Operadores débilmente compactos e incondicionalmente convergentes en espacios de funciones continuas con valores vectoriales*

Por Carmen Fierro Bello

Recibido: 4 junio 1986

Presentado por el académico numerario D. Baltasar Rodríguez-Salinas

Abstract

This paper studies weakly compact and unconditionally converging operators defined on the space $C(X, E)$ of the continuous, E-valued functions on the compact space X, in connection with some properties of the Banach space E.

1. INTRODUCCION

Es bien conocido que, dados un espacio compacto y Hausdorff X y un espacio de Banach E, el dual de $C(X, E)$ se puede identificar con el espacio cabv $(X, E') =$ cabv $(\beta_a(X), E')$ de las medidas de Baire en X, numerablemente aditivas y de variación acotada, que toman valores en el dual E' de E. El cual es un espacio de Banach para la norma de la variación total: $\|\mu\| = |\mu|(X)$, donde, $|\mu|$ indica la variación de una medida $\mu \in$ cabv (X, E').

También es conocido que todo operador lineal y continuo T de $C(X, E)$ en un segundo espacio de Banach F define una medida finitamente aditiva:

$$m_T\colon\ \beta_a(X) \to L(E, F''),$$

siendo $L(E, F)$ el espacio de las funciones lineales y continuas de E en F, y F'' el bidual de F. La semivariación de m_T, $|m_T|$, está acotada, y

$$T(f) = \int_X f\, dm_T$$

* Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por la ayuda número 0338/84 de la CAICYT.

para toda $f \in C(X, E)$: ver [1] para la construcción y otras propiedades. m_T se denomina generalmente la "medida asociada" al operador T.

Cuando E es el cuerpo escalar, diferentes tipos de tales operadores lineales y continuos han sido caracterizados en términos de sus medidas asociadas, y se han hecho diferentes intentos por extender tales caracterizaciones al caso vectorial: ver por ejemplo, [1], [4], [6] y [14].

En el presente artículo estudiaremos dos de tales intentos, es decir, los realizados para T débilmente compacto o incondicionalmente convergente.

En el caso escalar, un teorema clásico (ver [5, VI.2.5]) caracteriza los operadores débilmente compactos como aquéllos cuya medida asociada toma valores en F, en vez de en su bidual, y es numerablemente aditiva. Dicho resultado ha sido extendido al caso vectorial por Batt y Berg del modo siguiente:

Teorema 1.— [1] Sean: T: $C(X, E) \to F$ un operador lineal y continuo, y m_T su medida asociada. Si T es débilmente compacto, m_T verifica:

(A)

i) m_T toma sus valores en $L(E, F)$.
ii) m_T tiene una media de control λ (es decir, λ es una medida de Baire en X, finita y positiva, respecto de la cual $|m_T|$ es absolutamente continua).
iii) $m_T(A)$ es un operador débilmente compacto de E en F, para cada subconjunto de Baire A de X.

Si tanto E' como E'' tienen la propiedad de Radon-Nikodym (P.R.N.), la condición (A) sobre m_T es también suficiente para asegurar la compacidad débil del operador T.

En forma parecida, Dobrakov planteó en [6] el problema de caracterizar a través de sus medidas asociadas los operadores incondicionalmente convergentes, es decir, aquellos que transforman series débilmente incondicionalmente de Cauchy en $C(X, E)$ en series incondiconalmente convergentes en norma. Su resultado se puede enunciar del modo siguiente:

Teorema 2.— Sean T: $C(X, E) \to F$ un operador lineal y continuo, y m_T su medida asociada. Si T es incondicionalmente convergente, m_T verifica:

(B)

i) m_T toma sus valores en $L(E, F)$.
ii) m_T tiene una medida de control.
iii) $m_T(A)$ es un operador incondicionalmente convergente de E en F, para cada subconjunto de Baire A de X.

Ambos resultados anteriores plantean el problema de cuándo las condiciones (A) y (B) caracterizan los operadores débilmente compactos o incondicionalmente convergentes para una categoría suficientemente amplia de espacios E. En el artículo indicado [1], Batt y Berg dan un contraejemplo en el que se muestra que la condición (A) no es, en general, suficiente para todos los espacios de Banach E, pero queda abierto el problema de si las hipótesis de que tanto E' como E'' tengan la P.R.N. pueden ser debilitadas. Por otro lado, en [14], C. Swartz pareció contestar en sentido afirmativo el problema análogo respecto de la condicón (B), afirmando que el recíproco del teorema 2 es siempre cierto. Pero, tal y como veremos más adelante, ello no se verifica en general: hay una familia suficientemente amplia de espacios E para los cuales falla el recíproco del resultado de Dobrokov. Y, de hecho, la suficiencia de la condición (B) para asegurar la convergencia incondicional de los operadores parece estar relacionada con que el espacio E no contenga copias de C_0.

Análogamente, demostraremos que la suficiencia de la condición (A) para asegurar la compacidad débil de los operadores está enteramente ligada a que tanto E' como E'' tengan la P.R.N.

Puesto que el estudio de los operadores débilmente compactos en $C(X, E)$ está estrechamente relacionado con los subconjuntos débilmente relativamente compactos de su dual cabv (X, E'), comenzaremos con un resultado sobre compacidad débil en un espacio cabv (Σ, E) de medidas numerablemente aditivas y de variación acotada con valores en un espacio de Banach E. La carcterización de tales subconjuntos constituye todavía un problema abierto, pese a los muchos intentos que se han hecho por resolverlo. Uno de los primeros, que proporciona una respuesta parcial muy relacionada con el teorema 1 se debe a Brooks y Lewis, y establece que:

Teorema 3.– Dados una σ-álgebra Σ y un espacio de Banach E, un subconjunto débilmente relativamente compacto K de cabv (Σ, E) verifica:

(C)

i) K está acotado en norma.

ii) K tiene una medida de control λ (es decir, λ es una medida finita y positiva en Σ, tal que: $\lim\limits_{\lambda(A)\to 0} |\mu|(A) = 0$ uniformemente en $\mu \in K$).

iii) $K(A) = \{\mu(A) \,/\, \mu \in K\}$ es débilmente relativamente compacto en E, para todo $A \in \Sigma$.

Si tanto E como E' tienen la P.R.N., la condicón (C) es también suficiente.

En la sección II veremos que la hipótesis de que tanto E como E' tengan la P.R.N. es necesaria para que sea cierto el recíproco del teorema 3. Y, como consecuencia, obtendremos la necesidad de que tanto E' como E'' tengan la P.R.N. para que (A) caracterice los operadores débilmente compactos en $C(X, E)$.

En la Sección III se muestra que la condición (B) no es suficiente en general para garantizar que un operador es incondicionalmente convergente, y se dan algunas condiciones sobre el espacio E que garantizan su suficiencia.

Por último, en la Sección IV se da un resultado positivo sobre compacidad débil de operadores que tomen sus valores en un espacio de Banach débilmente completo.

2. COMPACIDAD DEBIL Y LA P.R.N.

Utilizaremos el siguiente resultado, que caracteriza los espacios que tienen, junto con sus duales, la P.R.N., a través de los subconjuntos débilmente compactos de espacios de funciones integrables-Bochner:

Teorema 4.– [7] Sea λ una medida finita y positiva, $1 \leqslant p < +\infty$. Entonces, son equivalente:

a) Tanto E como E' tienen la P.R.N. respecto de λ.
b) Un subconjunto K de $L^p(\lambda, E)$ es débilmente relativamente compacto si y sólo sí verifica:

i) K está acotado en norma.
ii) K es uniformemente λ- integrable (sólo par $p = 1$).
(D) iii) $K(A) = \left\{ \int_A f\, d\lambda \,/\, f \in K \right\}$ es un subconjunto débilmente relativamente compacto de E, para cada conjunto λ-medible A.

Del teorema 4 se obtiene:

Teorema 5.– Dada una σ-álgebra Σ, son equivalentes:

a) Tanto E como E' tienen la P.R.N. respecto de toda medida numerable aditiva, finita y positiva en Σ.
b) La condición (C) caracteriza los subconjuntos débilmente relativamente compactos de cabv (Σ, E).

Demostración.– El que a) implica b) es un resultado conocido, como quedó indicado en el teorema 3. Para la implicación inversa: si E ó E' carece de la P.R.N. respecto de alguna medida numerablemente aditiva, finita y positiva, λ, definida en Σ, por el teorema 4 existe un subconjunto K_0 de $L^1(\lambda, E)$ que verifica (D) y no es débilmente relativamente compacto.

La aplicación lineal y continua:

$$\theta: L^1(\lambda, E) \to \text{cabv}(\Sigma, E)$$
$$f \to \mu_f$$

donde

$$\mu_f(A) = \int_A f\, d\lambda,$$

para todo $A \in \Sigma$, es una isometría sobre la imagen, que permite identificar $L^1(\lambda, E)$ con un subespacio cerrado de cabv (Σ, E). Sea $K = \theta(K_0)$:

trivialmente, K verifica (C) y no puede ser débilmente relativamente compacto.

Del teorema 5 se obtiene fácilmente el siguiente:

Lema 6.– Si E' ó E'' carecen de la P.R.N. respecto de alguna medida de Baire finita y positiva λ en el espacio compacto y Hausdorff X, existe un subconjunto K de cabv $(X, E') = C(X, E)'$ tal que:

i) K es absolutamente convexo y débil*-cerrado en $C(X, E)'$.
ii) K verifica (C).
iii) K no es débilmente relativamente compacto.

Demostración.– Sea K_0 el subconjunto de cabv (X, E) cuya existencia, en las hipótesis del enunciado, queda asegurada por el teorema 5: K_0 verifica ii) e iii), y por lo tanto, lo mismo es cierto de su envoltura absolutamente convexa, $\Gamma(K_0)$. Sea K la adherencia de $\Gamma(K_0)$ en la topología débil* de cabv (X, E). Trivialmente, K es absolutamente convexo, débil*-cerrado, y no es débilmente relativamente compacto: queda únicamente por probar que K verifica (C). Pero:

i-C) K está acotado en norma, por el Principio de Acotación uniforme, al ser la adherencia débil* de un conjunto acotado.

ii-C) Sea λ la medida de control para K_0, y por lo tanto también para $\Gamma(K_0)$, que existe por hipótesis. Fijado $\varepsilon > 0$, existe $\partial_\varepsilon > 0$ tal que, si $\lambda(A) < \partial_\varepsilon$, $|\mu|(A) \leqslant \varepsilon$ para cada $\mu \in \Gamma(K_0)$. Si $\mu \in K$, existe una red $(\mu_i)_{i \in I}$ en $\Gamma(K_0)$ que converge a μ sobre todas las funciones $f \in C(X, E)$. Pero, puesto que las medidas en cuestión son medidas de Baire, y por lo tanto regulares, para cada $\mu \in$ cabv (X, E') tenemos:

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ \left| \int_A f \, d\mu \right| \right\},$$

donde el supremo se toma sobre todas las $f \in C(X, E)$ tales que $\|f\|_\infty \leqslant 1$.

De ello se sigue fácilmente que $|\mu|(A) \leqslant \varepsilon$: y λ es una medida de control para K.

iii-C) Fijado un subconjunto de Baire A de X, el conjunto: $\Gamma(K_0)(A) = \{\mu(A) \,/\, \mu \in \Gamma(K_0)\}$ es absolutamente convexo y débilmente relativamente compacto: luego, por el Teorema de Krein, su adherencia $\overline{\Gamma(K_0)(A)}$ es débilmente compacta. Sólo queda probar que $K(A)$ está contenido en $\overline{\Gamma(K_0)(A)}$. Pero, de no ser así, por ser $\overline{\Gamma(K_0)(A)}$ cerrado y convexo en la topología débil*, podríamos encontrar un x en E y un μ en K tales que:

$$|\langle x, \mu(A)\rangle| = |\mu(A)(x)| > 1 \qquad \text{y} \qquad |\langle x, x'\rangle| < 1$$

para cada x' en $\overline{\Gamma(K_0)(A)}$.

Como antes, para tal μ existe una red $(\mu_i)_{i \in I}$ en $\Gamma(K_0)$ débil*-convergente a μ: utilizando ii-C) y la regularidad de las medidas implicadas, se obtiene que:

$$\mu(A)(x) = \lim_I \mu_i(A)(x),$$

y por lo tanto

$$|\mu(A)(x)| \leqslant 1.$$

En conclusión, $K(A)$ está contenido en $\overline{\Gamma(K_0)(A)}$, luego es débilmente relativamente compacto.

Por lo tanto, K verifica (C), y es el conjunto buscado.

Teorema 7.— Si E' ó E'' carecen de la P.R.N. respecto de alguna medida de Baire finita y positiva en X, existen un espacio de Banach F y un operador lineal y continuo T: $C(X, E) \to F$ tal que su medida asociada m_T verifica (A), pero T no es débilmente compacto.

Demostración.— Bajo las hipótesis del enunciado, sea K el conjunto cuya existencia queda asegurada por el lema 6. Tomando polares respecto del par dual $\langle C(X, E), \text{cabv}(X, E')\rangle$, $V = K^0$ es un entorno de 0 en $C(X, E)$, y $V^0 = K^{00} = K$, por ser K absolutamente convexo y débil*-cerrado. Consideremos entonces, como en [13, III.6.§7], los espacios $C(X, E)_V$ y $\text{cabv}(X, E')_K$. $\text{cabv}(X, E')_K$ es un espacio de Banach, cuya bola unidad coincide con K; asimismo es un espacio de Banach la compleción, F, de $\text{cabv}(X, E')_V$, y se tienen las aplicaciones canónicas:

$$\begin{array}{lll} \phi_V: & C(X, E) \to C(X, E)_V & \text{proyección canónica} \\ \psi_K: & \text{cabv}(X, E')_K \to \text{cabv}(X, E') & \text{inclusión canónica} \end{array}$$

que son lineales y continuas.

Además, se obtienen fácilmente las identificaciones:

$$F' = [C(X, E)_V]' = [C(X, E')]_{V^0} = \text{cabv}(X, E')_K,$$

bajo las cuales ψ_K es la aplicación adjunta de ϕ_V. Sea, pues:

$$T = \phi_V: \ C(X, E) \to F.$$

T es un operador lineal y continuo, cuyo adjunto es $T' = \psi_K$. Puesto que K es la bola unidad de $F' = \text{cabv}(X, E')_K$, y $T'(K) = \psi_K(K) = K$, que no es, por construcción, débilmente relativamente compacto, hemos de concluir que T' no puede ser un operador débilmente compacto. Luego tampoco T puede serlo, como se deduce del Teorema de Gantmacher.

Veamos a continuación que la medida asociada a T, m_T, verifica la condición (A). m_T se define canónicamente (ver [1]) según:

$m_T(A) = T''(x\chi_A)$ para cada subconjunto de Baire, A, de X, y cada $x \in E$, siendo χ_A la función característica de A.

Entonces, se tiene:

i-A) $m_T(A)(x) = T''(x\chi_A)$ pertenece a F para cada $x \in E$ y cada subconjunto de Baire, A, de X. Pues, fijados A y x, sea λ la medida de control de K, que existe por hipótesis. Dado cualquier natural n, podemos encontrar un $\partial_n > 0$ tal que, si $\lambda(B) < \partial_n$,

$$|\mu|(B) \leqslant \frac{1}{2n(\|x\| + 1)},$$

para toda $\mu \in K$.
Al ser λ una medida de Baire, existen un subconjunto compacto, K_n, y uno abierto, G_n, de X, tales que $K_n \subset A \subset G_n$ y $\lambda(G_n \backslash K_n) < \partial_n$. Y, por la compacidad de X, existe una aplicación continua: $\phi_n : X \to [0, 1]$ tal que $\phi_n(K_n) = \{1\}$ y $\phi_n(X \backslash G_n) = \{0\}$. Sea $f_n = x\phi_n$: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X, E)$, y un sencillo cálculo prueba que

$$T''(x\chi_A) = \lim_n \mathrm{T}(f_n).$$

Y como F es un espacio de Banach, $m(A)(x) = T''(x\chi_A)$ pertenece a F.

ii-A) La medida de control, λ, para K, es también medida de control para m_T, pues para cada subconjunto de Baire A de X tenemos:

$$|m_T|(A) = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} m_T(A_i)(x_i) \right\| \right\},$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones finitas $\{A_1, ..., A_n\}$ de A en subconjuntos de Baire, y todos los subconjuntos finitos $\{x_1, ..., x_n\}$ de la bola unidad de E.
Dados tales $\{A_1, ..., A_n\}$ y $\{x_1, ..., x_n\}$, tenemos:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} m_T(A_i)(x_i) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} T''(x_i \chi_{A_i}) \right\| =$$

$$= \sup \left\{ \left| \left\langle T'' \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i} \right), \mu \right\rangle \right| / \mu \in K \right\} =$$

$$= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(x_i) \right| / \mu \in K \right\} \leqslant \sup \{ |\mu|(A) / \mu \in K \}$$

iii-A) Dado un subconjunto de Baire A de X, $m_T(A)$: $E \to F$ es un operador débilmente compacto, pues como se comprueba fácilmente, su adjunto $m_T(A)'$ aplica cada μ de $F' = \text{cabv}(X, E')_K$ en $\mu(A)$. Así, $m_T(A)'(K) = K(A)$, que por la elección de K es débilmente relativamente compacto en E.
Y el Teorema queda probado.

Puesto que un espacio de Banach E tiene la P.R.N. general si y sólo si la tiene respecto de la medida de Lebesgue en el intervalo [0, 1] (ver [5, V.3.8]), podemos concluir de los teoremas 1 y 7:

Corolario 8.– Sean *E un espacio de Banach y X* el intervalo [0, 1]. Son equivalentes:

a) Tanto E' como E'' tienen la P.R.N.
b) Para cada espacio de Banach F, la condición (A) caracteriza los operadores lineales y continuos T: $C(X, E) \to F$ que son débilmente compactos.

3. OPERADORES INCONDICIONALMENTE CONVERGENTES

Comenzaremos recordando algunos resultados conocidos a los que nos referimos más adelante.

A. Pelczynski, en [12], da la siguiente definición:

"Un espacio de Banach E tiene la propiedad (V) si todo operador incondicionalmente convergente de E en cualquier otro espacio de Banach es débilmente compacto."

Y, puesto que del Teorema de Orclicz-Pettis se sigue que todo operador débilmente compacto entre dos espacios de Banach es incondicionalmente convergente (ver [10, 3.2.1]), en los espacios que tienen la propiedad (V) las dos clases de operadores coinciden.

Así, del teorema 7 obtenemos las siguientes consecuencias:

Proposición 9.– Si el espacio $C(X, E)$ tiene la propiedad (V), son equivalentes:

a) Tanto E' como E'' tienen la P.R.N. respecto de cada medida finita, positiva y numerablemente aditiva en X.
b) Los operadores incondicionalmente convergentes en $C(X, E)$ quedan caracterizados por la condición (B).

Demostración.– La demostración se basa en que, si $C(X, E)$ tiene la propiedad (V), también E debe tenerla.

En el artículo anteriormente indicado, Pelczynski prueba que el espacio $C(X)$ tiene la propiedad (V) para todo X compacto y Hausdorff. Sean entonces dos compactos Hausdorff X e Y: el espacio $C(X, C(Y))$ es isomorfo a $C(X \times Y)$, luego tiene la propiedad (V). Y como, siendo $E = C(Y)$, tanto E' como E'' tienen la P.R.N. si y sólo si Y es finito [5, VII.7], podemos concluir que el recíproco del resultado de Dobrakov (teorema 2) no es cierto para una amplia familia de espacios E, que incluye todos los $C(Y)$ para Y compacto, Hausdorff e infinito. De hecho, probaremos un resultado aún más fuerte sobre este tipo de operadores:

Teorema 10.– Sean E espacio de Banach y X compacto, Hausdorff e infinito. Entonces:

a) Si E no contiene copias de C_0, los operadores incondicionalmente convergentes en $C(X, E)$ son caracterizados por (B).
b) Si E es separable, la condición de no contener copias de C_0 es también necesaria.

Demostración.–

a) Sea T un operador lineal y continuo de $C(X, E)$ en un espacio de Banach F, cuya medida asociada m_T verifique (B). Dada una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(X, E)$ tal que la serie Σf_n sea débilmente incondicionalmente de Cauchy, tenemos:

Fijado $t \in X$, para cada $x' \in E'$ la aplicación $\partial_{tx'}$ definida por: $\partial_{tx'}(f) = \langle f(t), x' \rangle$ para cada $f \in C(X, E)$, pertenece al dual $C(X, E)'$, luego $\Sigma f_n(t)$ es una serie débilmente incondicionalmente de Cauchy en E. Puesto que E no contiene copias de C_0, por el Teorema de Bessaga-Pelczynski [2], $\Sigma f_n(t)$ es incondicionalmente convergente en norma a algún $h(t) \in E$.

Así, tenemos definida una función h: $X \to E$ tal que:

i) h es totalmente medible, siendo límite puntual de una sucesión de funciones continuas y, por lo tanto, totalmente medibles.
ii) h es acotada, pues, por el Principio de Acotación Uniforme, al ser f débilmente incondicionalmente de Cauchy, existe $M > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{n \in N} f_n \right\| \leqslant M$$

para cada N conjunto finito de naturales. Luego $\|h\| \leqslant M$.
iii) Por i) e ii), h pertenece al bidual de $C(X, E)$, y actúa sobre cada $\mu \in C(X, E)' = \text{cabv}(X, E')$ según:

$$\langle h, \mu \rangle = \int_X h \, d\mu.$$

iv) Siendo λ la medida de control para $|m_T|$, cuya existencia queda garantizada por (B-ii), $h \in L^1(\lambda, E)$, luego es m_T-integrable.

Y como m_T toma sus valores en $L(E, F)$ por (B-i),

$$\int_X f\, dm_T$$

pertenece a F, y

$$T''(h) = \int_X h\, dm_T,$$

pues para cada $y' \in F'$:

$$\langle \int_X h\, dm_T,\ y' \rangle = \int_X h\, d\langle m_T, y' \rangle =$$

$$= \langle h, \langle m_T, y' \rangle \rangle = \langle h, T'(y') \rangle = \langle T''(h),\ y' \rangle,$$

ya que $T'(y') = \langle m_T, y' \rangle$ pertenece a $C(X, E)' = \text{cabv}(X, E')$.

v) La serie $\Sigma\, T(f_n)$ converge incondicionalmente a $T''(h)$ en la norma de F. En efecto, dados $\varepsilon > 0$ y σ aplicación de los naturales sobre sí mismos, tenemos:
Por ser $|m_T|$ absolutamente continua respecto de λ, existe $\partial_\varepsilon > 0$ tal que

$$|m_T|(A) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

para $A \in \beta_a(X)$ y $\lambda(A) < \partial_\varepsilon$, siendo M como en ii).
Para cada $t \in X$, $h(t) = \Sigma f_{\sigma(n)}(t)$, luego por el Teorema de Egoroff existen un subconjunto de Baire X_ε de X tal que $\lambda(X \backslash X_\varepsilon) < \partial_\varepsilon$ y un natural N_ε, tales que:

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} f_{\sigma(n)}(t) - h(t) \right\| < \frac{\varepsilon}{2\,|m_T|(X)}$$

para cada $t \in X_\varepsilon$, $N \geqslant N_\varepsilon$.
Así, como

$$\left\| \int_A g\, dm_T \right\| \leqslant \|\chi_A g\|_\infty\, |m_T|(A)$$

para cada $g \in L^\infty(\lambda, E)$, $A \in \beta_a(X)$, se tiene, para $N \geqslant N_\varepsilon$:

$$\left\| \int_X h\, dm_T - \sum_{n=1}^{N} \int_X f_{\sigma(n)}\, dm_T \right\| =$$

$$= \left\| \int_X \left(h - \sum_{n=1}^{N} f_{\sigma(n)} \right) dm_T \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \chi_{X_\varepsilon} \left(h - \sum_{n=1}^{N} f_{\sigma(n)} \right) \right\|_\infty |m_T| (X_\varepsilon) +$$

$$+ \left\| \chi_{X \setminus X_\varepsilon} \left(h - \sum_{n=1}^{N} f_{\sigma(n)} \right) \right\|_\infty |m_T| (X \setminus X_\varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2 \, |m_T| \, (X)} \, |m_T| \, (X) + 2M \, \frac{\varepsilon}{4M} \leqslant \varepsilon .$$

En conclusión,

$$\Sigma \int_X f_n \, dm_T$$

es conmutativa, y por lo tanto incondicionalmente convergente a

$$\int_X h \, dm_T :$$

luego T es incondicionalmente convergente.

b) Si un espacio de Banach separable E contiene una copia de c_0, ésta está complementada en E [11], luego $C(X, C_0)$ es un subespacio complementado de $C(X, E)$. Siendo p: $C(X, E) \to C(X, C_0)$ la proyección canónica, todo operador lineal y continuo T_0 de $C(X, C_0)$ en un espacio de Banach F se puede extender a todo $C(X, E)$ como $T = T_0 \circ p$. Pero C_0 se identifica con $C(\mathbb{N}^*)$, siendo $\mathbb{N}^*$ la compactificación de Alexandroff de los naturales $\mathbb{N}$, luego, por la proposición 9, podemos encontrar un espacio de Banach F y un operador lineal y continuo T_0 de $C(X, C_0)$ en F que verifica (B) y no es incondicionalmente convergente. Entonces, $T = T_0 \circ p$ verifica (B) y no es incondicionalmente convergente.

4. OPERADORES DEBILMENTE COMPACTOS: UN CASO PARTICULAR

A. Grothendieck probó en [9] que, cuando F es un espacio de Banach débilmente completo, todo operador lineal y continuo de $C(X)$ en F ha de ser débilmente compacto. Más tarde, A. Pelczynski [11] debilitó la anterior hipótesis sobre F a la condición de que no contuviese copias de C_0, y demostró después [12] que el mismo resultado es cierto para $C(X, E)$, cuando E es un espacio de Banach reflexivo.

Aunque no se conocen las condiciones más débiles sobre E para las que el Teorema de Pelczynski sigue siendo cierto, J. Gamlen demostró en [8] que, cuando el dual E' de E tiene la P.R.N. (es decir, cuando los subespacios separables de E tienen duales separables), el Teorema de Grothendieck se verifica para $C(X, E)$. Un resultado reciente de J. Bourgain [3], según el cual toda sucesión equi-integrable en $L^1(\lambda, E)$ posee una subsucesión débilmente de Cauchy cuando λ es una medida regular y acotada y E un espacio de Banach que no contiene copias de ℓ^1, nos permitirá mejorar el resultado de Gamlen.

Lema 11.— Sean λ una medida de Baire, positiva, finita y numerablemente aditiva en un compacto Hausdorff X, y $\mathrm{cabv}_\lambda(X, E')$ el subespacio de $\mathrm{cabv}(X, E')$ formado por todas las medidas absolutamente λ-continuas. Entonces, siendo $\theta_\lambda: C(X, E) \to L^1(\lambda, E)$ la inclusión canónica, y $\theta'_\lambda: L^1(\lambda, E)' \to \mathrm{cabv}(X, E')$ su adjunta, $\theta'_\lambda(L^1(\lambda, E)')$ es un subespacio denso de $\mathrm{cabv}_\lambda(X, E')$.

Demostración.— Es fácil comprobar que θ'_λ aplica el dual $L^1(\lambda, E)'$ de $L^1(\lambda, E)$ en $\mathrm{cabv}_\lambda(X, E')$. Por otro lado, si $\mu \in \mathrm{cabv}_\lambda(X, E')$, por el Teorema de Radón-Nykodim existe una función positiva y λ-integrable g_μ tal que

$$|\mu|(A) = \int_A g_\mu \, d\lambda$$

para cada subconjunto de Baire A de X. Dado un natural n, $X_n = \{t \in X \,/\, g_\mu(t) \leqslant n\}$ es un subconjunto de Baire de X, y podemos definir la medida:

$$\begin{aligned} \mu_n:\ \beta_a(X) &\to E' \\ A &\to \mu(A \cap X_n) \end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que la sucesión $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pertenece a $\theta'_\lambda(L^1(\lambda, E)')$ y converge a μ en la norma de $\mathrm{cabv}(X, E')$.

Teorema 12.— Si E no contiene copias de ℓ^1, todo operador lineal y continuo de $C(X, E)$ en un espacio de Banach débilmente secuencialmente completo es débilmente compacto.

Demostración.— Dado el operador $T: C(X, E) \to F$, con F débilmente secuencialmente completo, su medida asociada m_T toma sus valores en $L(E, F)$ y tiene una medida de control λ (ver [1]). Entonces, para cada y' de F', la medida $\langle m_T, y' \rangle = T'(y')$ pertenece a $\mathrm{cabv}_\lambda(X, E')$.

Sea θ_λ como en el lema 11. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $C(X, E)$, $(\theta_\lambda(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ será una sucesión equi-integrable en $L^1(\lambda, E)$.

Como λ es una medida regular y acotada, y por hipótesis E no contiene copias de ℓ^1, por el resultado de Bourgain existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $(\theta_\lambda (f_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ es débilmente de Cauchy en $L^1 (\lambda, E)$. Por el lema 11, $\theta'_\lambda (L^1 (\lambda, E)')$ es denso en $\mathrm{cabv}_\lambda (X, E')$, luego

$$\left(\int_X f_{n_k}\, d\mu\right)_{k \in \mathbb{N}}$$

es una sucesión de Cauchy para cada medida μ perteneciente a $\mathrm{cabv}_\lambda (X, E')$.

Por lo tanto, el operador T transforma la sucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, que es débilmente de Cauchy, en una sucesión débilmente de Cauchy y por lo tanto débilmente convergente en el espacio débilmente secuencialmente completo F. Así, por el Teorema de Eberlein podemos asegurar que T transforma subconjuntos acotados de $C (X, E)$ en subconjuntos débilmente relativamente compactos de F: luego T es débilmente compacto.

Observación.— En el teorema 12 extendemos el Teorema de Grothendieck al caso vectorial mediante una hipótesis sobre el espacio E que es suficiente pero en absoluto necesaria, como se muestra en el siguiente ejemplo: Sea $E = C (Y)$, con Y compacto y Hausdorff. La isometría entre $C (X, C (Y))$ y $C (X \times Y)$ nos permite aplicar el resultado de Grothendieck para demostrar que todo operador lineal y continuo del primer espacio en uno débilmente secuencialmente completo ha de ser débilmente compacto. Pero $C (Y)$ puede contener copias de ℓ^1, y de hecho las contiene cuando Y es, por ejemplo, un intervalo real cerrado que no se reduzca a un punto.

Por el contrario, la hipótesis hecha en el teorema 10-a) para el recíproco del Teorema de Dobrakov parece ser esencial, aunque el procedimiento utilizado en la parte b) para demostrar su necesidad sea válido únicamente para espacios separables.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. BATT and J. BERG: *Linear bounded transformations on the space of continuous functions.* J. Funct. Analysis 4 (1969), 215-239.

[2] C. BESSAGA and A. PELCZYNSKI: *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces.* Studia Math. XVII (1958), 151-164.

[3] J. BOURGAIN: *An averaging result for ℓ^1 sequences and application to weakly conditionally compact sets in L^1_X.* Israel J. Math 32 (1979) 289-298.

[4] J. BROOKS and P. W. LEWIS: *Linear operators and vector measures.* Trans. Am. Math. Soc. 192 (1974), 139-162.

[5] J. DIESTEL and J. J. UHL Jr.: "Vector Measures". *American Mathematical Society.* Providence, R.I., 1977.

[6] I. DOBRAKOV: *On representation of linear operators on $C_0 (T, X)$.* Czech. Math. J. (96) 21 (1971), 13-30.

[7] C. FIERRO: *Compacidad débil en espacios de funciones integrables Bochner, y la propiedad de Randín-Nykodim.* Por aparecer.

[8] J. L. B. GAMLEN: *On a theorem of A. Pelczynski.* Proc. Am. Math. Soc. 44 (1974), 283-285.

[9] A. GROTHENDIECK: *Sur les applications linéaires fiablement compactes d'espaces du type $C(K)$.* Can. J. Math. 4 (1953), 129-173.

[10] E. HILLE and R. PHILIPS: "Functional Analysis and Semi-groups". *American Mathematical Society.* Providence, R.I., 1957.

[11] A. PELCZYNSKI: *Projections in certain Banach spaces.* Studia Math., XIX (1960), 209-228.

[12] A. PELCZYNSKI: *Banach spaces on which every unconditionally converging operator is weakly compact.* Bull. Acad. Polon. Sci. 10 (1962), 641-648.

[13] H. SCHAEFER: "Topological Vector Spaces". *Macmillan Co.* New york, 1966.

[14] C. SWARTZ: *Unconditionally converging and Dunford-Pettis operators on $C_X(S)$.* Studia Math., 47 (1974), 139-162.

Carmen Fierro Bello
Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid