Transformación compuesta vectorial de sucesiones

Por Flor Maria Guerrero Casas

Recibido: 4 junio 1986

Presentado por el académico correspondiente Antonio de Castro Brzezicki

Abstract

A composite transformation of two algorithms accelerating the convergence of a vectorial sequence is defined and some properties are proved: i.e. limit conservation, convergence acceleration, non linearity and quasi-linearity.

The comparation between two sequences is studied by means of their scalar product with an arbitrary vector of the topological vector space considered.

The composite sequence of higher rank is also defined and some properties are proved. Some known convergence acceleration algorithms appear as particular cases.

Resumen

Consideremos dos algoritmos cualesquiera que aceleran la convergencia de una sucesión de vectores convergente inicial. Definimos una composición no lineal de ambos que llamamos transformación compuesta vectorial de rango dos y a continuación estudiamos sus propiedades: Convergencia al límite de la sucesión inicial, aceleración de la convergencia, no linealidad y cuasi-linealidad. La comparación entre sucesiones la efectuamos a través del producto escalar de las mismas con un vector arbitrario del espacio vectorial topológico considerado.

Posteriormente definimos la transformación compuesta de rango superior y damos algunas propiedades.

En ambos casos obtenemos que diversos algoritmos conocidos de aceleración de la convergencia están comprendidos en nuestra transformación.

1. INTRODUCCION

Existen diversas transformaciones para acelerar la convergencia de sucesiones vectoriales (Brezinski, 1978). En el presente artículo se define una composición no lineal de algoritmos vectoriales de aceleración de la convergencia que comprende como casos particulares transformaciones vectoriales conocidas. Asimismo permite generar otras muchas dependiendo de los algoritmos primarios elegidos. Transformaciones originales de este tipo han sido estudiadas en Guerrero (1985-b), en donde se patentizan sus ventajas.

Consideremos el espacio vectorial topológico E sobre R y E' su dual topológico. Si $z \in E$ y $z' \in E'$ la expresión (z, z') designará la forma bilineal que establece la dualidad entre E y E'. Cuando $E = R^p$ tendremos $E' = R^p$ y (z, z') representará el producto escalar de los vectores z y z'. Este caso será el que nos sirva de base.

Sea (S_n) la sucesión del conjunto $E^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales) convergente al límite $S \in E$.

Se define una transformación vectorial, t_i, como una aplicación de $E^{\mathbb{N}}$ en $E^{\mathbb{N}}$ que a cada sucesión (S_n) le hace corresponder la sucesión de vectores

$$t_i\,(S_n) = t_i^{(n)}.$$

Definición 1.1.– Sean t_1 y t_2 dos transformaciones vectoriales sobre la sucesión (S_n) tales que

$$\Delta t_1 \neq \Delta t_2, \qquad \forall\, n.$$

Se define la transformación compuesta de rango dos como la aplicación T de $E^{\mathbb{N}}$ en $E^{\mathbb{N}}$ cuyo transformado es

$$T_n = t_1^{(n)} + a_n\,(t_2^{(n)} - t_1^{(n)}),$$

siendo

$$a_n = -\,(x, \Delta t_1^{(n)}) \,/\, [(x, \Delta t_2^{(n)}) - (x, \Delta t_1^{(n)})],$$

donde x es un vector arbitrario de E que no anulará simultáneamente $(x, \Delta t_1^{(n)})$ y $(x, \Delta t_2^{(n)})$. Podemos expresar T_n como cociente de determinantes

$$T_n = \begin{vmatrix} t_1^{(n)} & t_1^{(n)} \\ (x, \Delta t_1^{(n)}) & (x, \Delta t_2^{(n)}) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (x, \Delta t_1^{(n)}) & (x, \Delta t_2^{(n)}) \end{vmatrix}$$

expresiones que pueden obtenerse aplicando el procedimiento θ-vectorial a

$$t_2^{(n)} = t_1^{(n)} + (t_2^{(n)} - t_1^{(n)}), \qquad \text{(Brezinski, 1978).}$$

El operador Δ se define de la forma

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n$$

2. PROPIEDADES

Para que nuestra transformación vectorial sea útil debe converger al vector límite de la sucesión inicial como a continuación demostraremos.

Teorema 2.1.– Si

$$\lim_n t_1^{(n)} = \lim_n t_2^{(n)} = S$$

y si

$$\exists\, \alpha < 1 < \beta \ \text{ y } \ \exists\, n_0 \,/\, \forall \geqslant n_0 : \ (x, \Delta t_2^{(n)}) \,/\, (x, \Delta t_1^{(n)}) \notin [\alpha, \beta]$$

entonces

$$\lim_n T_n = S.$$

Demostración.–

$$\lim_n T_n = \lim_n t_1^{(n)} - \lim_n (t_2^{(n)} - t_1^{(n)}) \,/\, [(x, \Delta t_2^{(n)}) \,/\, (x, \Delta t_1^{(n)}) - 1] = S$$

Para estudiar la aceleración de la convergencia veremos el comportamiento de la sucesión $(z,\ T_n - S)$ frente a una de las sucesiones $(z, t_1^{(n)})$, $(z, t_2^{(n)})$ ó $(z,\ S_n - S)$, para cualquier vector z del espacio E'.

En primer lugar veremos que si las dos transformaciones primarias tienen un comportamiento análogo frente a la sucesión inicial, la transformación compuesta no acelera la convergencia de $(z,\ S_n)$ y mantiene dicho comportamiento.

Teorema 2.2.– Si

$$\exists\, \alpha < 1 < \beta \ \text{ y } \ \exists\, n_0 \,/\, \forall\, n \geqslant n_0 : \ (x, \Delta t_2^{(n)}) \,/\, (x, \Delta t_1^{(n)}) \notin [\alpha, \beta].$$

Si además

$$\lim_n \frac{(z,\ t_1^{(n)} - S)}{(z,\ S_n - S)} = \lim_n \frac{(z,\ t_2^{(n)} - S)}{(z,\ S_n - S)} = a,$$

cualquiera que sea el vector z, entonces

$$\lim_n (z,\ T_n - S) \,/\, (z,\ S_n - S) = a.$$

Demostración.–

$$\lim_n \frac{(z,\ T_n - S)}{(z,\ S_n - S)} = \lim_n \frac{(z,\ t_1^{(n)} - S)}{(z,\ S_n - S)} -$$

$$- \lim_n \frac{1}{\dfrac{(x, \Delta t_2^{(n)})}{(x, \Delta t_1^{(n)})} - 1} \left(\frac{(z,\ t_2^{(n)} - S)}{(z,\ S_n - S)} - \frac{(z,\ t_1^{(n)} - S)}{(z,\ S_n - S)} \right) = a - 0 = a$$

En cambio si t_1 y t_2 tienen distinto comportamiento entonces T sí acelera la convergencia de la sucesión original.

Teorema 2.3.– Si (S_n) es una sucesión para la que $\exists\, \alpha < 1 < \beta$ tal que

$$(x,\ S_{n+1} - S) \,/\, (x,\ S_n - S) \notin [\alpha, \beta] \qquad \forall\, x \in E',$$

si además

$$\lim_n\, (z,\ t_1^{(n)} - S) \,/\, (z,\ S_n - S) = a$$

y

$$\lim_n\, (z,\ t_2^{(n)} - S) \,/\, (z,\ S_n - S) = b \neq a, \qquad \forall\, z \in E',$$

entonces

$$(z,\ T_n - S) = o\,[(z,\ S_n - S)] \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Demostración.– Efectuando algunas transformaciones elementales es inmediato que

$$\lim_n \frac{(x,\ t_i^{(n)} - S)}{(x,\ S_n - S)} = \lim_n \frac{(x,\ \Delta t_i^{(n)})}{(x,\ \Delta S_n)}\ ;$$

y teniendo en cuenta este resultado nos queda

$$\lim_n \frac{(z,\ T_n - S)}{(z,\ S_n - S)} = \lim_n \frac{(z,\ t_1^{(n)} - S)}{(z,\ S_n - S)} -$$

$$- \lim_n \frac{(x, \Delta t_1^{(n)}) \,/\, (x, \Delta S_n)}{\dfrac{(x, \Delta t_2^{(n)})}{(x, \Delta S_n)} - \dfrac{(x, \Delta t_1^{(n)})}{(x, \Delta S_n)}} \left(\frac{(z,\ t_2^{(n)} - S)}{(z,\ S_n - S)} - \frac{(z,\ t_1^{(n)} - S)}{(z,\ S_n - S)} \right) =$$

$$= a - \frac{a}{b - a}\,(b - a) = 0.$$

Con una condición complementaria la transformación compuesta vectorial acelera la convergencia de las transformaciones primarias. En el siguiente resultado damos la condición que debe cumplir t_1 para que esto ocurra.

Teorema 2.4.– Si

$$\lim_n t_1^{(n)} = \lim_n t_2^{(n)} = S,$$

si

$$\lim_n \,(z,\ t_2^{(n)} - S)\ /\ (z,\ t_1^{(n)} - S) = a \neq 1$$

y además

$$\exists\, \alpha < 1 < \beta \ \text{ y } \ n_0 \ /\ \forall\, n \geqslant n_0 :\ (z,\ t_1^{(n+1)} - S)\ /\ (z,\ t_1^{(n)} - S) \notin [\alpha, \beta]$$

entonces

$$(z,\ T_n - S) = o\,[(z,\ t_1^{(n)} - S)] \quad \text{cuando } n \to \infty \ \text{ y } \ \forall\, z \in E'.$$

Demostración.–

$$\lim_n \frac{(z,\ T_n - S)}{(z,\ t_1^{(n)} - S)} = \lim_n \frac{(z,\ t_1^{(n)} - S)}{(z,\ t_1^{(n)} - S)} -$$

$$- \lim_n \frac{1}{\dfrac{(x, \Delta t_2^{(n)})}{(x, \Delta t_1^{(n)})} - 1} \left(\frac{(z,\ t_2^{(n)} - S)}{(z,\ t_1^{(n)} - S)} - \frac{(z,\ t_1^{(n)} - S)}{(z,\ t_1^{(n)} - S)} \right) =$$

$$= 1 - \frac{a-1}{a-1} = 0$$

Si además $a \neq 0$ también se verifica que

$$(z,\ T_n - S) = o\,[(z,\ t_1^{(n)} - S)] \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

A continuación damos una condición suficiente para que $T_n = S$, $\forall\, n \geqslant n_0$ (núcleo de T) que es útil en la selección automática de algoritmos (Delahaye, 1981). La condición no es necesaria porque de $(x, y) = 0$ no se deduce que uno de los vectores x ó y sea el vector nulo. Se obtiene también sin dificultad que el núcleo de la transformación compuesta vectorial contiene a los núcleos de los algoritmos primarios t_1 y t_2.

Teorema 2.5.– Sea la sucesión de vectores (S_n) convergente al límite S. Supongamos $t_1^{(n)} \neq t_2^{(n)}$, $\forall\, n$. Una condición suficiente para que $T_n = S$, $\forall\, n \geqslant n_0$ es que $\exists\, \lambda_1, \lambda_2$ con $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ y $\exists\, n_0 \ /\ \forall\, n \geqslant n_0$ se verifique la relación

$$\lambda_1\, (t_1^{(n)} - S) + \lambda_2\, (t_2^{(n)} - S) = 0.$$

Demostración.– Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Tenemos pues el sistema siguiente

$$\begin{aligned} &\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ &\lambda_1 t_1^{(n)} + \lambda_2 t_2^{(n)} = S \\ &\lambda_1 t_1^{(n+1)} + \lambda_2 t_2^{(n+1)} = S \end{aligned}$$

restando a la tercera ecuación la segunda y efectuando el producto escalar con $x \in E'$ nos queda el sistema de la forma

$$\begin{aligned} &\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ &\lambda_1 t_1^{(n)} + \lambda_2 t_2^{(n)} = S \\ &\lambda_1 (x, \Delta t_1^{(n)}) + \lambda_2 (x, \Delta t_2^{(n)}) = 0 \end{aligned}$$

que tendrá solución no trivial si su determinante es nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1^{(n)} & t_2^{(n)} & S \\ (x, \Delta t_1^{(n)}) & (x, \Delta t_2^{(n)}) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

determinante que desarrollado nos dará $S = T_n$.

Estudiando otras propiedades de nuestra transformación es claro que, si los algoritmos primarios tienen sus análogos escalares, la transformación compuesta vectorial da iguales resultados que la aplicación de la correspondiente escalar a cada una de sus componentes, lo que podría resultar conveniente en algunos casos particulares si el número de éstas es pequeño.

No obstante, esta descomposición no es en general posible; e incluso cuando lo es, suele resultar ventajoso usar el algoritmo vectorial a efectos de implementación.

Teorema 2.6.— Dada la sucesión de vectores (S_n), supongamos que de las transformaciones vectoriales t_1, t_2 y T existen sus análogas de tipo escalar $\tilde{t}_1$, $\tilde{t}_2$ y $\tilde{T}$ representativamente. Aplicaremos estas transformaciones escalares a la sucesión numérica $((x, S_n))$. Si

$$\tilde{t}_i^{(n)} = (x, t_i^{(n)}), \qquad i = 1, 2, \ \forall\, n,$$

entonces se verifica

$$\tilde{T}_n = (x, T_n),$$

siendo x un vector arbitrario de E'.

Demostración.— Teniendo en cuenta que

$$(x, \Delta t_i^{(n)}) = \Delta \tilde{t}_i^{(n)}, \qquad i = 1, 2$$

la transformación compuesta escalar queda como sigue

$$\begin{aligned} \tilde{T}_n &= \tilde{t}_1^{(n)} - (\tilde{t}_2^{(n)} - \tilde{t}_1^{(n)})\, \Delta \tilde{t}_1^{(n)} / (\Delta \tilde{t}_2^{(n)} - \Delta \tilde{t}_1^{(n)}) = (x, t_1^{(n)}) - \\ &- [\,(x, t_2^{(n)}) - (x, t_1^{(n)})]\,(x, \Delta t_1^{(n)}) / [(x, \Delta t_2^{(n)}) - (x, \Delta t_1^{(n)})] = \\ &= (x, t_1^{(n)}) - (x, t_2^{(n)} - t_1^{(n)})\,(x, \Delta t_1^{(n)}) / [(x, \Delta t_2^{(n)}) - (x, \Delta t_1^{(n)})] = \\ &= (x, T_n). \end{aligned}$$

Podemos ver además, que aunque las transformaciones primarias sean lineales, la transformación compuesta, en general no lo es, como sigue inmediatamente de su expresión como cociente de determinantes. En cambio se verifica el siguiente resultado de cuasi-linealidad.

Teorema 2.7.– Sea a una constante no nula y b un vector cualquiera de E. Si t_1 y t_2 son cuasi-lineales, es decir

$$t_i\,(aS_n + b) = at_i\,(S_n) + \mathrm{b}, \qquad i = 1, 2,$$

entonces T también lo es.

Demostración.–

$$T\,(aS_n + b) =$$

$$= t_1\,(aS_n + b) - \frac{(x, \Delta t_1\,(aS_n + b))\,(t_2\,(aS_n + b) - t_1\,(aS_n + b))}{(x, \Delta t_2\,(aS_n + b)) - (x, \Delta t_1\,(aS_n + b))} =$$

$$= a\left\{t_1\,(S_n) - \frac{(x, \Delta t_1\,(S_n))}{(x, \Delta t_2\,(S_n)) - (x, \Delta t_1\,(S_n))}\,[t_2\,(S_n) - t_1\,(S_n)]\right\} + b =$$

$$= aT\,(S_n) + b$$

3. CASOS PARTICULARES MAS NOTABLES

Según sea la elección de las transformaciones primarias t_1 y t_2 encontramos que la transformación compuesta vectorial T, coincide con algunos algoritmos vectoriales ya conocidos.

A) Resulta ser el θ-algoritmo vectorial (Brezinski, 1978) si

$$t_1^{(n)} = \theta_{2k}^{(n+1)} \qquad \text{y} \qquad t_2^{(n)} = t_1^{(n)} + \alpha_k D_{2k+1}^{(n)}$$

siendo α_k una constante no nula y

$$D_{2k+1}^{(n)} = (\theta_{2k}^{(n+1)} - \theta_{2k}^{(n)}) \,/\, (\theta_{2k+1}^{(n+1)} - \theta_{2k+1}^{(n)},\ \theta_{2k}^{(n+1)} - \theta_{2k}^{(n)})$$

obteniendo entonces que

$$T_n = \theta_{2k+2}^{(n)}.$$

B) Coincide con el E-algoritmo si

$$t_1^{(n)} = E_{k-1}^{(n)} \qquad \text{y} \qquad t_2^{(n)} = t_1^{(n)} + \alpha_k g_{k-1,\,k}^{(n)},$$

con α_k constante no nula. Resultando así

$$T_n = E_k^{(n)}.$$

C) Se reduce al Δ^2 de Aitken vectorial (Germain-Bonne, 1978) cuando sustituimos el vector x por la sucesión $x_n = \Delta t_1^{(n)}$ y consideramos

$$t_1^{(n)} = S_n \qquad \text{y} \qquad t_2^{(n)} = S_{n+1}.$$

Resultando

$$T_n = S_n - \Delta S_n \, (\Delta S_n, \Delta S_n) \, / \, (\Delta S_n, \Delta^2 S_n).$$

4. APLICACIONES

Como ejemplo ilustrativo hemos comprobado la convergencia de nuestra transformación compuesta considerando la sucesión inicial de vectores $\{(U_n, V_n)\}$, siendo

$$U_n = U_{n-1} - 0.005 U_{n-1}^2 \qquad \text{y} \qquad V_n = V_{n-1} - 0.004 V_{n-1}^2,$$

cuyo límite es el vector nulo. Tomando como t_1 la primera iteración par del ε-algoritmo y como t_2 el segundo paso del θ-algoritmo, obtenemos en la iteración quinta

$$(U_5, V_5) = (0.91640987, \ 0.88113590)$$

mientras que a través de la transformación compuesta tenemos

$$T_5 = (0.11701 \cdot 10^{-2}, \ 0.15931 \cdot 10^{-2}).$$

Para evitar los errores de redondeo se han programado los algoritmos en doble precisión y en el caso de presentarse divisiones por cero son utilizables las reglas particulares de Cordellier (Brezinski, 1978).

Asimismo la programación de los algoritmos puede acompañarse de las correspondientes sucesiones de intervalos que acotan el error cometido en cada iteración. Esta técnica de control de errores ha sido expuesta en nuestro trabajo (Guerrero, 1985b).

5. TRANSFORMACION COMPUESTA VECTORIAL DE RANGO SUPERIOR

Haciendo una generalización análoga a la de Shanks respecto al Δ^2 de Aitken (véase Brezinski 1978, Guerrero 1980, 1985b, Wynn 1956), encontramos la transformación compuesta de rango superior.

Definición 5.1.– Sea la sucesión vectorial convergente (S_n) de límite S y las $k+1$ transformaciones $t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}$. Se define la transformación compuesta vectorial de rango $k+1$ como la aplicación en $E^{\mathbb{N}}$ que a cada sucesión (S_n) le hace corresponder

$$_iT_k\,(S_n) = {}_iT_k^{(n)},$$

siendo

$$_iT_0^{(n)} = t_i^{(n)}$$

y

$$_iT_k^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} t_i^{(n)} & \ldots & t_{i+k}^{(n)} \\ (x, \Delta t_i^{(n)}) & \ldots & (x, \Delta t_{i+k}^{(n)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (x, \Delta t_i^{(n+k-1)}) & \ldots & (x, \Delta t_{i+k}^{(n+k-1)}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ (x, \Delta t_i^{(n)}) & \ldots & (x, \Delta t_{i+k}^{(n)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (x, \Delta t_i^{(n+k-1)}) & \ldots & (x, \Delta t_{i+k}^{(n+k-1)}) \end{vmatrix}} \qquad \begin{array}{l} i = 0, 1, \ldots \\ k = 1, 2, \ldots \end{array}$$

siendo x un vector arbitrario de E'.

Si

$$t_i^{(n)} = S_{n+1}, \qquad \forall i \geqslant 0$$

tenemos que $_iT_k^{(n)}$ coincide con una generalización del ε-algoritmo topológico dada por Brezinski (1978).

También en este caso el E-algoritmo vectorial resulta ser un caso particular de $_iT_k^{(n)}$, haciendo i fijo y tomando

$$g_j\,(n) = t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}.$$

Tenemos pues

$$_iT_k^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} t_i^{(n)} & g_{i+1}\,(n) & \ldots & g_{i+k}\,(n) \\ (x, \Delta t_i^{(n)}) & (x, \Delta g_{i+1}\,(n)) & \ldots & (x, \Delta g_{i+k}\,(n)) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x, \Delta t_i^{(n+k-1)}) & (x, \Delta g_{i+1}\,(n+k-1)) & \ldots & (x, \Delta g_{i+k}\,(n+k-)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (x, \Delta g_{i+1}\,(n)) & \ldots & (x, \Delta g_{i+k}\,(n)) \\ (x, \Delta g_{i+1}\,(n+1)) & \ldots & (x, \Delta g_{i+k}\,(n+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (x, \Delta g_{i+1}\,(n+k-1)) & \ldots & (x, \Delta g_{i+k}\,(n+k-)) \end{vmatrix}}$$

siendo

$$E_0^{(n)} = t_i^{(n)} \qquad \text{y} \qquad g_{0,j}^{(n)} = g_{i+k}\,(n).$$

Se obtiene así que

$$_iT_k^{(n)} = E_k^{(n)}.$$

La transformación compuesta de rango superior verifica propiedades análogas a las dadas en los teoremas 2.1, 2.6 y 2.7 de la transformación compuesta de rango dos. Además podemos enunciar la siguiente propiedad acerca de su núcleo:

Teorema 5.1.— La condición suficiente para que $_iT_k^{(n)} = S, \quad \forall\, n \geqslant n_0$ es que $\exists\, \lambda_0, ..., \lambda_k$ con

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \neq 0$$

y que $\exists\, n_0 \,/\, \forall\, n \geqslant n_0$ se verifique la expresión

$$\lambda_0 \, (t_i^{(n)} - S) + ... + \lambda_k \, (t_{i+k}^{(n)} - S) = 0.$$

La demostración se hace de forma análoga a la del teorema 2.5.

Agradecimientos

Deseo expresar mi gratitud a D. Antonio de Castro Brzezicki por su estímulo, acertadas críticas y continuo apoyo en todos los trabajos que he realizado.

BIBLIOGRAFIA

[1] BREZINSKI, C. (1978): *Algorithmes d'accélération de la convergence.* Etude Numérique (París: Edition Technip).

[2] BREZINSKI, C. (1983): *Recursive interpolation, extrapolation and projection.* J. of Comp. and Applied Math. 9, 369-373.

[3] BREZINSKI, C. (1984a): *Composite sequence transformations.* Publication ANO 124. Université des Sciences et Techniques de Lille.

[4] BREZINSKI, C. (1984b): *Convergence acceleration methods: The past decade.* Publication ANO 126. Université des Sciences et Techniques de Lille.

[5] DELAHAYE, J. P. (1981): *Automatic selection of sequence transformation.* Math. Comp. 37, 193-204.

[6] GERMAIN-BONNE, B. (1978): *Estimation de la limite de suites et formalisation de procedés d'accélération de la convergence.* Thése d'Etat. Université de Lille.

[7] GUERRERO, F. M. (1980): *El ε-algoritmo.* Memoria de Licenciatura. Universidad de Sevilla.

[8] GUERRERO, F. M. (1985a): *Transformación compuesta escalar.* VII Congresso do Grupo de Matemáticos de Espressão Latina. Coimbra.

[9] GUERRERO, F. M. (1985b): *Sobre los algoritmos de aceleración de la convergencia.* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

[10] WIMP, J. (1981): *Sequence transformations and their applications.* (New York: Academic Press).

[11] WYNN, P. (1956): *On a device for computing the* e_m (S_n) *transformation. M.T.A.C. 10, 91-96.*

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla