Una nota sobre el contraste de interacción en tablas ANOVA rectangulares completas no replicadas

Por Fernando Tusell

Recibido: 16 abril 1986

Presentado por el académico correspondiente Antonio Fernández de Trocóniz

Abstract

A new method for the test of interaction in two-way rectangular ANOVA tables with no replication is proposed. The method is an application of profile analysis, as used in Multivariate Analysis. It looks at complete rows or columns, considered as vector in an N-dimensional space, testing for parallelism. The suggested procedure should be particularly helpful whenever interaction is known or suspected to be restricted to either one or only a few rows or columns.

Resumen

Se propone un nuevo procedimiento para el contraste de interacción en tablas ANOVA rectangulares, en ausencia de replicación. Para ello, se consideran filas o columnas completas, contrastándose su paralelismo. El método viene sugerido por el llamado "contraste de perfiles", utilizado en Análisis Multivariante. Está particularmente indicado cuando se sabe, o sospecha, que la interacción, de existir, está localizada en una sola o unas pocas filas o columnas.

1. NOTACION Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideramos una variable aleatoria Y (cuyas observaciones denotaremos con minúsculas) generada como resultado de la experimentación con dos factores, acaso con interacción entre ellos.

Contamos con la muestra,

Columnas

		1	2	...	J
Filas	1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1J}
	2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2J}
	⋮	⋮	⋮		⋮
	I	y_{I1}	y_{I2}	...	y_{IJ}

y consideramos el modelo:

$$y_{ij} = \beta_{..} + \beta_{i.} + \beta_{.j} + \beta_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

Supondremos se verifican las condiciones habituales en análisis de varianza con distribución normal.

Supondremos, además, que $J > I$ —es decir, que hay más niveles "columna" que niveles "fila"—. Del desarrollo a continuación se desprende que los roles de I y de J son intercambiables.

Bajo los supuestos anteriores, estamos interesados en diseñar un contraste para la hipótesis:

$$H_0 : \beta_{ij} = 0 \qquad (i = 1, ..., I;\ j = 1, ..., J)$$

Podemos transformar las observaciones y_{ij} de la tabla anterior mediante sustracción a cada columna de la casilla en la primera fila. Obtendremos así para la columna j-ésima:

$$\vec{X_j} = \begin{pmatrix} x_{2j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{Ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{2j} - y_{1j} \\ y_{3j} - y_{1j} \\ \vdots \\ y_{Ij} - y_{1j} \end{pmatrix}$$

Bajo la hipótesis de nulidad de las interacciones, tenemos que:

$$\vec{\mu} = E\,[\vec{X_j}] = \begin{pmatrix} x_{2j} \\ x_{3j} \\ \vdots \\ x_{Ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{2.} - \beta_{1.} \\ \beta_{3.} - \beta_{1.} \\ \vdots \\ \beta_{I.} - \beta_{1.} \end{pmatrix} \qquad (j = 1, ..., J)$$

Es decir, $\vec{X_1}, ..., \vec{X_j}, ..., \vec{X_J}$ tienen vector de medias común $\vec{\mu}$ bajo H_0. Sea $\vec{\overline{X}}_{(j)}$ el vector:

$$\vec{\overline{X}}_{(j)} = (\vec{X_1} + ... + \vec{X}_{j-1} + \vec{X}_{j+1} + ... + \vec{X_J}) \,/\, (J-1)$$

o sea, el vector de medias aritméticas laterales computado prescindiendo del vector $\vec{X_j}$. Denotaremos por Λ la matriz de covarianzas de $\vec{X_j}$, que en ausencia de interacción es:

$$\Lambda = E\,(\vec{X_j} - \vec{\mu})\,(\vec{X_j} - \vec{\mu})' \qquad (j = 1, ..., J)$$

Una estimación insesgada de Λ que prescinde en su cálculo del vector $\vec{X_j}$ viene proporcionada por:

$$\hat{\Lambda} = (J-2)^{-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{J} (\vec{X_i} - \vec{\overline{X}}_{(j)})\,(\vec{X_i} - \vec{\overline{X}}_{(j)})'$$

2. CONSTRUCCION DEL ESTADISTICO DE CONTRASTE

Bajo la hipótesis de contraste H_0, se tiene que:

$$E(\vec{X}_j - \vec{\bar{X}}_{(j)}) = \vec{0}$$

$$E(\vec{X}_j - \vec{\bar{X}}_{(j)})(\vec{X}_j - \vec{\bar{X}}_{(j)})' = J(J-1)^{-1}\Lambda$$

Consiguientemente:

$$(\vec{X}_j - \vec{\bar{X}}_{(j)})\sqrt{(J-1)/J} \sim N(\vec{0}, \Lambda)$$

$$(J-2)\hat{\Lambda}_{(j)} \sim \text{Wishart}(\Lambda; J-2)$$

y:

$$\delta_j = \sqrt{\frac{J-1}{J(J-2)}(\vec{X}_j - \vec{\bar{X}}_{(j)})' \hat{\Lambda}_{(j)}^{-1} (\vec{X}_j - \vec{\bar{X}}_{(j)})} \sim H(I-1, J-2)$$

donde $H(I-1, J-2)$ designa la distribución de Hotelling de dimensión $I-1$ y $J-2$ grados de libertad. Sea:

$$T_j^2 = (J-I)(I-1)^{-1}(J-2)^{-1}\delta_j^2$$

Entonces:

$$T_j^2 \sim \mathscr{F}_{I-1, J-I}$$

La anterior distribución de T_j^2 permite contrastar la presencia de interacción en la columna j-ésima, si la tabla es rectangular $(J-I>0)$. En efecto, bajo H_0 tenemos:

$$\text{Prob}\,\{T_j^2 > \mathscr{F}^{\alpha}_{I-1;J-I}\} = \alpha \qquad |H_0$$

En muchos casos, este contraste puede ser todo cuanto deseamos; por ejemplo, cuando nuestro conocimiento del problema bajo análisis restrinja la posibilidad de interacción a una fila o columna. En el caso de que esto no sea así, podríamos contrastar la presencia de interacción en varias o todas las columnas (o filas) haciendo uso de una cota de Bonferroni:

$$\text{Prob}\,\{T_j^2 > \mathscr{F}^{\alpha/J}_{I-1;J-I}\} \leqslant \alpha \qquad |H_0$$

3. ALGUNOS COMENTARIOS Y EXTENSIONES

Aunque se deducen fácilmente del método seguido en la construcción del estadístico, incluimos concisamente algunas observaciones de interés:

1. La desigualdad de Bonferroni es estricta en general dado que los sucesos simultáneos considerados no son disjuntos. Cabe pensar en calcular el nivel de significación con mayor precisión, sobre las líneas del trabajo de COOK-PRESCOTT (1981).

2. En el caso $J = 2$ (ó $I = 2$, si hacemos el análisis por filas), T sigue una distribución t de Student con $I - J$ (ó $J - I$) grados de libertad. El contraste simultáneo de interacción en n filas o columnas puede entonces hacer uso de la distribución del máximo de n variables t de Student con correlación por pares ρ, parámetro este último de fácil cálculo.
3. El contraste propuesto puede contemplarse como el examen conjunto de uno (o más) vectores de residuos "externamente studentizados". Cabe esperar por ello mayor eficacia de la que se obtendría mediante el análisis por separado de los residuos, ya que la hipótesis que estamos contrastando (interacciones nulas) debiera traducirse —caso de ser incierta— en residuos mayores de lo esperado en al menos dos casillas de una fila o columna.
4. Hay, finalmente, extensiones obvias en el caso de que sea posible replicar alguna columna (o fila) en el diseño. Ello permitiría, en particular, relajar el requerimiento de rectangularidad de la tabla ANOVA analizada.

Agradecimientos

Esta nota se ha beneficiado de los comentarios del Profesor D. Antonio Fernández Trocóniz, y de los de un evaluador.

BIBLIOGRAFIA

[1] COOK, R. D., PRESCOTT, P. (1981): "On the Accuracy of Bonferroni Significance Levels for Detecting outliers in Linear Models". *Technometrics*, vol. 23, pp. 59-63.

Universidad del País Vasco
Departamento de Análisis Económico (Grupo Estadístico)
Facultad de CC.EE. y Empresariales
Avenida del Ejército, 83
48015 BILBAO