad b (j_x^k (f)) = f (x),$$

llamadas origen y final respectivamente.

Designamos por $T^{(k)}$ la única topología en $J^k (X, X')$ tal que para toda $c = (U, \Psi, (E, \Lambda))$ carta de X y toda $c' = (U', \Psi', (E', \Lambda'))$ carta de X', $J^k (U, U') \in T^{(k)}$ y la aplicación

$$\pi_c^{c'}: J^k (U, U') \to E \times E' \times \mathcal{L}(E, E') \times \ldots \times \mathcal{L}_s^k (E, E')$$

definida por

$$\pi_c^{c'} (j_x^k (f)) = (\Psi (x), \ \Psi' f \Psi^{-1} \Psi (x), \ \ldots, \ D^k (\Psi' f \Psi^{-1}) \Psi (x))$$

es un homeomorfismo de $J^k (U, U')$ sobre su imagen, cuando se considera en $J^k (U, U')$ la topología $T^{(k)}$ restringida. ($\mathcal{L}_s^r (E, E')$ designa el espacio de Banach real de las aplicaciones r-lineales simétricas y continuas de E en E').

Si $\partial X' = \phi$,

$$\pi_c^{c'} (J^k (U, U')) = \Psi (U) \times \Psi' (U') \times \mathcal{L}(E, E') \times \ldots \times \mathcal{L}_s^k (E, E')$$

y $J^k (X, X')$ es una variedad diferenciable de clase p-k.

Si

$$j^k: C^p (X, X') \to C (X, j^k (X, X'))$$

es la aplicación definida por $j^k (f) (x) = j_x^k (f)$, designamos por $T_W (p, k)$ a la topología en $C^p (X, X')$ imagen inversa por j^k de la topología fuerte o de las gráficas, $T_S^{(k)}$, en $C (X, J^k (X, X'))$ definida por la topología de X y la topología $T^{(k)}$ en $J^k (X, X')$ (A $T_W (p, k)$ se le llama topología de Whitney de orden k en $C^p (X, X')$). La topología $T_W (p, k)$ tiene una base formada por el conjunto $\{M (U) \,/\, U \in T^{(k)}\}$, donde

$$M (U) = \{f \in C^p (X, X') \,/\, j^k (f) (X) \subset U\}.$$

Una aplicación $f\colon X \to X'$ se dice que es una inmersión de clase p, si f es de clase p y para todo $x \in X$ existe $c = (U, \Psi, (E, \Lambda))$ carta de X centrada en x ($\Psi (x) = 0$) y existe $c' = (U', \Psi', (E', \Lambda'))$ carta de X' centrada en $x' = f (x)$ ($\Psi' (x') = 0$) tales que E es un subespacio lineal cerrado de E' admitiendo un suplementario algebraico cerrado en E', $f (U) \subset U'$, $\Psi (U) \subset \Psi' (U')$ y $\Psi' f \Psi^{-1}$ es la inclusión de $\Psi (U)$ en $\Psi' (U')$. El conjunto de inmersiones de clase p de X en X' se designará por $In^p (X, X')$. El conjunto de inmersiones de clase p inyectivas de X en X' se designará por $(In^p)_{\text{inyect.}} (X, X')$.

Una aplicación $f\colon X \to X'$ es una inmersión difeomórfica de clase p si es una inmersión de clase p y homeomorfismo sobre la imagen. Al conjunto de inmersiones difeomórficas cerradas de clase p de X en X' se le designa por $(In^p)_{\text{dife.cerr.}} (X, X')$. Finalmente el conjunto de aplicaciones de clase p propias de X en X' se le designa por $\text{Prop.}^p (X, X')$.

Se dice que $X'' \subset X'$ es una subvariedad de clase p de X' si para todo $x'' \in X''$ existe $c' = (U', \Psi', (E', \Lambda'))$ carta de X' centrada en x'' y existe (E'', Λ'') con E'' subespacio lineal cerrado de E' admitiendo un suplementario algebraico cerrado, y Λ'' conjunto finito de $\mathcal{L} (E'', R)$ linealmente independiente tales que

$$E''^{+}_{\Lambda''} \subset E'^{+}_{\Lambda'}$$

y

$$\Psi' \ (U' \cap X'') = \Psi' (U') \cap E''^{+}_{\Lambda''}.$$

Una subvariedad de clase p, X'', de X' se dice que está bien situada si $\partial X'' = X'' \cap \partial X'$ y se dice que está fuertemente bien situada si está bien situada y para todo $x'' \in B_k(X') \cap X''$ se verifica que

$$T_{x''}X' = T_{x''}B_k(X') + T_{x''}X''.$$

La noción de transversalidad que se adopta es la siguiente: "Sea f una aplicación de clase p de X en X', X'' una subvariedad de clase p de X' y $x \in f^{-1}(X'')$ con $\operatorname{ind}(x) = k \geqslant 0$. Se dice que f es transversal a X'' en x, y se escribe $f \pitchfork_x X''$, si

$$T_{f(x)}X' = \operatorname{im} T_x(f|_{B_kX}) + T_{f(x)}j\,(T_{f(x)}X'')$$

y

$$(T_x(f|_{B_kX}))^{-1}\,(T_{f(x)}j\,(T_{f(x)}X''))$$

admite suplementario topológico en T_xB_kX, donde $j\colon X'' \hookrightarrow X'$ y $B_kX = \{x \in X \,/\, \operatorname{ind}(x) = k\}$."

Si $f \pitchfork_x X''$ se cumple que:

$$T_{f(x)}X' = \operatorname{im}(T_xf) + T_{f(x)}j\,(T_{f(x)}X'')$$

y

$$(T_xf)^{-1}\,(T_{f(x)}j\,(T_{f(x)}X''))$$

admite suplementario topológico en T_xX lo que constituye la definición clásica de transversalidad. Cuando $x \in \operatorname{int} X$, las dos definiciones son equivalentes.

Sin embargo las dos definiciones precedentes de transversalidad no son equivalentes ni siquiera en dimensión finita. Considérese por ejemplo $f(t) = (t, t)$ de $\{t \in R \,/\, t \geqslant 0\}$ en $\{(x, y) \in R^2 \,/\, x \geqslant 0\}$ y la subvariedad determinada por $x \geqslant 0$, $y = 0$ (véase [1]). En [1] se ha probado: Sea $f\colon X \to X'$ una aplicación de clase p y X'' una subvariedad de clase p y bien situada de X'. Supongamos que f es transversal a X''. Entonces $f^{-1}(X'')$ es una subvariedad de clase p de X bien situada y para todo $x \in f^{-1}(X'')$,

$$T_xf^{-1}(X'') = (T_x(f))^{-1}\,(T_{f(x)}X'').$$

Este resultado no es cierto con la definición clásica de transversalidad en variedades con borde anguloso.

En [2] se ha probado el siguiente teorema:

Teorema 0.— Sean X, X' variedades de clase p ($p \in N \cup \{\infty\}$), Hausdorff, segundo axioma de numerabilidad con $\dim X = n$, $\dim X' = n'$ y $\partial X' = \phi$ ($n, n' \in N$). Sea $r \in N \cup \{0\}$ con $r < p$ y sea Y una subvariedad de clase $p - r$ de $J^r(X, X')$ con codimensión fija y fuertemente bien situada.

Sea $s \in N$ con $s \leqslant p - r$ y $p - r - 1 \geqslant n - \operatorname{cod}(Y)$. Entonces

$$T_r^Y = \{g \in C^p(X, X') \,/\, j^r(g) \pitchfork Y\}$$

es residual y por tanto denso en $C^p(X, X')$ con la topología $T_W(p, r + s)$.

2. DENSIDAD DE LA TRANSVERSALIDAD EN MULTIJETS

Sean X, X' variedades diferenciales de clase $p \in N \cup \{\infty\}$, paracompactas Hausdorff modeladas sobre espacios de Banach reales, y sea $t \in N - \{1\}$. Se define

$$X^t = X \times \overset{t)}{\dots} \times X$$

y

$$X^{(t)} = \{(x_2, \dots, x_t) \in X^t \,/\, x_i \neq x_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant t\}.$$

Entonces

$$X^t - X^{(t)} = \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant t} (p_{ij})^{-1} (\Delta)$$

por tanto $X^{(t)}$ es un abierto de X^t.

Sea $k \in N \cup \{0\}$ con $k \leqslant p$ y s: $J^k (X, X') \to X$ la aplicación origen. Se considera

$$s^t = s \times \overset{t)}{\dots} \times s : J^k (X, X')^t \to X^t.$$

Entonces a $J^k (X, X')^{(t)} = (s^t)^{-1} (X^{(t)})$ se le llama espacio de k-multijets y puesto que $X^{(t)}$ es abierto, se tiene que $J^k (X, X')^{(t)}$ es abierto de $J^k (X, X')^t$ y por tanto, si $\partial X' = \phi$, es una subvariedad abierta de $J^k (X, X')^t$.

Sea f: $X \to X'$ una aplicación diferenciable de clase p. Entonces se tiene la aplicación

$$(j^k f)^{(t)}: X^{(t)} \to J^k (X, X')^{(t)}$$

definida por

$$(j^k f)^{(t)} (x_1, \dots, x_t) = (j^k_{x_1} f, \dots, j^k_{x_t} f).$$

Es claro que si $\partial X' = \phi$, $(j^k f)^{(t)}$ es de clase $p - k$.

Lema 1.– Sean X, X' variedades diferenciables de clase $p \in N \cup \{\infty\}$, Hausdorff, cumpliendo el segundo axioma de numerabilidad, X pura de dimensión m y X' pura de dimensión m'.

Sea Y una subvariedad de clase p de X' e Y_0 un abierto de Y tal que $\overline{Y}_0$ es compacto y $\overline{Y}_0 \subset Y$. Entonces si $k \in N \cup \{0\}$ con $k \leqslant p$ se tiene que $G = \{g \in C^p (X, X') \,/$ para todo $x \in X$ con $g(x) \in \overline{Y}_0$ se verifica que $T_{g(x)} X' = \text{im } T_x g + T_{g(x)} Y\}$ es abierto de $C^p (X, X')$ con la topología $T_W (p, k)$.

Demostración.– Sea $U = \{j^k_x f \in J^k (X, X') \,/\, f(x) \notin \overline{Y}_0$ ó $f(x) \in \overline{Y}_0$ y $T_{f(x)} X' = \text{im } T_x f + T_{f(x)} Y\}$. Sea $\{j_n \,/\, n \in N\}$ una sucesión de elementos de $J^k (X, X') - U = C$ que converge a j_0 en $J^k (X, X')$ con la topología $T^{(k)}$. Sean $x_0 = s(j_0)$, $x'_0 = b(j_0)$, $x_n = s(j_n)$ y $x'_n = b(j_n)$ para todo $n \in N$. Por la continuidad de s y b, se tiene que

$$x_0 = \text{lím}\, x_n \qquad \text{y} \qquad x'_0 = \text{lím}\, x'_n.$$

Por otra parte, para todo $n \in N$,

$$x'_n \in \overline{Y}_0 \qquad \text{y} \qquad T_{x'_n}X' \neq \text{im}\, T_{x_n}(j_n) + T_{x'_n}Y.$$

Así $x'_0 \in \overline{Y}_0$.

Sean $j_0 = [(x_0, f_0)]$, $c = (U, \varphi, (R^m, \Lambda))$ carta de X centrada en x_0, $\varphi(x_0) = 0$, con $U \subset \text{dom}(f_0)$ y $x' = (U', \varphi', (R^{m'}, M))$ carta de X' adaptada a Y en x'_0 mediante (E', Λ'), es decir

$$x'_0 \in U', \qquad \varphi'(x'_0) = 0, \qquad \varphi'(U' \cap Y) = \varphi'(U') \cap E'^{+}_{\Lambda'},$$
$$E'^{+}_{\Lambda'} \subset (R^{m'})^{+}_{M}$$

tal que $f_0(U) \subset U'$. Se considera la aplicación h_0 definida por:

$$h_0\colon\ \varphi(U) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \xrightarrow{f_0} U' \xrightarrow{\varphi'} \varphi'(U') \xrightarrow{j''} R^{m'} \xrightarrow{\theta^{-1}} E' \times E'' \xrightarrow{p_2} E''$$

donde E'' es suplementario de E' en $R^{m'}$, $\theta(x, y) = x + y$ y $p_2(x, y) = y$.

Sea $[(x_n, f_n)] = j_n$ para todo $n \in N$. Como $\text{lím}\, x_n = x_0$ y $\text{lím}\, x'_n = x'_0$, existe $n_0 \in N$ tal que para todo $n \geqslant n_0$, $x_n \in U$ y $x'_n \in U'$. Luego para todo $n \geqslant n_0$ existe V_n abierto de $\varphi(U)$ con

$$\varphi(x_n) \in V_n, \qquad f_n\varphi^{-1}(V_n) \subset U' \qquad \text{y} \qquad \varphi^{-1}(V_n) \subset \text{dom}(f_n);$$

lo que permite construir h_n como sigue:

$$h_n\colon\ V_n \xrightarrow{\varphi^{-1}} \varphi^{-1}(V_n) \xrightarrow{f_n} U' \xrightarrow{\varphi'} \varphi'(U') \xrightarrow{j''} R^{m'} \xrightarrow{\theta^{-1}} E' \times E'' \xrightarrow{p_2} E''.$$

La condición $T_{x'_n}X' \neq \text{im}\, T_{x_n}(j_n) + T_{x'_n}Y$ implica que $Dh_n(\varphi(x_n))$ no es suprayectiva y como $\{h\colon R^m \to E''/h$ es lineal y sobre$\}$ es un abierto de $\mathcal{L}(R^m, E'')$ se tiene que

$$Dh_0(\varphi(x_0)) = \text{lím}\, Dh_n(\varphi(x_n))$$

no es sobre. Como consecuencia se prueba sin dificultad que

$$T_{x'_0}X' \neq \text{im}\, T_{x_0}(j_0) + T_{x'_0}Y \qquad \text{y} \qquad j_0 \in C.$$

Luego C es cerrado y U es abierto de $J^k(X, X')$ con la topología $T^{(k)}$, de donde $M(U) = \{f \in C^p(X, X') \,/\, j^k f(X) \subset U\}$ es abierto de $C^p(X, X')$ con la topología $T_W(p, k)$. Por último $G = M(U)$.

Teorema 2.– Sean X, X' variedades diferenciables de clase $p \in NU\{\infty\}$, Hausdorff, cumpliendo el segundo axioma de numerabilidad, X pura de dimensión n y X' pura de dimensión n' con $\partial X' = \phi$.

Sean $t \in N - \{1\}$, $r \in NU\{0\}$ con $r < p$, Y una subvariedad de clase $p - r$ de $J^r(X, X')^{(t)}$ de codimensión fija y fuertemente bien situada y $s \in N$ con $s \leqslant p - r$, $p - r - 1 \geqslant nt - \operatorname{cod}(Y)$. Entonces $T(Y, r, t, s) = \{f \in C^p(X, X') \mid (j^r f)^{(t)} \pitchfork Y\}$ es residual, y por tanto denso, en $C^p(X, X')$ con la topología $T_W(p, s + r)$.

Demostración.— Como Y es subvariedad de clase $p - r$ de $J^r(X, X')^{(t)}$, y por tanto de $J^r(X, X')^t$, $Y = G \cap C$ donde G es un abierto de $J^r(X, X')^{(t)}$ y C es cerrado de $J^r(X, X')^{(t)}$ con la topología inducida por la producto, t veces, de la $T^{(t)}$.

Para cada $y = (y_1, \ldots, y_t) \in Y \subset J^r(X, X')^{(t)}$, como $J^r(X, X')^{(t)}$ es regular, existe V^y entorno abierto de y en $J^r(X, X')^{(t)}$ tal que $\overline{V^y} \subset G$ y el cierre está tomado en $J^r(X, X')^{(t)}$. Así $V^y \cap Y = Y_y$ es un abierto de Y que contiene a y tal que $\overline{Y}_y \subset G \cap C = Y$, donde $\overline{Y}_y$ es la adherencia de Y_y en $J^r(X, X')^{(t)}$. Además tomando V^y suficientemente pequeño se puede suponer que:

a) $\overline{Y}_y$ es compacto y por tanto cerrado en $J^r(X, X')^t$.
b) Existen $c_{y_1} = (U_{y_1}, \varphi_{y_1}, (R^n, \Lambda_{y_1}))$, ..., $c_{y_t} = (U_{y_t}, \varphi_{y_t}, (R^n, \Lambda_{y_t}))$ cartas de X centradas en $s(y_1), \ldots, s(y_t)$ respectivamente con $\overline{U}_{y_1}, \ldots, \overline{U}_{y_t}$ compactos y disjuntos dos a dos y $\varphi_{y_1}(U_{y_1}), \ldots, \varphi_{y_t}(U_{y_t})$ acotados y existen $c'_{y_1} = (U'_{y_1}, \varphi'_{y_1}, R^{n'})$, ..., $c'_{y_t} = (U'_{y_t}, \varphi'_{y_t}, R^{n'})$ cartas de X' centradas en $b(y_1), \ldots, b(y_t)$ respectivamente tales que

$$(s \times \overset{t)}{\ldots} \times s)(\overline{Y}_y) \subset U_{y_1} \times \ldots \times U_{y_t},$$

$$(b \times \overset{t)}{\ldots} \times b)(\overline{Y}_y) \subset U'_{y_1} \times \ldots \times U'_{y_t}.$$

Como $J^r(X, X')^{(t)}$ cumple el segundo axioma de numerabilidad, Y también lo cumple y por tanto

$$Y = \bigcup_{m \in N} Y_{y^m}.$$

Para todo $k \in \{0, \ldots, n\}$ sea

$$B_k X = \bigcup_{i \in N} X_i^k,$$

donde X_i^k es una subvariedad compacta de $B_k X$ con $\partial X_i^k \neq \phi$, $\partial^2 X_i^k = \phi$, $\operatorname{int}(X_i^k)$ es un abierto de $B_k X$ y $X_i^k \subset X_{i+1}^k$ para todo $i \in N$, (véase [2]).

Para todo $(k_1, \ldots, k_t) \in \{0, \ldots, n\}^t$, todo $(i_1, \ldots, t_t) \in N^t$ y todo $m \in N$ se considera:

$$T(r;\ m;\ k_1, \dots, k_t;\ i_1, \dots, i_t) =$$
$$= \{g \in C^p\ (X, X')\ /\ \forall\, x = (x_1, \dots, x_t) \in (X^{k_1}_{i_1} \times \dots \times X^{k_t}_{i_t}) \cap X^{(t)}$$
$$\text{con}\ \ (j^r g)^{(t)}\ (x) \in \overline{Y}_{y^m}\ \ \text{se verifica que}\ \ (j^r g)^{(t)}{}_{|X^{(t)} \cap (B_{k_1}X \times \dots \times B_{k_t}X)} \pitchfork_x Y\}.$$

Es claro que

$$\{g \in C^p\ (X, X')\ /\ (j^r g)^{(t)} \pitchfork Y\} =$$
$$= \cap\ \{T\,(r;\ m;\ k_1, \dots, k_t;\ i_1, \dots, i_t)\ /\ m;\ k_1, \dots, k_t;\ i_1, \dots, i_t\ \ \text{varían}\}.$$

Veamos que $T\,(r;\ m;\ k_1, \dots, k_t;\ i_1, \dots, i_t)$ es abierto de $C^p\ (X, X')$ con la topología $T_W\ (p,\ s+r)$. En efecto. Sea α definida por el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
C^p\ (X, X') \arrow[r, "j^r"] \arrow[ddr, "\alpha"'] & C^{p-r}\ (X, J^r\ (X, X')) \arrow[d, "\gamma"] \\
& C^{p-r}\ (X^{k_1}_{i_1}, J^r\ (X, X')) \times \dots \times C^{p-r}\ (X^{k_t}_{i_t}, J^r\ (X, X')) \arrow[d, "\delta"] \\
& C^{p-r}\ (X^{k_1}_{i_1} \times \dots \times X^{k_t}_{i_t}; J^r\ (X, X')^t)
\end{tikzcd}$$

donde

$$\gamma\,(h) = (h_{|X^{k_1}_{i_1}}, \dots, h_{|X^{k_t}_{i_t}}) \qquad \text{y} \qquad \delta\,(g_1, \dots, g_t) = g_1 \times \dots \times g_t.$$

Entonces α es continua con la topología $T_W\ (p,\ r+s)$ y $T_W\ (p-r,\ s)$ ya que $X^{k_1}_{i_1}, \dots, X^{k_t}_{i_t}$ son compactos.

Por el lema anterior se tiene que

$$G = \{\, g \in C^{p-r}\ (X^{k_1}_{i_1} \times \dots \times X^{k_t}_{i_t},\ J^r\ (X, X')^t)\ /\ \text{para todo}\ \ x \in X^{k_1}_{i_1} \times \dots \times X^{k_t}_{i_t}$$
$$\text{con}\ \ g\,(x) \in \overline{Y}_{y^m}\ \ \text{se verifica que}\ \ T_{g(x)} J^r\ (X, X')^t = \operatorname{im}\ T_x g + T_{g(x)}\,Y\}$$

es abierto de

$$C^{p-r}\ (X^{k_1}_{i_1} \times \dots \times X^{k_t}_{i_t},\ J^r\ (X, X')^t)$$

con la topología $T_W\ (p-r,\ s)$.

Por último $\alpha^{-1}\ (G) = T\ (r;\ m;\ k_1, \dots, k_t;\ i_1, \dots, i_t)$ es abierto de $C^p\ (X, X')$ con la topología $T_W\ (p,\ r+s)$.

Veamos que $T\,(r;\ m;\ k_1, \dots, k_t;\ i_1, \dots, i_t)$ es denso en $C^p\ (X, X')$ con la topología $T_W\ (p,\ r+s)$. En efecto.

Por b) se tiene que

$$\varphi_{y^m_1}\ (U_{y^m_1}) \supset \varphi_{y^m_1} p_1 s^t\ (\overline{Y}_{y^m}), \dots, \varphi_{y^m_t}\ (U_{y^m_t}) \supset \varphi_{y^m_t} p_t s^t\ (\overline{Y}_{y^m})$$

y por tanto existen A_m^1, B_m^1 ; ..., A_m^t, B_m^t abiertos de R^n tales que

$$\varphi_{y_1^m} p_1 s^t (\overline{Y}_{y^m}) \subset A_m^1 \subset \overline{A_m^1} \subset B_m^1 \subset \overline{B_m^1} \subset \varphi_{y_1^m} (U_{y_1^m}), ..., \varphi_{y_t^m} p_t s^t (\overline{Y}_{y^m}) \subset$$
$$\subset A_m^t \subset \overline{A_m^t} \subset B_m^t \subset \overline{B_m^t} \subset \varphi_{y_t^m} (U_{y_t^m}).$$

Como $\overline{B_m^1}$, ..., $\overline{B_m^t}$ son compactos,

$$D(\overline{B_m^1}, R^n - \varphi_{y_1^m} (U_{y_1^m})) > 0, ..., D(\overline{B_m^t}, R^n - \varphi_{y_t^m} (U_{y_t^m})) > 0$$

y existen $\alpha_m^i : R^n \to [0, 1]$ de clase ∞, $i \in \{1, ..., t\}$, tales que $\alpha_m^i (y) = 1$ si $y \in \overline{A_m^i}$, $\alpha_m^i (y) = 0$ si $y \notin B_m^i$ para todo $i \in \{1, ..., t\}$. Análogamente

$$\varphi'_{y_1^m} p_1 b^t (\overline{Y}_{y^m}) \subset \varphi'_{y_1^m} (U'_{y_1^m}), ..., \varphi'_{y_t^m} p_t b^t (\overline{Y}_{y^m}) \subset \varphi'_{y_t^m} (U'_{y_t^m})$$

y por tanto existe $A_m'^1$, $B_m'^1$; ...; $A_m'^t$, $B_m'^t$ abiertos de $R^{n'}$ tales que

$$\varphi'_{y_1^m} p_1 b^t (\overline{Y}_{y^m}) \subset A_m'^1 \subset \overline{A_m'^1} \subset B_m'^1 \subset \overline{B_m'^1} \subset$$
$$\subset \varphi'_{y_1^m} (U'_{y_1^m}), ..., \varphi'_{y_t^m} p_t b^t (\overline{Y}_{y^m}) \subset A_m'^t \subset \overline{A_m'^t} \subset B_m'^t \subset \overline{B_m'^t} \subset \varphi'_{y_t^m} (U'_{y_t^m})$$

y existen $\alpha_m'^i : R^{n'} \to [0, 1]$ de clase ∞, $i \in \{1, ..., t\}$, tales que $\alpha_m'^i (y') = 1$ si $y' \in \overline{A_m'^i}$, $\alpha_m'^i (y') = 0$ si $y' \notin B_m'^i$ para todo $i \in \{1, ..., t\}$.

Sea $f \in C^p (X, X')$, $M' = R^{n'} \times \mathcal{L} (R^n, R^{n'}) \times ... \times \mathcal{L}_s^r (R^n, R^{n'})$ e $\overline{Y}_{y^m}^*$ entorno abierto de Y_{y^m} en Y tal que

$$\varphi_{y_i^m} p_i s^t \overline{Y}_{y^m}^* \subset A_m^i \qquad \text{y} \qquad \overline{\varphi'_{y_i^m} p_i b^t \overline{Y}_{y^m}^*} \subset A_m'^i$$

para todo $i \in \{1, ..., t\}$. Por continuidad es claro que existe M_1 entorno abierto de 0 en M' tal que si $x_i \in U_{y_i^m}$ y $f(x_i) \in U'_{y_i^m}$ con $i \in \{1, ..., t\}$ se verifica que

$$\lambda_i (m'_i, x_i) =$$
$$= (\alpha_m^i \varphi_{y_i^m} (x_i) \, \alpha_m'^i \varphi'_{y_i^m} f(x_i) \, m'_i \varphi_{y_i^m} (x_i) + \varphi'_{y_i^m} f(x_i)) \in \varphi'_{y_i^m} (U'_{y_i^m})$$

para todo $m'_i \in M_1$, donde

$$m'_i (y) = m'_{i0} + m'_{i1} (y) + ... + m'_{ir} (y, \overset{r)}{...}, y)$$

para todo $y \in R^n$, $m'_i = (m'_{i0}, m'_{i1}, ..., m'_{ir})$. En efecto: Como $\varphi_{y_j^m} (U_{y_j^m})$ es acotado, existe M_{1j} entorno abierto de 0 en M' tal que para todo $m' \in M_{1j}$ y todo $x \in U_{y_j^m}$ se cumple que

$$\|m' \varphi_{y_j^m} (x)\| < D(\overline{B_m'^j}, R^{n'} - \varphi'_{y_j^m} (U'_{y_j^m})).$$

Basta tomar

$$M_1 = \bigcap_{j=1}^{t} M_{1j}.$$

Se define

$$\rho\colon M_1^t \to C^p\ (X, X')$$

como sigue

$$\rho\ (m'_1, \ldots, m'_t)\ (x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } (x \notin U_{y_i^m} \text{ ó } f(x) \notin U'_{y_i^m}),\ \forall\, i \in \{1, \ldots, t\} \\ (\varphi'_{y_i^m})^{-1}\ \lambda_i\ (m'_i, x) \text{ si } x \in U_{y_i^m} \text{ y } f(x) \in U'_{y_i^m} \end{cases}$$

Es claro que $\rho\ (m'_1, \ldots, m'_t)$ es de clase p y que ρ es una C^p-representación ya que $e_\rho\colon\ M_1^t \times X \to X'$ es de clase p. Entonces $j^r\rho\colon\ M_1^t \to C^{p-r}\ (X, J^r\ (X, X'))$ es una C^{p-r}-representación.

Sean

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\ \text{mín}\ \{D\ (\text{sop}\ \alpha'^i_m, R^{n'} - \varphi'_{y_i^m}\ (U'_{y_i^m})),\ i \in \{1, \ldots, t\},$$

$$D\ (\overline{\varphi'_{y_i^m}\, p_i b^t\, \overline{Y}^*_{y^m}}, R^{n'} - A'^i_m),\ i \in \{1, \ldots, t\}\}\qquad \text{y}$$

$$M = \{m' \in M_1\ /\ \|m'\varphi_{y_1^m}\ (x_1)\| < \varepsilon, \ldots, \|m'\varphi_{y_t^m}\ (x_t)\| < \varepsilon,$$

$$\forall\, x_1 \in U_{y_1^m} \text{ con } \varphi_{y_1^m}\ (x_1) \in \text{sop}\ \alpha^1_m, \ldots,$$

$$\ldots, \forall\, x_t \in U_{y_t^m} \text{ con } \varphi_{y_t^m}\ (x_t) \in \text{sop}\ \alpha^t_m\}$$

que es un abierto de M_1 que contiene al 0. Se construye $H\colon\ M^t \times X^{(t)} \to\ \to J^r\ (X, X')^{(t)}$ de clase $p - r$ como sigue:

$$H\ (m_1, \ldots, m_t, x_1, \ldots, x_t) = (j^r_{x_1}\rho\ (m_1, \ldots, m_t), \ldots, j^t_{x_t}\rho\ (m_1, \ldots, m_t)).$$

Para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$ sea

$$V_i = f^{-1}\ (U'_{y_i^m}) \cap \varphi^{-1}_{y_i^m}\ (A^i_m).$$

Entonces para todo $(m''_1, \ldots, m''_t,\ y_1, \ldots, y_t) \in M^t \times [(V_1 \times \ldots \times V_t) \cap X^{(t)}]$ se cumple que

$$H\ (m''_1, \ldots, m''_t,\ y_1, \ldots, y_t) \in J^r\ (V_1, U'_{y_1^m}) \times \ldots \times J^r\ (V_t, U'_{y_t^m}) \cap$$

$$\cap J^r\ (X, X')^{(t)}.$$

Se considera el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M^t \times [(V_1 \times \ldots \times V_t) \cap X^{(t)}] & \xrightarrow{H} & J^r(V_1, U'_{y_1^m}) \times \ldots \times J^r(V_t, U'_{y_t^m}) \cap J^r(X, X')^{(t)} \\ \Big\downarrow 1_{M^t} \times \varphi_{y_1^m} \times \ldots \times \varphi_{y_t^m} & & \Big\downarrow \pi_{c_{y_1^m}}^{c'_{y_1^m}} \times \ldots \times \pi_{c_{y_t^m}}^{c'_{y_t^m}} \\ M^t \times (\varphi_{y_1^m}(V_1) \times \ldots \times \varphi_{y_t^m}(V_t) & \xrightarrow{h} & \varphi_{y_1^m}(V_1) \times \varphi'_{y_1^m}(U'_{y_1^m}) \times \mathcal{L}(R^n, R^{n'}) \times \ldots \end{array}$$

$$\ldots \times \mathcal{L}_s^r(R^n, R^{n'}) \times \ldots \times \varphi_{y_t^m}(V_t) \times \varphi'_{y_t^m}(U'_{y_t^m}) \times \mathcal{L}(R^n, R^{n'}) \times \ldots$$
$$\ldots \times \mathcal{L}_s^r(R^n, R^{n'})$$

donde

$$h(m_1, \ldots, m_t,\ z_1, \ldots, z_t) = (z_1,\ m_1 z_1 + \varphi'_{y_1^m} f \varphi_{y_1^m}^{-1}(z_1),\ Dt_{m_1}(z_1), \ldots$$
$$\ldots, D^r t_{m_1}(z_1), \ldots, z_t,\ m_t z_t + \varphi'_{y_t^m} f \varphi_{y_t^m}^{-1}(z_t),\ Dt_{m_t}(z_t), \ldots, D^r t_{m_t}(z_t))$$

donde $t_{m_i}\colon\ \varphi_{y_i^m}(V_i) \to \varphi'_{y_i^m}(U'_{y_i^m})$ está definida por

$$t_{m_i}(y) = m_i(y) + \varphi'_{y_i^m} f \varphi_{y_i^m}^{-1}(y) = \varphi'_{y_i^m} \rho(m_1, \ldots, m_t)\, \varphi_{y_i^m}^{-1}(y)$$

para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$.

Entonces

$$\bar{h}\colon\ M'^t \times \varphi_{y_1^m}(V_1) \times \ldots \times \varphi_{y_t^m}(V_t) \to \varphi_{y_1^m}(V_1) \times R^{n'} \times \mathcal{L}(R^n, R^{n'}) \times \ldots$$
$$\ldots \times \mathcal{L}_s^r(R^n, R^{n'}) \times \ldots \times \varphi_{y_t^m}(V_t) \times R^{n'} \times \mathcal{L}(R^n, R^{n'}) \times \ldots \times \mathcal{L}_s^r(R^n, R^{n'}),$$

definida como h, es difeomorfismo de clase $p - r$. Así h es difeomorfismo de $M^t \times \varphi_{y_1^m}(V_1) \times \ldots \times \varphi_{y_t^m}(V_t)$ sobre su imagen y por tanto la H del diagrama anterior es difeomorfismo sobre su imagen.

Como Y está fuertemente bien situada, se tiene que $H \pitchfork \bar{Y}_m^*$.

Aplicando el teorema de R. Abraham [1] de densidad parametrizado, se tiene que

$$M_{\bar{Y}_m^*} = \{(m_1, \ldots, m_t) \in M^t \ / \ H(m_1, \ldots, m_t, -) \pitchfork \bar{Y}_m^*\} =$$
$$= \{(m_1, \ldots, m_t) \in M^t \ / \ j^r \rho(m_1, \ldots, m_t)^{(t)} \pitchfork \bar{Y}_m^*\}$$

es resitual en M^t y por tanto denso en M^t. Así existe $(m_1'^p, \ldots, m_t'^p))$ sucesión de elementos de $M_{\bar{Y}_m^*}$ que converge a 0 y por tanto

$$\rho(m_1'^p, \ldots, m_t'^p) \to \rho(0) = f$$

en la topología $T_W(p,\ r+s)$ de $C^p(X, X')$. En efecto: Por las propiedades de la topología de Whitney es suficiente ver que

1) $\rho(m_1'^p, \ldots, m_t'^p)\big|_{X - \bar{U}_{y_1^m} \cup \ldots \cup \bar{U}_{y_t^m}} = f\big|_{X - \bar{U}_{y_1^m} \cup \ldots \cup \bar{U}_{y_t^m}}$

2) Si α es una métrica en $J^{r+s}(X, X')$,

$$\{(j^{r+s}\rho\,(m_1'^p, \ldots, m_t'^p))\Big|_{\overline{U}_{y_1^m} \cup \ldots \cup \overline{U}_{y_t^m}} \;/\; p \in N\}$$

converge uniformemente a

$$(j^{r+s}f)\Big|_{\overline{U}_{y_1^m} \cup \ldots \cup \overline{U}_{y_t^m}}$$

Lo primero es inmediato a partir de la definición de ρ.

Veamos 2). $e_{j^{r+s}\rho}$: $M^t \times X \to J^{r+s}(X, X')$ es continua y por tanto $j^{r+s}\rho$: $M^t \to C^{p-(r+s)}(X, J^{r+s}(X, X'))$ es también continua con la topología compacta-abierta. Luego $J^{r+s}\rho\,(m_1'^p, \ldots, m_t'^p)$ converge a $j^{r+s}f$. Como la topología compacta-abierta describe la convergencia uniforme sobre compactos, se deduce 2).

Luego tenemos que

$$K = \{g \in C^p(X, X') \,/\, (J^r g)^{(t)} \pitchfork \overline{Y}^*_m\}$$

es denso en $C^p(X, X')$ con la topología $T_W(p, r+s)$. Por último

$$K \subset T(r;\ m;\ k_1, \ldots, k_t;\ i_1, \ldots, i_t)$$

y

$$\{g \in C^p(X, X') \,/\, (j^r g)^{(t)} \pitchfork Y\}$$

es residual en $C^p(X, X')$ con la topología $T_W(p, r+s)$ como queríamos demostrar.

Observación.— Con la definición clásica de transversalidad, el conjunto $T(Y, r, t, s)$ del teorema 2 es más grande y en [4] se prueba que este conjunto más grande es residual incluyendo borde anguloso en X'.

3. APLICACIONES

Veamos algunas aplicaciones del teorema que acabamos de probar.

Teorema 3.— Sean X, X' variedades diferenciables de clase $p \in N \cup \{\infty\}$ Hausdorff, segundo axioma de numerabilidad y puras de dimensiones n y n' respectivamente con $\partial X' = \phi$. Supongamos que $n' \geqslant 2n$ y sea $s \in N$ con $s \leqslant p-1$, y $p > 1$. Entonces $In^p(X, X')$ es abierto y residual (y por tanto denso) en $C^p(X, X')$ con la topología $T_W(p, s+1)$.

Demostración.— $In^p(X, X')$ es abierto ya que lo es en la topología $T_W(p, 1)$. Para cada $r \in \{1, \ldots, q = \text{mín}(n, n')\}$ se tiene que

$$S_r = \{j \in J^1 (X, X') \,/\, \text{corrango}\,(j) = r\}$$

es subvariedad de clase $p - 1$ fuertemente bien situada de $J^1 (X, X')$ de codimensión fija $h = (n - q + r)(n' - q + r)$. Como $n' \geqslant 2n$, $q = n$ y $h \geqslant n + 1$. Así $j^1 f$ es transversal a S_r si y sólo si $j^1 f(X) \cap S_r = \phi$ ya que para todo $x \in X$,

$$T_{j^1_x f} J^1 (X, X') \neq T_x (j^1 f)(T_x X) + T_{j^1_x f} S_r.$$

Por el teorema de transversalidad de Thom (Teorema 0), se tiene que

$$T_r = \{f \in C^p (X, X') \,/\, j^1 f \pitchfork S_r\} = \{f \in C^p (X, X') \,/\, (j^1 f)(X) \cap S_r = \phi\}$$

es residual en $C^p (X, X')$ con la topología $T_W (p, s + 1)$.

Por último

$$\bigcap_{r=1}^{q} T_r = In^p (X, X').$$

Teorema 4.— Sean X, X' como en el teorema anterior. Supongamos que $n' \geqslant 2n + 1$ y sea $s \in N$ con $s \leqslant p - 1$, $p > 1$. Entonces $(In^p)_{\text{inyect.}} (X, X')$ es residual y por tanto denso en $C^p (X, X')$ con la topología $T_W (p, s + 1)$.

Demostración.— Como $In^p (X, X')$ es abierto y denso, es suficiente probar que $H = \{f \in C^p (X, X') \,/\, f \text{ es inyectiva}\}$ es residual. Observamos en primer lugar que $f \colon X \to X'$ es inyectiva si y sólo si la imagen de $(j^0 f)^{(2)} \colon X^{(2)} \to J^0 (X, X')^{(2)}$ no corta a $Y = (b^2)^{-1} (\Delta') \cap J^0 (X, X')^{(2)}$.

Por otro lado Y es una subvariedad de clase p fuertemente bien situada de $J^0 (X, X')$ de codimensión igual a la dimensión de X', ya que b^2 es sumersión. Por tanto, como $n' > 2n = \dim X^{(2)}$, se tiene que $(j^0 f)^{(2)} \pitchfork Y$ si y sólo si $(j^0 f)^{(2)} (X^{(2)}) \cap Y = \phi$.

Por el teorema 2 se tiene que $H = \{f \in C^p (X, X') \,/\, (j^0 f)^{(2)} \pitchfork Y\}$ es residual en $C^p (X, X')$ con la topología $T_W (p, s)$.

Corolario 5.— En las hipótesis del teorema anterior $(In^p)_{\text{dife. cerr.}} (X, X')$ es denso en $\text{Prop.}^p (X, X')$ con la topología $T_W (p, s)$.

Corolario 6.— Sea X una variedad de clase $p \in N \cup \{\infty\}$, Hausdorff, cumpliendo el segundo axioma de numerabilidad y pura de dimensión n. Entonces existe $f \colon X \to R^{2n}$ inmersión de clase p, existe $g \colon X \to R^{2n+1}$ inmersión inyectiva de clase p y existe $H \colon X \to R^{2n+1}$ inmersión difeomórfica cerrada de clase p.

BIBLIOGRAFIA

[1] MARGALEF ROIG, J., OUTERELO DOMINGUEZ, E.: *Un teorema de densidad parametrizado para variedades con borde anguloso.* Actas de las "X Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas". Sección de Topología, pp. 23-32. Murcia, Enero de 1985.

[2] MARGALEF ROIG, J., OUTERELO DOMINGUEZ, E.: *Densidad de la transversalidad en variedades con borde anguloso.* Collectanea Math., V. XXXVII, fasc. 3, pp. 277-285, 1986.

[3] MARGALEF ROIG, J., OUTERELO DOMINGUEZ, E.: *Un teorema de extensión de Whitney en dimensión infinita y clase p.* Rev. Mat. Hispano-Americana. Tomo XLII, pp. 159-178, 1982.

[4] MICHOR, P. W.: *Manifolds of differentiable mappigs.* Shiva Math. Series n^{o} 3, 1980.

C.E.C.I.M.E. del C.S.I.C. Madrid
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid