El espacio $L^1(\mu,E)$

Por Alfonsa Garcia Lopez

Recibido: 27 abril 1986

Presentado por el académico numerario D. Baltasar Rodríguez-Salinas.

Abstract

In this paper we characterize the precompact and the weakly relatively compact sets in the space $L^1(\mu, E)$ of all absolutely μ-integrable functions with values in the locally convex space E.

Resumen

En este trabajo se estudia el espacio $L^1(\mu, E)$ de las funciones absolutamente μ-integrables con valores en el espacio localmente convexo E, dándose caracterizaciones para los subconjuntos precompactos y débilmente relativamente compactos.

1. DEFINICION DEL ESPACIO LOCALMENTE CONVEXO $L^1(\mu, E)$

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finito y completo, y sea E un espacio localmente convexo Hausdorff (e.l.c.). Empezaremos viendo la definición del espacio $\mathcal{L}^1(\mu, E)$ dada por Rodríguez-Salinas en [9].

Definición 1.— Una función $f\colon\ \Omega \to E$ se dice μ-medible si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $K\varepsilon \in \Sigma$ tal que $\mu(\Omega \backslash K\varepsilon) < \varepsilon$ y $f\chi_{K_\varepsilon}$ es límite uniforme de una red de funciones simples ordinarias.

Se dice que f es μ-integrable, y se escribe $f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E)$ si es μ-medible e integrable Pettis, es decir:

a) Para cada x' del dual E' de E la función $\langle f(.), x'\rangle = x' \circ f$ es integrable.

b) Para cada $A \in \Sigma$ existe $m_f(A) \in E$ tal que para todo $x' \in E'$ es

$$\langle m_f(A), x'\rangle = \int_A \langle f(.), x'\rangle \, d\mu$$

Se define en este caso la integral de f sobre A por

$$\int_A f\, d\mu = m_f(A)$$

Se dirá que f es absolutamente μ-integrable, y se escribirá $f \in \mathcal{L}^1(\Sigma, \mu, E)$, ó $\mathcal{L}^1(\mu, E)$ si no ha lugar a confusión, siempre que f sea μ-integrable y la función $p \circ f$ sea integrable para toda seminorma p continua en E.

La condición anterior equivale a que la medida vectorial m_f sea de variación finita.

Dos funciones $f, g\colon \Omega \to E$ se dicen μ-equivalentes, $f \cong g$, si para toda seminorma p continua en E es

$$\mu(\{t \in \Omega\colon p(f(t) - g(t)) \neq 0\}) = 0$$

Obviamente si $f \cong g$ es $m_f = m_g$.

Denotamos por $L^1(\mu, E)$ al espacio cociente $\mathcal{L}^1(\mu, E)/\cong$.

A continuación definimos una topología localmente convexa en este espacio.

Definición 2.— Para cada seminorma p continua en E se define la función escalar s_p por

$$s_p(f) = \int_\Omega p \circ f\, d\mu \qquad f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$$

Es fácil comprobar que s_p define una seminorma en $L^1(\mu, E)$ y que la familia formada por las s_p cuando p recorre un sistema fundamental de seminormas continuas en E dota al espacio $L^1(\mu, E)$ de una topología localmente convexa y separada para la cual el espacio de las funciones simples ordinarias forma un subespacio denso.

Este espacio coincide con el de las clases de equivalencia de funciones integrables Bochner cuando E es un espacio de Banach.

2. PRECOMPACIDAD EN $L^1(\mu, E)$

Daremos una caracterización de los subconjuntos precompactos del tipo de la única conocida en el espacio de las funciones escalares integrables (ver [3], IV.8.18).

Definición 3.— Si $\pi = \{A_1, \ldots, A_n\}$ es una partición de Ω por elementos de Σ y $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ se define

$$E_\pi (f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu (A_i)} \int_{A_i} f \, d\mu \;\; \chi_{A_i}$$

con el convenio $0/0 = 0$.

Obviamente $E_\pi (f) \in \mathcal{L}^1 (\mu, E)$ y para cada seminorma p continua en E es

$$s_p \; (E_\pi \; (f)) \leqslant s_p \; (f)$$

Además si $f \cong g$ entonces $E_\pi (f) \cong E_\pi (g)$. En consecuencia E_π es un operador lineal y continuo bien definido sobre L^1 (μ, E).

Lema 4.– Si el conjunto $\Pi(\Omega)$ de las Σ-particiones finitas de Ω se ordena por refinamiento y $f \in L^1$ (μ, E), la red $(E_\pi (f))_{\pi \in \Pi(\Omega)}$ converge a f en L^1 (μ, E).

Demostración.– Es consecuencia inmediata del hecho de que las funciones simples ordinarias forman un subespacio denso de L^1 (μ, E) y de la forma en que actúa el operador E_π sobre una función simple.

Teorema 5.– Un subconjunto K de L^1 (μ, E) es precompacto si y sólo si verifica:

1) K es acotado.
2) Para cada $A \in \Sigma$ el conjunto $\left\{ \int_A f \, d\mu : \; f \in K \right\}$ es un precompacto de E.
3) La red $(E_\pi (f))_{\pi \in \Pi(\Omega)}$ converge a f uniformemente en $f \in K$.

Demostración.– La necesidad de las dos primeras condiciones es evidente, la de la tercera es consecuencia del lema anterior y de que $\{E_\pi : \pi \in \Pi(\Omega)\}$ es una familia equicontinua de operadores sobre L^1 (μ, E).

Para ver la suficiencia observamos que de 2) se sigue que cada $E_\pi (K)$ es un precompacto de L^1 (μ, E). Por otra parte, y como consecuencia de 3), dada una seminorma p continua en E, existe $\pi_0 \in \Pi(\Omega)$ tal que

$$s_p \; (E_{\pi_0} (f) - f) < 1/2$$

para toda $f \in K$; y de la precompacidad de $E_{\pi_0} (K)$ deducimos la existencia de un conjunto finito $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset K$ tal que

$$\inf_{1 < i < n} s_p \; (f - f_i) < 1$$

para toda $f \in K$.

3. CASI-COMPLETITUD DE L^1 (μ, E)

Observemos que el espacio L^1 (μ, E) puede no ser casi-completo incluso siéndolo E. Sin embargo, al igual que ocurre con el espacio de las funciones integrables por seminormas de Blondia (ver [1]), en algunos casos sí que se puede asegurar la casi-completitud de L^1 (μ, E). Uno de estos casos es obviamente cuando E es de Banach, otro, para nosotros más interesante, es aquel en que E es un e.l.c. con la propiedad que vamos a definir a continuación.

Definición 6.– Diremos que E tiene la propiedad de Radon-Nikodym (P.R.N.) respecto de (Ω, Σ, μ) si para toda medida vectorial μ-continua y de variación acotada existe $f \in L^1$ (μ, E) tal que $m = m_f$.

Diremos simplemente que E posee P.R.N. si la tiene respecto de cualquier espacio de medida finito.

Proposición 7.– Si E es un e.l.c. casi-completo y con la P.R.N. respecto de (Ω, Σ, μ), entonces el espacio L^1 (μ, E) es casi-completo.

Demostración.– Sea $(f_i)_{i \in I}$ una red de Cauchy acotada de L^1 (μ, E). a cada A la red

$$\left(\int_A f_i \, d\mu\right)_{i \in I}$$

es de Cauchy y acotada (luego convergente) en E. Podemos entonces definir sobre Σ la medida m, con valores de E, dada por

$$m(A) = \lim_{i \in I} \int_A f_i \, d\mu$$

que es μ-continua y de variación acotada, lo que permite asegurar, gracias a que E tiene la P.R.N. respecto de (Ω, Σ, μ), la existencia de una función $f \in L^1$ (μ, E) tal que $m = m_f$.

Para completar la demostración basta ver la red $(f_i)_{i \in I}$ converge a f en L^1 (μ, E).

Sea p una seminorma continua en E, por el lema 4 existe una partición $\pi_0 \in \Pi(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega p \circ (f - E_\pi(f)) \, d\mu < \frac{1}{2}$$

para toda $\pi > \pi_0$.

Por otra parte existe $i_0 \in I$ tal que

$$\int_\Omega p \circ (f_i - f_j)\, d\mu < \frac{1}{6}$$

para $i, j > i_0$.

Sea ahora f_i, con $i > i_0$, y elegimos una función simple g_i^p con

$$\int_\Omega p \circ (f_i - g_i^p)\, d\mu < \frac{1}{6}$$

Si tomamos $\pi \in \Pi(\Omega)$ más fina que π_0 y que la partición formada por los conjuntos en que g_i^p toma valor constante, podemos poner

$$g_i^p = \sum_{A \in \pi} \frac{\int_A g_i^p\, d\mu}{\mu(A)} \chi_A$$

y se tiene que

$$\int_\Omega p \circ (f - f_i)\, d\mu \leqslant \int_\Omega p \circ (f - E_\pi(f))\, d\mu + \int_\Omega p \circ (E_\pi(f) - f_i)\, d\mu <$$

$$< \frac{1}{2} + \int_\Omega p \circ (f_i - g_i^p)\, d\mu + \int_\Omega p \circ (g_i^p - E_\pi(f)\, d\mu <$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \int_\Omega p \circ \Big(\sum_{A \in \pi} \frac{1}{\mu(A)} \Big(\int_A g_i^p\, d\mu - \int_A f\, d\mu \Big) \chi_A \Big)\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{A \in \pi} \int_A p \circ (g_i^p - f_i)\, d\mu + \sum_{A \in \pi} p \Big(\int_A f_i\, d\mu - m(A) \Big) <$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \int_\Omega p \circ (g_i^p - f_i)\, d\mu + \lim_{j \in I} \int_\Omega p \circ (f_i - f_j)\, d\mu < 1$$

con lo que $s_p(f - f_i) < 1$ para todo $i > i_0$.

4. COMPACIDAD DEBIL EN $L^1(\mu, E)$

En primer lugar daremos una descripción del dual topológico de L^1 (μ, E). Es fácil observar que los operadores lineales y continuos definidos sobre L^1 (μ, E) se pueden identificar a medidas definidas sobre Σ y con valores en E', tales que existe una seminorma p, continua en E, para la cual es

$$|\langle x, m(A) \rangle| \leqslant p(x)\, \mu(A)$$

para todo A de Σ.

Una condición del tipo propiedad de Radon-Nikodym sobre E' nos permitirá identificar estas medidas a funciones con valores en E'.

Definición 8.– Llamaremos $\mathcal{L}^\infty(\mu, E')$ al espacio de las funciones f definidas sobre Σ y con valores en E', μ-medibles para la topología fuerte de E' y tales que existe $g \cong f$ con $g(\Omega)$ equicontinuo de E'.

De modo natural $L^\infty(\mu, E')$ será el espacio cociente $\mathcal{L}^\infty(\mu, E')/\cong$.

Según se prueba en [6] existe una aplicación lineal e inyectiva de $L^\infty(\mu, E')$ en el dual topológico de $L^1(\mu, E)$; y la condición necesaria y suficiente para que esta aplicación sea un isomorfismo algebraico es que el espacio E' verifique lo que hemos llamado ε-P.R.N. respecto de (Ω, Σ, μ), esto es que para toda medida vectorial μ-continua y tal que el conjunto de los promedios

$$A_\Omega(m) = \left\{ \frac{m(A)}{\mu(A)} : \ A \in \Sigma, \ \ \mu(A) > 0 \right\}$$

es equicontinuo, exista una función $f \in L^1(\mu, E')$ tal que $m = m_f$.

Esta descripción del dual de $L^1(\mu, E)$ nos va a permitir estudiar los subconjuntos débilmente relativamente compactos de $L^1(\mu, E)$ y obtener un resultado análogo al que se tiene para el espacio de las funciones integrables Bochner, cuando E es Banach.

Definición 9.– Diremos que un subconjunto K de $L^1(\mu, E)$ es uniformemente integrable si para cada seminorma p continua en E la familia de funciones escalares $\{p \circ f: \ f \in K\}$ es uniformemente integrable en $L^1(\mu)$.

Proposición 10.– Todo subconjunto débilmente relativamente compacto K de $L^1(\mu, E)$ verifica:

1) K es acotado.
2) Para todo $A \in \Sigma$ el conjunto $\left\{ \int_A f\, d\mu: \ f \in K \right\}$ en un débilmente relativamente compacto en E.
3) K es uniformemente integrable.

Demostración.– La prueba de las dos primeras condiciones es inmediata. Para la tercera, razonando del mismo modo que en [2], IV.2.4, si K no es uniformemente integrable, se puede encontrar una sucesión $(f_n)_n \subset K$ tal que para una cierta seminorma p continua en E sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} |r_n| \leqslant s_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} r_n f_n \right)$$

para toda sucesión $(r_n)_n$ de ℓ^1, lo que permite establecer una aplicación lineal y continua entre el subespacio vectorial cerrado de $L^1(\mu, E)$ engendrado por las f_n y ℓ^1, haciendo corresponder a cada f_n el n-ésimo vector básico de ℓ^1, con lo que se llega a contradicción, ya que la base canónica de ℓ^1 no es un débilmente relativamente compacto.

Estas condiciones, en general no son suficientes para la compacidad débil relativa de un subconjunto de L^1 (μ, E). Nosotros obtendremos un recíproco imponiendo algunas condiciones al espacio E.

Definición 11.— Se dice que un espacio localmente convexo tiene la propiedad BM si todos sus subconjuntos acotados son metrizables.

Los espacios metrizables, y más generalmente aquellos que tienen la propiedad de convergencia de Mackey estricta tienen la propiedad BM ([7]).

Definición 12.— [7] Un e.l.c. es casi-normable si para cada subconjunto equicontinuo A de E' existe un entorno V de 0 en E tal que sobre A coinciden la topología fuerte $\beta(E', E)$ y la topología de la convergencia uniforme sobre V.

Propiedades de este tipo de espacios se pueden ver en [7] ó en [8], en concreto se tiene por ejemplo que los espacios DF y los gDF son casi-normables (ver [8], 12.4.7).

Antes de pasar a dar la caracterización de los subconjuntos débilmente relativamente compactos de L^1 (μ, E) enunciaremos unos lemas, que no demostraremos ya que son sencillas extensiones de resultados conocidos para espacios de Banach.

Lema 13.— Sea E un e.l.c. con la propiedad BM, si $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones μ-medibles con valores en E, existe un álgebra contable $\mathcal{A} \subset \Sigma$ tal que todas las f_n son μ-medibles cuando se considera el espacio de medida $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}), \mu)$, donde $\sigma(\mathcal{A})$ es la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{A}$.

Lema 14.— Sea Σ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y $\mathcal{A}$ una subálgebra de Σ tal que $\sigma(\mathcal{A}) = \Sigma$. Si $(m_n)_n$ es una sucesión de medidas uniformemente σ-aditivas, definidas sobre Σ y con valores en E, tales que existe lím m_n (A) para cada $A \in \mathcal{A}$, entonces también existe límite para cada $A \in \Sigma$.

Teorema 15.— Sea E un e.l.c. casi-completo, con la propiedad BM, casi-normable, que tiene P.R.N. y cuyo dual E' tiene la ε-P.R.N. Entonces un conjunto $K \subset L^1$ (μ, E) es débilmente relativamente compacto si y sólo si satisface las condiciones 10.1, 10.2 y 10.3.

Demostración.— A la vista de la proposición 10, se trata de probar que las mencionadas condiciones son suficientes para la compacidad débil relativa de K.

Observemos en primer lugar que por la proposición 7 el espacio L^1 (μ, E) es, en este caso, casi-completo, y por tanto es suficiente ver que toda sucesión $(f_n)_n \subset K$ admite un punto débilmente adherente. Como las funciones f_n son μ-medibles y el espacio E tiene la propiedad BM podemos construir un álgebra contable $\mathcal{A} \subset \Sigma$ tal qué cada f_n sea μ-medible para el espacio (Ω, Σ_0, μ), siendo $\Sigma_0 = \sigma(\mathcal{A})$. Supongamos $\mathcal{A} = \{A_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$, para cada k el conjunto

$$H_k = \left\{ \int_{A_k} f_n \, d\mu\colon\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

es un débilmente relativamente compacto de E que tiene la propiedad BM, en consecuencia se puede definir en el subespacio

$$E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{H}_k$$

una topología metrizable menos fina que la inducida por la original de E; y como consecuencia de 3.10 de [5], este espacio es débilmente angélico. Por tanto existe una subsucesión débilmente convergente en E_k (que será débilmente convergente en E).

Después de extraer una subsucesión débilmente convergente en cada H_k, un proceso diagonal de Cantor nos permite obtener una subsucesión, que volvemos a llamar igual, tal que

$$\left(\int_A f_n \, d\mu \right)_n$$

es débilmente convergente en E para todo $A \in \mathcal{A}$. Además, como consecuencia del lema anterior y de que las medidas m_{f_n} son uniformemente σ-aditivas, esta sucesión converge para todo conjunto $A \in \Sigma_0$.

Consideremos la medida vectorial $m\colon\ \Sigma_0 \to E$ tal que

$$\langle m(A),\ x' \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle \int_A f_n \, d\mu,\ x' \rangle$$

para todo $A \in \Sigma_0$ y todo $x' \in E'$, que es σ-aditiva μ-continua y de variación acotada, por tanto existe $f \in L^1(\Sigma_0, \mu, E)$ tal que $m = m_f$.

Para completar la prueba basta ver que para toda función g de $L^\infty(\Sigma_0, \mu, E')$ es

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega \langle f_n - f,\ g \rangle \, d\mu = 0$$

Si g es simple el resultado es trivial por la misma definición de f.

Sea $g \in L^\infty (\Sigma_0, \mu, E')$ arbitraria, y tomamos un representante de la clase de equivalencia de modo que $g(\Omega)$ sea equicontinuo; por ser K uniformemente integrable se tiene que

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \int_A \langle f_n, g\rangle \, d\mu = 0$$

uniformemente en n; así dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\partial > 0$ tal que para todo A de Σ_0, con $\mu(A) < \partial$ sea

$$\int_A \langle f_n, g\rangle \, d\mu < \varepsilon \quad \forall n \qquad \text{y} \qquad \int_A \langle f, g\rangle \, d\mu < \varepsilon$$

Por ser g μ-medible, dado ∂ existe un conjunto $A_0 \in \Sigma_0$ tal que $\mu(\Omega \setminus A_0) < \partial$ y $g\chi_{A_0}$ es límite uniforme de una red $(h_i)_i$ de funciones simples, que podemos suponer tales que para todo i es

$$h_i(A_0) \subset g(A_0)$$

La red $(h_i)_i$ converge a g uniformemente sobre A_0 y en la topología $\beta(E', E)$. Como E es casi-normable y $g(A_0)$ es un equicontinuo de E', existe una seminorma p continua en E tal que dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un i_0 para el cual

$$|\langle x, g(s) - h_{i_0}(s)\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{H} p(x)$$

para todo $x \in E$ y todo $s \in A_0$, donde H es tal que

$$\int_\Omega p \circ f_n \, d\mu \leqslant H \quad \forall n \qquad \text{y} \qquad \int_\Omega p \circ f \, d\mu \leqslant H$$

Se tiene así que

$$\left|\int_\Omega \langle f_n - f, g\rangle \, d\mu\right| < \left|\int_{A_0} \langle f_n, g - h_{i_0}\rangle \, d\mu\right| +$$

$$+ \left|\int_{A_0} \langle f_n - f, h_{i_0}\rangle \, d\mu\right| + \left|\int_{A_0} \langle f, g - h_{i_0}\rangle \, d\mu\right| + 2\varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{A_0} \frac{\varepsilon}{H} p \circ f_n \, d\mu\right| + \left|\int_{A_0} \langle f_n - f, h_{i_0}\rangle \, d\mu\right| + \left|\int_{A_0} \frac{\varepsilon}{H} p \circ f \, d\mu\right| + 2\varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{A_0} \langle f_n - f, h_{i_0}\rangle \, d\mu\right| + 4\varepsilon$$

Finalmente, como h_{i_0} es una función simple, existe un n_0 tal que

$$\left| \int_{A_0} \langle f_n - f, h_{i_0} \rangle \, d\mu \right| < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$. Con lo que se concluye que

$$\left| \int_{\Omega} \langle f_n - f, g \rangle \, d\mu \right| < 5\varepsilon$$

para todo $n > n_0$.

Observación 16.— El teorema anterior generaliza el clásico teorema de Dunford (ver [2], IV.12.1) que caracteriza los subconjuntos débilmente relativamente compactos de $L^1(\mu, E)$, cuando E es un espacio de Banach tal que él y su dual verifican la P.R.N.

Los resultados de [4] prueban que no se pueden suprimir las hipótesis del tipo P.R.N., ni aun en el caso de que E sea Banach.

Ejemplos 17.—

a) Si X es un espacio de Fréchet reflexivo cuyo dual fuerte tenga la propiedad BM, o bien un espacio de Fréchet-Schwarz, el espacio $E = (X' \;\; \beta(X', X))$, dual fuerte de X, verifica todas las hipótesis del teorema anterior.

b) El espacio $E = (\ell^\infty, \; \tau(\ell^\infty, \ell^1))$, donde τ es la topología de Mackey, cumple también todas las hipótesis del teorema anterior. En efecto, éste es un espacio de Schwarz completo y separable ([8], 10.5.3), en consecuencia es casi-normable y verifica la P.R.N. Para ver que tiene la propiedad BM basta observar que los acotados de E coinciden con los de la topología de la norma en ℓ^∞; y sobre la bola unidad de ℓ^∞, que es un equicontinuo de dual de ℓ^1, la topología $\tau(\ell^\infty, \ell^1)$ es metrizable ya que coincide con la débil $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ y ℓ^1 es separable. El dual fuerte de E es ℓ^1 que tiene la P.R.N.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. BLONDIA: *The completness of L^1 and webbed spaces.* Simon Stevin, 1984.

[2] J. DIESTEL and J. J. UHL: "Vector measures". *AMS Math. Surveys*, vol. 15, Providence R.I., 1977.

[3] N. DUNFORD and J. T. SCHWARTZ: "Linear operators". *Part. I. Interscience.* New York and London, 1958.

[4] C. FIERRO: *On weak compactness in spaces of Bochner integrable functions and the Radon-Nikodym property.* Aparecerá.

[5] K. FLORET: "Weakly compact sets". *LN 801 Springer-Verlar.* Berlín, 1980.
[6] A. GARCIA LOPEZ: "Topología débil en L^1 (μ, E)". *Actas de las X jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas.* Murcia, 1985.
[7] A. GROTHENDIECK: *Sur les spaces (F) et (DF).* Summa Brasil Math. 3, 57-123.
[8] H. JARCHOW: "Locally convex spaces". *Teubner Stuttgart*, 1981.
[9] B. RODRIGUEZ-SALINAS: *Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo.* Rev. Real Ac. Ciencias de Madrid, 1979.

Dpto. Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid