F-espacios sobre cuerpos locales: La propiedad de extensión

POR J. MARTINEZ MAURICA Y C. PEREZ GARCIA

Recibido: 5 marzo 1986

Presentado por el académico numerario D. Baltasar Rodríguez Salinas

Abstract

In 1984, Mira studied the extension property of a p-normed space Y whit respect to an F-space X, where X, Y are vector spaces over an arbitrary valued field. Under the additional hypothesis that X has a basis, he proved that, if Y has the extension property with respect to X, then X must be locally p-convex. Mira notices that the additional hypothesis can be dropped when the ground field is the real or complex field. In this paper we prove that the same is true in the case of a non-archimedan local field.

En lo que sigue K será un cuerpo conmutativo dotado de valuación no arquimediana y no trivial y localmente compacto (como es sabido, los cuerpos p-ádicos son localmente compactos). La compacidad local de K obliga a que la valuación sea discreta (Monna, 1970, p. 4). Por $\rho > 1$ denotamos el generador del grupo de valores $\{|\lambda|: \lambda \in K - \{0\}\}$.

El concepto de F-seminorma y F-norma en un espacio vectorial sobre K es el dado por Prolla (1982, p. 103). Un razonamiento análogo al del caso real o complejo prueba que una topología en un espacio vectorial sobre K es compatible si y sólo si viene definida por una familia de F-seminormas, siendo suficiente una única F-norma en el caso de que la topología sea metrizable. Un espacio vectorial topológico metrizable y completo se conoce con el nombre de F-espacio.

Diremos que una F-seminorma ν es 1-subhomogénea cuando

$$\nu(\alpha x) \leqslant |\alpha| \nu(x) \quad \text{si} \quad |\alpha| \geqslant 1.$$

Proposición 1.— Si ν es una F-seminorma en un espacio vectorial E sobre K, existe una F-seminorma 1-subhomogénea η en E equivalente a ν.

Demostración.— Si $\pi \in K$ es tal que $|\pi| = \rho$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\nu_n(x) = \nu(\pi^n x)$ es una F-seminorma en E equivalente a ν. Por lo tanto, la F-seminorma ν define en E la misma topología que la familia de F-seminormas $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, la cual también coincide con la definida en E por la F-norma

$$\eta(x) = \sum_{n \geq 1} \rho^{-n} \frac{\nu_n(x)}{1 + \nu_n(x)}.$$

Además, η es 1-subhomogénea, ya que

$$\eta(\pi x) = \sum_{n \geq 1} \rho^{-n} \frac{\nu_{n+1}(x)}{1 + \nu_{n+1}(x)} \leqslant \rho\eta(x) = |\pi|\, \eta(x)$$

y por inducción se prueba que $\eta(\pi^n x) \leqslant |\pi^n|\, \eta(x)$ para cada $n \geqslant 1$, de lo que se sigue fácilmente que η es 1-subhomogénea.

Una sucesión $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un F-espacio E sobre K se llama base si cada $x \in E$ admite una expresión única en la forma

$$x = \sum_n a_n e_n\,; \quad a_n \in K, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Una sucesión $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio vectorial topológico metrizable E sobre K se llama sucesión básica si es base del subespacio lineal cerrado que ella engendra en el completado $\hat{E}$ de E.

Un espacio vectorial topológico X se dice que tiene la propiedad de extensión respecto de un espacio vectorial topológico E si para cada subespacio M de E y cada aplicación lineal continua $f\colon M \to X$ existe una extensión lineal continua $\bar{f}\colon E \to X$.

El resultado más importante de Mira (1984) admite ahora la siguiente simplificación:

Corolario 2.– Sea (E, τ_1) un espacio vectorial topológico metrizable sobre K y $(X, \|,\|)$ un espacio p-normado sobre K. Supongamos que existe una topología compatible τ_2 en E de forma que para aplicaciones lineales de E en X la τ_1-continuidad equivale a la τ_2-continuidad. Si existe una sucesión básica $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a cero en τ_2 y no convergente a cero en τ_1, entonces X no tiene la propiedad de extensión respecto de E.

Demostración.– Es una consecuencia directa de la proposición 3 de Mira (1984) ya que por la proposición 1 puede suponerse que τ_2 viene definida por una familia de F-seminormas 1-subhomogéneas.

Si τ_1 y τ_2 son dos topologías compatibles en un espacio vectorial E sobre K, se dice que τ_2 es τ_1-polar si τ_2 posee una base de 0-entornos que son τ_1-cerrados.

Como consecuencia de la proposición 1 y con un razonamiento análogo al de la proposición 2.1 de Kalton (1974), se verifica:

Corolario 3.— Sea ν una F-norma en un espacio vectorial E sobre K y τ_1 una topología compatible en E. Si la topología τ_ν definida por ν es τ_1-polar, entonces τ_ν viene también definida por una F-norma η de la forma

$$\eta(x) = \sup \{\lambda(x) \colon \lambda \in \Lambda\}$$

donde Λ es una familia de F-seminormas 1-subhomogéneas y τ_1-continuas.

Las F-seminormas 1-subhomogéneas toman valores suficientemente próximos a uno dado, es decir:

Lema 4.— Si ν es una F-seminorma 1-subhomogénea en un espacio vectorial E sobre K y $x \in E$ es tal que $\nu(x) \geqslant a$ $(a \in R^+)$, entonces existe $s \in K$ con $|s| \leqslant 1$ tal que

$$a \leqslant \nu(sx) \leqslant \rho a.$$

Demostración.— Si $\nu(x) = a$ el resultado es trivial. Si $\nu(x) > a$, sea $n = \text{mín}\,\{m \in \mathbb{N} \colon \nu(\pi^{-m} x) \leqslant a\}$. Entonces, $s = \pi^{-(n-1)} \in K$ es tal que $|s| \leqslant 1$ y $a \leqslant \nu(sx) \leqslant \rho a$.

Proposición 5.— Sea (E, τ) un espacio vectorial topológico metrizable sobre K y sea τ_1 una topología compatible en E tal que τ es τ_1-polar. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en E tal que $(x_n) \to 0\ (\tau_1)$ y $(x_n) \not\to 0\ (\tau)$, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ con $z_p = x_{n(p)}$ tal que $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica de E verificando $(z_p) \not\to 0\ (\tau)$.

Demostración.— Por el corolario 3 puede suponerse que la topología de E viene definida por una F-norma 1-subhomogénea ν tal que

$$\nu(x) = \sup \{\lambda(x) \colon \lambda \in \Lambda\}$$

donde Λ es una familia de F-seminormas 1-subhomogéneas y τ_1-continuas.

Pasando a una subsucesión puede también suponerse que $\inf \nu(x_n) > 0$. Elegimos entonces $\theta > 0$ tal que $\nu(x_n) \geqslant (6\rho + 3)\,\theta$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $V = \{x \in E \colon \nu(x) \leqslant 3\rho\theta\}$. Puesto que $\nu(x_1) > 3\rho\theta$ y K es localmente compacto, se tiene que $V \cap \text{lin}\,\{x_1\}$ es compacto. Supongamos construidos $z_1 = x_1, \ldots, z_p$ tal que si $E_p = \text{lin}\,\{z_1, \ldots, z_p\}$ entonces $V \cap E_p$ es compacto.

Para $0 \leqslant k \leqslant 3\rho^{p+3} / (\rho - 1)$, $(k \in Z)$, el conjunto

$$W_k^p = \{x \in E \colon k\rho^{-(p+3)}(\rho - 1)\,\theta \leqslant \nu(x) \leqslant k\rho^{-(p+2)}(\rho - 1)\,\theta\}$$

es compacto (eventualmente vacío), por lo que existe un subconjunto finito U_k^p tal que

$$\forall\, w \in W_k^p \quad \exists\, u \in U_k^p \qquad \text{con} \quad \nu\,(w-u) \leqslant (\rho-1)\,\rho^{-(p+3)}\theta.$$

Si $U^p = \cup\ \{U_k^p\colon\ 0 \leqslant k \leqslant 3\rho^{p+3}\ /\ (\rho-1),\ k \in Z\}$, para cada $u \in U^p$ elegimos $\lambda_u \in \Lambda$ tal que $\lambda_u\,(u) \geqslant \nu\,(u) - (1/2)\,\rho^{-(p+3)}\,(\rho-1)\,\theta$.

Sea $c > n_{(p)}$ tal que si $d \geqslant c$ entonces $\lambda_u\,(x_d) \leqslant (1/2)\,\rho^{-(p+3)}\,(\rho - 1)\,\theta$ para cada $u \in U^p$. Si para todo $d \geqslant c$ se tiene que $V \cap \text{lin}\ \{E_p,\ x_d\}$ no es compacto, entonces (Kalton, 1974, lema 3.1) existe $t_d x_d + u_d \neq 0$ con $t_d \in K$, $u_d \in E_p$ tal que el subespacio lineal generado por $t_d x_d + u_d$ está contenido en V. Como $u_d \neq 0$ y $V \cap E_p$ es compacto, existe $\lambda \in K$ tal que $\nu\,(\lambda u_d) > 3\theta$ y por el lema 4 existe $s \in K$ tal que $3\theta \leqslant \nu\,(s\lambda u_d) \leqslant 3\rho\theta$, con lo que sin pérdida de generalidad puede suponerse $3\theta \leqslant \nu\,(u_d) \leqslant 3\rho\theta$.

Entonces,

$$\nu\,(t_d x_d) \leqslant \nu\,(t_d x_d + u_d) + \nu\,(u_d) \leqslant 6\rho\theta$$

por lo que $|t_d| \leqslant 1$ y por tanto $(t_d x_d) \to 0\ (\tau_1)$.

Como $V \cap E_p$ es compacto, puede suponerse que la sucesión $(u_d)_{d>c}$ converge a $u \in E_p$ con $3\theta \leqslant \nu\,(u) \leqslant 3\rho\theta$.

Además:

$$\nu\,(tu) \leqslant \varliminf_{d>c} \nu\,(t\,(t_d x_d + u_d)) \leqslant 3\rho\theta \qquad \forall\, t \in K$$

con lo que $\text{lin}\ \{u\} \subset V \cap E_p$: absurdo.

Basta tomar entonces $n_{(p+1)} \geqslant c$ tal que $V \cap \text{lin}\ \{E_p,\ x_{n\,(p+1)}\}$ es compacto.

Para probar que la sucesión $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ así construida es una sucesión básica de E hemos de ver que son linealmente independientes y que la familia de aplicaciones $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definidas en $\text{lin}\ \{z_p\}$ mediante

$$S_n\ (x) = \sum_{p=1}^{n} \alpha_p z_p \qquad \text{para cada} \quad x = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p z_p \in \text{lin}\ \{z_p\},$$

es equicontinua (Mira, 1984, lema 2).

Para ello reemplazamos ν por una F-norma equivalente ν^* definida por $\nu^*\,(x) = \text{mín}\,(\nu\,(x),\ 3\theta)$.

Vamos a probar que si $t_1, \ldots, t_{n+m} \in K$ $(n, m \in \mathbb{N})$, entonces,

$$\nu^*\left(\sum_{p=1}^{n+m} t_p z_p\right) \geqslant \nu^*\left(\sum_{p=1}^{n} t_p z_p\right) - 3\rho^{-(n+2)}\,\theta \tag{1}$$

Sea k el mayor entero que verifica

$$\nu^*\left(\sum_{p=1}^{n} t_p z_p\right) \geqslant k\rho^{-(n+3)}(\rho-1)\,\theta.$$

Entonces, $0 \leqslant k \leqslant 3\rho^{n+3} / (\rho - 1)$ y por ser ν 1-subhomogénea, existe $s \in K$ con $|s| \leqslant 1$ tal que

$$s \sum_{p=1}^{n} t_p z_p \in W_k^n.$$

Sea $u \in U_k^n$ con

$$\nu\left(u - s \sum_{p=1}^{n} t_p z_p\right) \leqslant \rho^{-(n+3)} (\rho - 1)\theta.$$

Si $|st_{n+1}| \leqslant 1$:

$$\nu(u + st_{n+1} z_{n+1}) \geqslant \lambda_u (u) - \lambda_u (z_{n+1}) \geqslant (k-1)(\rho - 1)\rho^{-(n+3)}\theta.$$

Si $|st_{n+1}| > 1$:

$$\nu(u + st_{n+1} z_{n+1}) \geqslant \nu(z_{n+1}) - \nu(u) \geqslant 3\theta \geqslant (k-1)(\rho - 1)\rho^{-(n+3)}\theta.$$

Por tanto, siempre se verifica que

$$\nu(u + st_{n+1} z_{n+1}) \geqslant (k-1)(\rho - 1)\rho^{-(n+3)}\theta.$$

Entonces:

$$\nu\left(s \sum_{p=1}^{n+1} t_p z_p\right) \geqslant \nu(u + st_{n+1} z_{n+1}) - \nu\left(u - s \sum_{p=1}^{n} t_p z_p\right) \geqslant$$

$$\geqslant (k+1)(\rho - 1)\rho^{-(n+3)}\theta - 3(\rho - 1)\rho^{-(n+3)}\theta \geqslant$$

$$\geqslant \nu^*\left(\sum_{p=1}^{n} t_p z_p\right) - 3(\rho - 1)\rho^{-(n+3)}\theta$$

con lo que

$$\nu^*\left(\sum_{p=1}^{n+1} t_p z_p\right) \geqslant \nu^*\left(\sum_{p=1}^{n} t_p z_p\right) - 3(\rho - 1)\rho^{-(n+3)}\theta$$

y mediante un cálculo reiterado se obtiene (1).

Veamos ahora cómo puede demostrarse por inducción que los vectores z_p son linealmente independientes: Si

$$\sum_{p=1}^{n+1} t_p z_p = 0$$

entonces necesariamente

$$\sum_{p=1}^{n} t_p z_p = 0$$

pues en caso contrario, como $V \cap E_n$ es compacto, existe $s \in K$ tal que

$$\nu\left(\sum_{p=1}^{n} st_p z_p\right) > 3\theta$$

absurdo, ya que por (1) se tendría

$$\nu^*\left(\sum_{p=1}^{n+1} st_p z_p\right) > 0.$$

Sea F el subespacio lineal generado por $\{z_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ y definimos en F las aplicaciones lineales S_n por:

$$S_n\left(\sum_{p=1}^{\infty} t_p z_p\right) = \sum_{p=1}^{n} t_p z_p$$

donde la sucesión (t_p) es finitamente no nula. Por (1) se verifica:

$$\nu^*(x) > \nu^*(S_n(x)) - 3\rho^{-(n+2)}\theta \qquad \forall\, x \in F. \tag{2}$$

Veamos que cada aplicación S_n es continua: Supongamos que existe una sucesión $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $(u_m) \to 0$ pero $(S_n(u_m)) \nrightarrow 0$. Por ser $V \cap E_n$ compacto y ν 1-subhomogénea, existe una sucesión acotada de escalares $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que se tiene

$$3\theta \leqslant \nu(\lambda_m S_n(u_m)) \leqslant 3\rho\theta,$$

lo cual por (2) es una contradicción.

Veamos finalmente que la familia $\{S_n\}_{n \geqslant 1}$ es equicontinua. Por reducción al absurdo, si esto no ocurre, existe $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(y_m) \to 0$ tal que $\nu^*(S_{p(m)}(y_m)) \geqslant \varepsilon$ para cada natural m. Por tanto

$$\nu^*(y_m) \geqslant \varepsilon - 3\rho^{-(p(m)+2)}\theta,$$

con lo que la sucesión $p(m)$ está acotada y podemos escoger una subsucesión constante, lo cual contradice al hecho de que cada S_n es continua.

Emplearemos el término "espacio normado no arquimediano" cuando la norma verifique la desigualdad triangular fuerte. Análogamente, llamaremos "espacio localmente p-convexo" a un espacio vectorial topológico sobre K cuya topología viene definida por una familia de p-seminormas y "espacio localmente p-convexo no arquimediano" cuando la topología viene definida por una familia de p-seminormas no arquimedianas.

El siguiente resultado es una extensión de la proposición 8 de Mira (1984) y del Teorema 4 de Martínez et al. (1985).

Teorema 6.– Sea E un F-espacio y X un espacio normado (resp. normado no arquimediano) sobre K. Entonces, si E no es localmente convexo (resp. localmente convexo no arquimediano), X no tiene la propiedad de extensión respecto de E.

Demostración.– Haremos la demostración en el caso de que X es un espacio normado y E no es localmente convexo. Análogo razonamiento se sigue para X espacio normado no arquimediano y E un F-espacio que no es localmente convexo no arquimediano.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $V_n = \{x \in E\colon \nu(x) \leqslant (1/n)\}$ y sea ν_n el calibre de V_n, es decir

$$\nu_n(x) = \inf_k \inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} |a_i| : x \in \sum_{i=1}^{k} a_i V_n ,\ a_i \in K \right\}$$

(para más detalles ver Bastero, 1975). La sucesión creciente de seminormas $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ define una topología localmente convexa metrizable τ en E estrictamente más fina que la topología τ_ν definida por ν y tal que para aplicaciones lineales de E en X la τ-continuidad y la τ_ν-continuidad coinciden. Además, puede suponerse τ separada pues en caso contrario X no tiene la propiedad de extensión respecto de E.

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en E tal que

$$(x_n) \to 0\ (\tau) \qquad \text{y} \qquad (x_n) \not\to 0\ (\tau_\nu)$$

y sea τ_1 la mayor de las topologías compatibles en E tal que

$$\tau \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_\nu \qquad \text{y} \qquad (x_n) \to 0\ (\tau_1).$$

Sea τ_α la topología compatible en E con una base de 0-entornos formada por las τ_1-clausuras de entornos de 0 en τ_ν. Puesto que $\tau \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_\nu$ se tiene que

$$\tau \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_\alpha \leqslant \tau_\nu .$$

Además, si $\tau_1 = \tau_\alpha$, la aplicación identidad de (E, τ_ν) en (E, τ_1) sería un homeomorfismo (Prolla, 1982, p. 60): absurdo por la elección de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Entonces, τ_α es una topología metrizable en E que es τ_1-polar y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en E tal que

$$(x_n) \to 0\ (\tau_1) \qquad \text{y} \qquad (x_n) \not\to 0\ (\tau_\alpha),$$

con lo que (x_n) contiene una subsucesión básica en las condiciones de la proposición 5. Por el corolario 2, X no tiene la propiedad de extensión respecto de (E, τ_α) y puesto que $\tau \leqslant \tau_\alpha \leqslant \tau_\nu$, se concluye que X no tiene la propiedad de extensión respecto de (E, τ_ν).

Teorema 7.– Sea E un F-espacio y X un espacio p-normado (resp. p-normado no arquimediano) sobre K. Entonces, si E no es localmente p-convexo (resp. localmente p-convexo no arquimediano), X no tiene la propiedad de extensión respecto de E.

Demostración.– Aplicar el teorema 6 considerando en K la valuación equivalente $|\lambda|_1 = |\lambda|^p$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BASTERO, J.: *Convexidad y acotación en espacios vectoriales topológicos sobre cuerpos cuasivalorados.* Tesis Doctoral, Universidad de Zaragozà (1975).

[2] KALTON, N. J.: *Basic sequences in F-spaces and their applications.* Proc. Edinburgh. Math. Soc., 19, (1974), 151-167.

[3] MARTINEZ, J., PEREZ, C.: *Sucesiones básicas en espacios normados sobre cuerpos valuados.* Actes du VII Congrès du Groupement des Mathematiciens D'Expression Latine, Coimbra, Septembre (1985), 159-162.

[4] MIRA, J. M.: *Sobre la propiedad de extensión en espacios p-normados.* Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fis. Natur. Madrid, Tomo LXXVIII, cuaderno 1º y 2º (1984), 165-177.

[5] MONNA, A. F.: *Analyse non-archimedienne.* Springer-Verlag, New York (1970).

[6] PROLLA, J. B.: *Topics in Functional Analysis over Valued Division Rings.* North-Holland, New York (1982).

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias
Av. de los Castros, s/n
39071 SANTANDER