Transformaciones entre espacios de funciones continuas casi convergentes

Por F. BALIBREA

Recibido: 5 febrero 1985.

Presentado por el académico numerario D. Baltasar Rodríguez-Salinas.

Abstract

In this paper we have studied similar problems to those established for real bounded sequences related to the characterization of infinite matrix that transform a subspace E_1 of l^∞ ($\mathbb{N}$) into another $E_2 \subset l^\infty$ ($\mathbb{N}$), underlying the case in which E_1 is the space of almost convergent sequences and E_2 is the same.

In fact, we have studied the above problems in the context of real bounded continuous functions defined on a separated completely regular and pay special attention to the notion of almost convergent functions. We characterize one type of kernel of summability that allows us to transform almost convergent functions into other types of almost convergent functions. This theorem generalizes some result from the theory of sequences, such as Kojima-Suchur, Silverman-Toeplitz, Lorentz and Maddox and from the bounded functions on amenable semigroups. This paper continues the theory that we began in (4).

1. INTRODUCCION

Como es bien conocido, un capítulo importante en la teoría de la sumabilidad de sucesiones se ocupa del problema de caracterizar aquellas matrices infinitas que transforman un determinado espacio de sucesiones $E_1 \subset l^\infty$ ($\mathbb{N}$) en otro espacio de sucesiones prefijado $E_2 \subset l^\infty$ ($\mathbb{N}$). A este respecto son representativos los teoremas de Kojima-Schur, Silverman-Toeplitz, Lorentz-Knopp, Crone, etc. y que se pueden ver en (15) y (21) entre otras referencias.

En (10) G.G. Lorentz introdujo las sucesiones numéricas casi convergentes como aquellas sucesiones acotadas (x_n) a las que todos los límites de Banach asignan el mismo valor, caracterizándolas por la condición de que exista el límite.

$$\lim_n \frac{1}{n+1} \sum_{i=k}^{k+n} x_i = x \qquad \text{uniformemente en } k$$

en cuyo caso, x es el valor común de todos los límites de Banach al actuar sobre la sucesión.

El concepto de sucesión casi convergente fue extendido posteriormente en varios sentidos. Un primer sentido fue el de sustituir el conjunto $[\tau]$ de los límites de Banach por el conjunto de las medias invariantes de algún semigrupo de operadores $G \subset \mathcal{L}$ $(l^\infty(\mathbb{N})$ (7). Otro sentido de generalización consiste en sustituir $\mathbb{N}$ por un semigrupo "amenable" y considerar, en lugar de los límites de Banach, el conjunto de todas las medias invariantes (13) y (5).

En todos estos casos se logran caracterizaciones de las sucesiones o de las funciones casi convergentes, análogas a la de Lorentz.

Al aparecer el concepto de sucesión casi convergente y sus posteriores generalizaciones, se abordó el problema de la caracterización de matrices cuando se fija como E_1 el espacio de las sucesiones convergentes o el de las casi convergentes y como E_2 se toma uno de éstos dos espacios, considerándose la cuestión adicional de caracterizar las transformaciones para las que el límite o casi límite de una sucesión coincide con el de su transformada. (Véase King (9), Schaefer (15) y Duran (6)).

Cuando, se sustituye $\mathbb{N}$ por un semigrupo amenable, dotado de su topología discreta, se considera el espacio de las funciones acotadas convergentes según el filtro de los conjuntos cofinitos y el espacio de las funciones casi convergentes respecto a la familia de medias invariantes, los resultados anteriores fueron extendidos por Mah (13).

El objetivo de este trabajo es el continuar y completar la teoría iniciada en (4) abordando problemas similares a los que se acaban de citar, pero en el contexto de las funciones reales continuas definidas en espacios topológicos completamente regulares. Utilizando la noción de función contínua casi convergente respecto a una familia de medias J, se extienden, al mismo tiempo que se les da un tratamiento unificado, casi todos los resultados clásicos sobre esta materia.

Los resultados generales que se han obtenido no sólo generalizan los relativos a sucesiones y a funciones acotadas sobre semigrupos amenables, sino que cuando se aplican a las propias sucesiones ofrecen cierto interés, como se pone de manifiesto con algunos resultados (11), que se pueden completar y obtener como consecuencia de estos resultados generales.

2. PRELIMINARES. NOTACIONES Y RESULTADOS PREVIOS

Sea T un espacio topológico completamente regular y separado, dotado de una base de filtro V. Con $C_b(T)$ denotaremos el espacio vectorial de las funciones reales continuas y acotadas definidas en T dotado de la norma de la convergencia uniforme y con $\mathscr{Z}(T)$ el retículo T formado por los subconjuntos que son ceros de funciones continuas. Al álgebra de partes de T engendrada por $\mathscr{Z}(T)$ la denotaremos por $\mathscr{A}(T)$ (álgebra de Baire en T).

El dual de $C_b(T)$ se puede identificar en virtud del teorema de Alexandrov (1) con el espacio $\mathscr{M}(T)$ formado por las medidas finitamente aditivas μ acotadas y regulares respecto de $\mathscr{X}(T)$ dotado de la norma de la variación total $\|\mu\| = |\mu|\,(T)$.

En lo que sigue denotaremos por $c_0(T)$ al subespacio de $C_b(T)$ formado por las funciones de $f \in C_b(T)$ tales que $\lim_V f = 0$ y por $c(T)$ a la suma directa $c_0(T) \oplus \mathbb{R}$, es decir, al subespacio de $C_b(T)$ formado por las funciones para las que existe $\lim_V f$. Supondremos que $c_0(T)$ no se reduce a $\{ 0 \}$.

Denotaremos por $\mathscr{M}(T)_1^+$ a $\{\mu \in \mathscr{M}(T)\colon \mu \geqslant 0$ y $\|\mu\| = 1 = \mu(T)\}$. A los elementos de $\mathscr{M}(T)_1^+$ les denominaremos medias sobre T. El conjunto de medias $V^\circ = c_0(T)^\perp \cap \mathscr{M}(T)_1^+$ lo denominaremos conjunto de los V-límites generalizados, pues está formado por el conjunto de medias que extienden el límite según V. Es inmediato comprobar que $c_0(T)^\perp$ es un subespacio vectorial reticulado de $\mathscr{M}(T)$, es decir, cada elemento ϕ de $c_0(T)^\perp$ es de forma $\phi = a\,\mu_1 - b\mu_2$ con $a, b \geqslant 0$, y $\mu_1, \mu_2 \in V^\bullet$. De esta observación se sigue que dada $f \in C_b(T)$ son equivalentes que $f \in c(T)$ con $\lim_V f = \alpha$ y que $\mu(f) = \alpha\ \forall \mu \in V^\bullet$.

En (4) se prueba que $\mathscr{M}(T) = \mathscr{M}_V(T) \oplus c_0(T)^\perp$, donde $\mathscr{M}_v(T)$ es el subespacio cerrado y reticulado de $\mathscr{M}(T)$ formado por las medidas que son regulares con relación $\mathscr{H}$ formado por conjuntos de la forma $f^{-1}[1, \infty)$ con $f \in c_0(T)$, y que se identifica isométricamente con el dual de $c_0(T)$.

Se pone de manifiesto así que la convergencia según el filtro V es un caso particular de la siguiente noción de convergencia.

Sea $\phi \neq J \subset \mathscr{M}(T)_1^+$. Diremos que $f \in C_b(T)$ es J-convergente hacia $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\mu(f) = \alpha\ \forall \mu \in J$ escribiremos $J - \text{lím}\, f = \alpha$.

Denotaremos por $J(T)$ (respect. $J(T)_0$) al subespacio cerrado de $C_0(T)$ formado por las funciones continuas J-convergentes (J-convergentes a cero).

Del mismo modo diremos que $E \subset \mathscr{A}(T)$ tiene J-densidad $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\mu(E) = \alpha\ \forall \mu \in J$ y escribiremos $d_J(E) = \alpha$.

La noción de J-convergencia incluye como casos particulares no sólo la convergencia según un filtro y el concepto de sucesión casi convergente de Lorentz (y sus correspondientes extensiones para el caso de semigrupos) sino que también comprende a las distintas nociones de sumabilidad, asociadas a matrices positivas infinitas cuando se aplican al caso de sucesiones acotadas. En efecto, es claro que si $A\colon l^\infty \longrightarrow l^\infty$ es un operador lineal contínuo definido por una matriz infinita $\{a_{nk} : n, k \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ con $a_{nk} \geqslant 0$ y $\sum_j a_{nj} = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ entonces, si $\mathscr{F}$ es el filtro de Fréchet en $\mathbb{N}$, se tiene que $A^*(\mathscr{F}^\circ) = J$ es una familia de medias, y que si (x_k) es acotada, la existencia de $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, x_k$ equivalen a que (x_k) sea J-convergente hacia α.

Existe una dualidad útil entre familias de medias $J \subset \mathscr{M}(T)_1^+$ y bases de filtro sobre T que conduce de modo natural al concepto de función fuertemente J-convergente:

A cada familia J, le asociamos la base de filtro

$$J \; = \{E \in \mathscr{X}(T) \colon d_J(E) = 1\}$$

Dada la base de filtro V, se puede probar que

$$V \; = \{\lambda \in \mathscr{M}(T)_1^+ : \lambda(M) = 1 \quad \forall M \in V \cap \mathscr{X}(T)\}$$

En particular $(J^\circ)^\circ = J^{\circ\circ} \supset J$.

Según la observación anterior las funciones contínuas convergentes según la base de filtro J° son precisamente las $J^{\circ\circ}$-covergentes y las denominaremos funciones fuertemente J-convergentes.

De la inclusión $J \subset J^{\circ\circ}$ se sigue que $f \in C_b(T)$ es fuertemente J-convergente hacia α.

Dichas funciones vienen caracterizadas por la siguiente proposición donde con $\bar{c}$ representamos la función constante c sobre T.

Proposición 1

Sea $\varphi \in \mathrm{C}_b(\mathrm{T})$. *Son equivalentes*:

(a) *Existe* $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$ *tal que* J-lím $|\varphi - \bar{\mathrm{c}}| = 0$.
(b) φ *es convergente según la base de filtro* $\mathrm{V} = \mathrm{J}^\circ$ (*hacia* c)

Demostración

(a) $\Rightarrow$ (b). Sea $\psi = \varphi - \bar{c}$. Si J-lím $|\psi| = 0$, fijado $\epsilon > 0$ es claro que el conjunto $Z_\epsilon = \{t \in T \colon |\psi(t)| \leqslant \epsilon\}$ es de $J^\circ = \mathrm{U}$; luego $\lim\limits_{\mathrm{U}} |\psi| = 0$, es decir $\lim\limits_{\mathrm{U}} \varphi = c$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea φ fuertemente J-convergente hacia c y $\psi = \varphi - \bar{c}$.
Como $\lim\limits_{\mathrm{U}} \psi = 0$, entonces se cumple que $\lim\limits_{\mathrm{U}} g\,\psi = 0 \;\; \forall g \in C_b(T)$.
Puesto que $J^{\circ\circ} \supset J$, resulta $g\,\psi\,J$-convergente a cero.

Sean $P_1 = \{t \in T \colon \psi(t) > 0\}$ y $P_2 = \{t \in T \colon \psi(t) < 0\}$. Fijados $\lambda \in J$ y $\epsilon > 0$, existen $Z_1 \subset P_1$ y $Z_2 \subset P_2$ con $Z_1, Z_2 \in \mathscr{X}(T)$ tales que $\lambda(P_i/Z_i) < \epsilon$ para $i = 1, 2$. En este caso existe $g \in C_b(T)$ con $|g| < 1$ cumpliendo $g(Z_1) = \{+1\}$, $g(Z_2) = \{-1\}$. (Ver Varadarajan (19)).

Para tal función $g \in C_b$ (T) se tiene $\int_T \psi(t)\, g\,(t) d\,\lambda\,(t) = 0$. Si $t \in Z_1 \cup Z_2$ entonces $|\psi(t)| = \psi(t)\, g\,(t)$ y si denotamos por A al conjunto $(P_1/Z_1) \cup (P_2/Z_2)$ resulta:

$$\int_T |\psi(t)|\, d\,\lambda(t) = \int_T |\psi(t)|\, d\,\lambda(t) - \int_T \psi(t)\, g\,(t) d\,\lambda(t) =$$

$$= \int_A |\psi(t)|\, d\,\lambda(t) - \int_A \psi(t)\, g\,(t) d\,\lambda(t)$$

luego, $\int_T |\psi(t)|\, d\,\lambda(t) \leqslant 2\, \|\psi\|\, \lambda\,(A) \leqslant 4\,\epsilon\, \|\psi\|$, es decir

$$\int_T |\psi(t)|\, d\,\lambda(t) = 0$$

y como esto es cierto para todo $\lambda \in J$, se obtiene (a).

3. PRINCIPALES RESULTADOS

Dados dos espacios topológicos completamente regulares S y T, si a: $S \longrightarrow \mathscr{M}(T)$ es una aplicación contínua para $\sigma(\mathscr{M}(T), C_b(T))$ diremos que a es un núcleo en $\mathscr{M}(T)$ con dominio en S y lo representaremos por $\{a_s\colon s \in S\}$ donde $a_s = a(s)$. Es claro que en la aplicación a le podemos asociar una aplicación lineal $A\colon C_b(T) \longrightarrow C(S)$ poniendo $A\,(f) = g$ donde $g(s) = a_s(f)$. Si se verifica que $\sup\limits_s \|a_s\| = \sup\limits_s |a_s|\,(T) < +\infty$, diremos que el núcleo es acotado. En este caso A toma valores en $C_b(S)$ y es una aplicación lineal y continua de norma $\|A\| = \sup\limits_s \|a_s\|$.

Recíprocamente, todo operador $A\colon C_b(T) \longrightarrow C_b(S)$ se puede representar por un núcleo acotado a: $S \longrightarrow \mathscr{M}(T)$, el definido por $a_s = A^*(\delta_s)$ donde $\delta_s \in \mathscr{M}(T)$ es la evaluación en $s \in S$ y A^* es el transpuesto del operador A.

Dado un subespacio $\mathscr{M}_\alpha(T)$ de $\mathscr{M}(T)$, un núcleo de sumabilidad en $\mathscr{M}_\alpha\,(T)$, es un núcleo de medidas $\{a_s\colon s \in S\} \subset \mathscr{M}_\alpha(T)$ que cumple la condición de $\mathscr{K}$-regularidad uniforme:

$$(R)\colon \forall\, E \in \mathscr{A}(T) \text{ y } \forall\, \epsilon > 0 \text{ existe } Z \in \mathscr{K}(T),\ Z \subset E, \text{ tal que}$$

$$|a_s|\,(E \setminus Z) < \epsilon \quad \text{para todo } s \in S.$$

Se puede ver fácilmente que cumpliéndose la condición (R), la función g: $S \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(s) = a_s\,(E)$ se continua para cada $E \in \mathscr{A}(T)$.

Se pueden ofrecer varios ejemplos de núcleos de sumabilidad. En cualcaso esta noción generalizada la de matriz infinita.

De forma análoga a las definiciones usuales en el caso de sucesiones y matrices infinitas, dadas dos familias de medias, no vacías, $J \subset \mathscr{M}(S)_1^+$ y $K \subset \mathscr{M}(T)_1^+$ y un núcleo $\{a_s: s \in S\} \subset \mathscr{M}(T)$, diremos que el núcleo es (K, J)-conservatorio (respect. (K, J)multiplicador α si transforma funciones K-convergentes en J-convergentes (respect. K-convergentes hacia c en J-convergentes hacia αc). Si $\alpha = 1$ se dice que el núcleo es (K, J)-regular.

Para el caso de operadores acotados se pueden dar definiciones análogas.

Nos proponemos obtener caracterizaciones directas de estos tipos de núcleos, en términos de las medidas a_s que componen el núcleo y que sean análogas a las del caso clásico de matrices infinitas.

Para parte de los resultados será preciso que nos restrinjamos a núcleos de sumabilidad especiales (que en todo caso generalizaran a las matrices infinitas).

Una condición necesaria y suficientes para que un núcleo $\mathscr{M}_V(T)$ transforme cada $f \in C_b(T)$ es una función de $C_b(S)$ es que $\sup_s \|a_s\| < +\infty$ (La necesidad se obtiene en virtud del teorema de Banach-Steinhaus teniendo en cuenta que el dual de $c_0(T)$ se puede identificar isomórficamente con $\mathscr{M}_V(T)$).

Teorema 2

Sea $\{a_s: s \in S\}$ *un núcleo de sumabilidad en* $\mathscr{M}_V(T)$.

Una condición necesaria y suficiente para que el núcleo sea $(V°, J)$*-conservatorio es que se cumpla:*

(a) $\sup_s \|a_s\| < +\infty$

(b) *Para cada* $H \in \mathcal{H}$ *existe* J-lim $a_s(H) = \alpha(H)$

(c) *Existe* J-lím $a_s(T) = b$

En este caso, existe una única medida $\mu_0 \in \mathscr{M}_V(T)$ *tal que:*

(d) J-lím $a_s\ (f) = \mu_0(f) + (b - \mu_0(T)) \lim_V f$ *para cada* $f \in c(T)$.

La medida μ_0 *queda unívocamente determinada por los valores*

$$\mu_0(H) = \alpha(H) \quad \forall\, H \in \mathcal{H}$$

Demostración

Se puede ver en (4)

Corolario 3

Con la hipótesis del Teorema 2, una condición necesaria y suficiente para que el núcleo sea $(V°, J)$*-multiplicativo con multiplicador b (respect.*

(V°, J)*-regular es que se cumplan* (a), (b) (c) *en dicho.teorema con* α(H) 0 *para cada* H $\in \mathcal{H}$ *(respectivamente, idénticas condiciones y* b = 1).

Demostración

La suficiencia se sigue del teorema anterior, teniendo en cuenta que al ser $\alpha(H) = 0 \ \forall\, H \in \mathcal{H}$, se cumple (*d*) con $\mu_0 = 0$.

La necesidad también se sigue del mismo teorema, observando que como el núcleo transforma funciones convergentes hacia cero según V en funciones J-convergentes hacia cero, aplicando (*d*) se obtiene que $\mu_0(f) = 0$ para cada $f \in c_0(T)$, es decir, $\mu_0 \in c_0(T)$ $\mu_0 \in c_0(T)^{\perp}$.

Como $\mu_0 \in \mathcal{M}_V(T)$, se sigue que $\mu_0 \equiv 0$ y en consecuencia α(H) = $= \mu_0(H) = 0$ para cada $H \in \mathcal{H}$.

Es evidente que el núcleo será (V°, J)-regular si y sólo si se cumple la misma condición y además es $b = 1$.

El teorema 2 y su corolario 3 extienden no solamente el caso de matrices regulares dadas por Kojima-Schur y Silvermann-Toeplitz, sino también las de las matrices casi conservativas, casi regulares y casi multiplicativas dadas por King (9), Duran (6) y Eizen-Laush (8).

Del mismo modo y con adecuadas elecciones de la familia J se pueden obtener resultados análogos de Schaefer (16), Duran (6) y Mursaleen (14).

Ejemplo:

Como una aplicación ilustrativa del teorema 2 y su corolario 3 indicaremos cómo se pueden obtener y completar ciertos resultados recientes de Maddox (11) y (12) relativos a la caracterización de aquellas matrices infinitas que transforman de modo consistente (es decir, conservando límites) cada sucesión fuertemente casi convergente en una sucesión convergente e igualmente las que transforman cada sucesión acotada fuertemente sumable Cesàro en una sucesión convergente.

Recordemos que, de acuerdo con la terminología de Maddox (11), las sucesiones (x_n) fuertemente casi convergentes hacia α son aquellas sucesiones acotadas para las que

$$\lim_{n} \frac{1}{n+1} \sum_{i=p}^{p+n} |x_i - \alpha| = 0 \qquad \text{uniformemente en } p$$

lo que en virtud de la carecterización de Lorentz y la proposición 1 aplicada a la familia J de los límites genaralizados de Banach equivale a que la sucesión (x_n) sea fuertemente J-convergente, es decir, a que exista $\lim\limits_{V} x_n = \alpha$ a través de la base de filtro $V = J^{\circ}$ formada por los subconjuntos $E \subset \mathbb{N}$ para los que existe y vale uno la densidad uniforme

$$d_\tau(E) = [\tau] - \lim \chi_E(n) = \lim_n \frac{1}{n+1} \sum_{i=p}^{p+n} \chi_E(i) = 1$$

uniformemente en p.

Después de esta observación la aplicación del teorema 2 y el corolario 3 a esta situación permite obtener y completar los citados resultados de Maddox.

De forma análoga recordemos que una sucesión acotada (x_n) se dice que es fuertemente sumable Cesàro hacia α si.

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \alpha| = 0$$

De forma similar, esta condición equivale a que exista $\lim\limits_{\cup} x_n = \alpha$ a través de la base de filtro $\cup$ formada por los subconjuntos $E \subset \mathbb{N}$ que poseen densidad ordinaria $d(E) = 1$, siendo

$$d(E) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi_E(i)$$

Para ver esto basta aplicar la proposición 1 a $J = C^*(\mathcal{F}^\circ)$ donde C es el operador asociado a la matriz que genera las medias de Cesàro.

Aplicando nuevamente el teorema 2 y el corolario 3 a esta sucesión se obtiene que las matrices regulares son precisamente las matrices conservativas (a_{nk}) que verifican:

$$\lim_n \sum_{k \in H} |a_{nk} - a_k| = 0$$

para cada $H \subset \mathbb{N}$ con densidad $d(H) = 0$ donde $a_k = \lim\limits_n a_{nk}$.

Un caso particularmente interesante de K-convergencia, que extiende el concepto de casi convergencia dado por Lorentz, es el que resulta de considerar una familia K de medias, invariantes respecto a un semigrupo de operadores $G \subset \mathcal{L}\ (C_b(T))$ y que además extiendan la convergencia ordinaria respecto a una base de filtro V. Más concretamente, si denotamos por $[G]$ al conjunto de tales medias invariantes $[G] = \{\ \mu \in \mathcal{M}(T)_1^+ : \mu(Lf) = \mu(f),$ $\forall\ L \in G$ y $\forall f \in C_b(T)\ \}$, consideraremos una familia de medias K de la forma $[G] \cap V^\circ$ y el correspondiente concepto de función K-convergente.

Cuando G es un semigrupo que cumple unas condiciones de tipo ergódico similares a las de Eberlein (7), pueden obtener caracterizaciones útiles de la K-convergencia. Dichas condiciones se establecen en un contexto tal que permita dar tratamiento simultáneo a las dos situaciones que surgirán cuando se considere $J = V^{\circ}$ y $J = \mathcal{M}(T)_1^+$ y que son las que consideramos en lo que sigue.

Si denotamos por $\| \ \|_J$ a la seminorma sobre $C_b(T)$, $\|f\|_J = \sup\{|\lambda(f)| : \lambda \in J\}$ diremos que G es un semigrupo J-ergódico por la derecha, si se cumplen las siguientes condiciones

(1) $L^*(J) \subset J$ para cada $L \in G$.
(2) Existe una red de operadores $(A_i)_{i \in I}$ en $\mathcal{L}$ $(C_b(T)$ verificando:

(*a*) $\lim_i \|A_i(Lf - f)\|_J = 0$ para cada $f \in C_b(T)$ y cada $L \in G$

(*b*) Para cada $f \in C_b(T)$ y cada $i \in I$, la función $A_i(f)$ es $\| \ \|_J$-adherente a $0(f)$. Donde con $0(f)$ denotamos la órbita de f bajo la acción de la envoltura convexa de g, $co(G)$). Cuando tal red existe, diremos que $(A_i)_{i \in I}$ es un G-sistema ergódico por la derecha con relación a la seminorma $\| \ \|_J$. Si además se verifica que $\lim_i \|(LA_i)f - A_i f\|_J = 0$ para cada $f \in C_b(T)$ y cada $L \in G$, diremos que $(A_i)_{i \in I}$ es un G-sistema ergódico con relación a $\| \ \|_J$ y que G es un semigrupo J-ergódico con relación a $\| \ \|_J$ y que G es un semigrupo J-ergódico.

Cuando $J = \mathcal{M}(T)_1^+$ entonces es $\| \ \|_j = \| \ \|_\infty$ y el semigrupo se denominará simplemente semigrupo ergódico por la derecha (resp. ergódico).

Se demuestra entonces que $K = [G] \cap f \neq \phi$ y se caracterizan las funciones K-convergentes por el siguiente resultado, donde con B denotamos el cierre uniforme en $C_b(T$ del subespacio engendrado por las funciones $\varphi + Lf - f$ con $\lim_V \varphi = 0$, $L \in G$ y $f \in C_b(T)$ en el caso $J = V^{\circ}$ o el engendrado por $Lf - f$ si $J = \mathcal{M}(T)_1^+$.

Teorema 3

Sea $G \subset \mathcal{L}$ $C_b(T))$ *un semigrupo* J-*ergódico y* $(A_i)_{i \in I}$ *un* G-*sistema ergódico relativo a* $\| \ \|_J$. *Dado* $f \in C_b(T)$, *son equivalentes:*

(a) $[G] \cap J - \lim f = c$,

(b) $\lim_i \|A_i(f - \overline{c})\|_J = 0$,

(c) $f - \overline{c} \in B$.

Demostración

Puede verse en (3).

En el caso de que G sea el semigrupo engendrado por un único operador C cumpliendo $C(\bar{1}) = \bar{1}$, en (7) se comprueba que $C_n = \frac{1}{n+1}(I + C + \ldots + C^n)$ es un sistema ergódico. En tal caso se obtiene que una función $f \in C_b(T)$ es $[C]$-convergente a $c \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\lim_n \|C_n(f) - \bar{c}\|_\infty = 0$ (Donde con [C] representamos el conjunto de medias invariantes respecto al semigrupo engendrado por C).

Cuando $K = [C] \cap V^\circ$ se obtiene el siguiente resultado. Si. $K = [G]$ se obtiene un resultado análogo.

Teorema 4

Sea $\{a_s : s \in S\}$ *un núcleo de sumabilidad en* $\mathcal{M}_V(T)$ *y* $G \subset \mathcal{L}(C_b(T))$ *un semigrupo* V°*-ergódico de operadores.*

Una condición necesaria y suficiente para que el núcleo sea $([G] \cap V^\circ, J)$*-con-servativo es que se cumpla:*

(a) $\sup_s \|a\| < +\infty$,

(b) *Existe* $J\text{-}\lim_s a_s(H) = \alpha(H) \;\; \forall H \in \mathcal{H}$

(c) $J\text{-}\lim_s a_s(T) = b$.

(d) *Para cada* $L \in G$ *y cada* $f \in C_b(T)$ *existe* $J\text{-}\lim_s a_s(Lf - f) = a_L(f)$.

Demostración

La necesidad es inmediata teniendo en cuenta el teorema 2 y el hecho de que cualquier función contínua convergente según V es $[G] \cap V^\circ$-convergente y que para cualquier $f \in C_b(T)$ y $L \in G$, la función $(L-I)f$ es $[G] \cap V^\circ$-convergente hacia cero.

Suficiencia: En virtud de (a), el núcleo define un operador acotado A. Por aplicación del teorema 2, $A(\varphi)$ es J-convergente para cada $\varphi \in c_0(T)$ y por (d) la función $[A(L - I)]f$ es J-convergente para cada $f \in C_b(T)$.

Entonces, en virtud del teorema 3 el operador A transforma funciones de B en J-convergentes.

Si f es $[G] \cap V^\circ$-convergente hacia c, entonces $f = \bar{c} + g$ donde $g \in B$ y Af *resulta* J-convergente hacia

$$J\text{-}\lim a_s(f) = c(J\text{-}\lim a_s(T)) + J\text{-}\lim a_s(g)$$

ya que por (c) existe J-lím $a_s(T)$.

Nota: es evidente que si $\alpha = 0$ *y* $a_L = 0 \;\; \forall L \in G$, *el núcleo resulta* $([G] \cap V^\circ, J)$*-multiplicativo con multiplicador* b.

Si es $J = [C]$ donde $C \in \mathcal{L}(C_b(S))$ cumple la condición $C(\bar{1}) = \bar{1}$, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 5.

El núcleo de sumabilidad $\{a_s: s \in S\} \subset \mathcal{M}_V((T)$ *es* ([G] $\cap$ V°, [C])-*conservativo (respect. multiplicativo con multiplicador b si y sólo sí*: (a) $\sup_s \; a_s < +\infty$, (b) *Existe* [C]-lím $a_s(H) = \alpha(H)$ $\forall H \in \mathcal{H}$ *(respct.* $\alpha = 0$), (c) [C]-lím $a_s(T) = b$, (d) *Existe* $\lim_n \; C_n[(A\circ(L - I))f]$ *en* $C_b(S)$ *para cada* $L \in G$ *y cada* $f \in C_b(T)$ *(donde* A *es operador asociado al núcleo).*

Demostración.

Basta tener en cuenta la caracterización de las funciones [C] convergentes del teorema 3 y aplicar el teorema 4.

Obsérvese que en todos los resultados anteriores, la razón que hay para considerar núcleos en $\mathcal{M}_V(T)$ es para tener garantizada la condición (a) del teorema 2 y el hecho de que los núcleos sean de sumabilidad interviene para dar sentido a la condición (b) de dicho teorema.

Si en lugar de considerar núcleos de sumabilidad en $\mathcal{M}_V(T)$, se consideran núcleos acotados arbitrarios, se pueden obtener resultados similares a los anteriores. En lo que sigue, $K = U°$ siendo U una base de filtro en T, o $K = \mathcal{M}(T)^+_1$.

Proposición 6

Sea $G \in \mathcal{L}(C_b(T))$ *un semigrupo K-ergódico y* $\{a_s: s \in S\} \subset \mathcal{M}(T)$ *un núcleo acotado (no necesariamente de sumabilidad).*

Una condición necesaria y suficiente para que el núcleo se ([G] $\cap$ K, J)-*conservativo (respectivamente multiplicativo con multiplicador* α) *es que se cumpla:*

(a) *Existe* J- $\lim_s \; a_s(f)$ *(resp. igual a cero) para cada* $f \in K(T)_0$.

(b) *Existe* J-$\lim_s \; a_s(T)$ *(resp. igual a* α).

(c) *Para cada* $L \in G$ *y cada* $f \in C_b(T)$ *existe* J- $\lim_s \; a_s(Lf-f)$ *(resp. igual a cero).*

Demostración

Siendo la necesidad de (b) evidente, la necesidad de (a) se sigue de la observación de que cada $f \in K(T)_0$ es $K \cap [G]$-convergente a cero y la de (c) se obtiene de modo similar, teniendo en cuenta que cada función de la forma Lf-f($f \in C_b(T)$, $L \in G$) es [G] $\cap$ K-convergente a cero.

La suficiencia de obtiene razonando como en la prueba del teorema 4.

Explícitamente, el caso $K = \mathcal{M}(T)_1^+$ es el siguiente:

Corolario 7

Sea $G \subset \mathcal{L}(C_b(T))$ *un semigrupo ergódico, formado por operadores positivos y verificando* $L(\bar{1}) = \bar{1}$ *para cada* $L \in G$.

Una condición necesaria y sufiente para que un núcleo acotado $\{a_s \colon s \in S\} \subset \mathcal{M}(T)$ *sea* ([G], J)*-conservativo resp. regular) es que se cumpla:*

(a) *Existe* $J\text{-}\lim_s a_s(T)$ *(resp. es igual a uno)*

(b) *Para cada* $L \in G$ *y cada* $f \in C_b(T)$ *existe* $J\text{-}\lim_s a_s(Lf\text{-}f)$ *(resp. es igual* a cero).

En la situación planteada en la proposición 6 se puede dar una caracterización de los núcleos acotados que transforman funciones $[G] \cap K$-convergentes a cero en funciones J-convergentes a cero.

Proposición 8

En las condiciones de la proposición 6, *el núcleo acotado* $\{a_s \colon s \in S\} \subset \mathcal{M}(T)$ *transforma funciones* [G] ∩ K*-convergentes a cero en funciones* J*-convergentes a cero, sí y sólo si se cumple:*

Para cada $L \in G$ *y cada* $f \in C_b(T)$ *es* $J\text{-}\lim_s a_s(Lf\text{-}f) = 0$.

Cuando se considera $T = S = \mathbb{N}$, $J = [G]$ son los límites de Banach $[\tau]$, y $A = (a_{nk})$ es una matriz infinita, la aplicación del corolario 6 nos conduce a los teoremas de Duran (6) y P. Shaefer (16) relativos a la caracterización de las matrices fuertemente conservativas (resp. fuertemente regulares) que son las que transforman sucesiones acotadas casi convergentes (resp. al mismo valor).

Finalmente si en el corolario 7 se toma $[G] = [\tau]$, $J = \mathcal{T}^\circ$ y A una matriz infinita, se obtiene la caracterización dada por Lorentz (10) de las matrices fuertemente regulares (transforman sucesiones acotada casi convergentes al mismo valor).

Cuando $T = S$, se pueden dar ejemplos de núcleos de sumabilidad (J, J)-regulares que no sean (V°, V°)-conservativos, generalizando los ejemplos de matrices infinitas que transforman sucesiones casi convergentes en casi convergentes que no son regulares.

Consideremos la familia $J = [G] \cap V^\circ$ siendo G un semigrupo V°-ergódico de operadores. Para obtener uno de tales ejemplos, basta requerir la existencia de una función $\alpha \in C_b(S)$ que sea J-convergente pero no V°*-convergente (La existencia de tal función está demostrada en (3)).*

Fijado $\mu \in J$ definimos $a_s(f) = \alpha(s)\mu(f)$. Por ser μ una media G-invariante, se cumple $a_s(Lf-f) = 0 \quad \forall L \in G, \forall f \in C_b(S)$ y cada $s \in S$, por lo que se verifica la condición (d) del teorema 4. Como $\mu \in V^\circ$, también se cumple la condición J-lím $a_s(f) = 0$ si $f \in c_0(S)$ y como $J\text{-}\lim\limits_s \; a_s(f) =$ $(J\text{-lím } \alpha(s))\ \mu(\bar{1}) = \bar{1}$, aplicando la proposición 2 deducimos que el núcleo es (J, J)-regular, sin embargo la función $\bar{1}$ se transforma en la función α que no converge según V.

Finalmente, como una aplicación de los resultados anteriores se pueden obtener los resultados de Atalla(2) relativos a dos problemas (a) y (b) que son nuestra terminología se plantean en los siguientes términos

Si A y B son matrices regulares y positivas y $[A]$ y $[B]$ son las medias invariantes respecto de los semigrupos de las matrices engendradas por A y B, se trata de dar solución a los siguientes problemas:

(a) Caracterizar A y B para cada sucesió $\mathcal{F}^\circ \cap [A]$-convergente sea $\mathcal{F}^\circ \cap [B]$-convergente al mismo valor.

(b) Idem para que cada sucesión $\mathcal{F}^\circ \cap [A]$-convergente sea $B^*(\mathcal{F}^\circ)$-convergente al mismo valor.

Una primera observación indica que $(a) \Rightarrow (b)$. El problema (a) se puede expresar diciendo que el operador identidad sea $(\mathcal{F}^\circ \cap [A],\ \mathcal{F}^\circ \cap [B])$-regular. Si aplicamos la proposición 6 resulta que una condición necesaria para que se cumpla (a) es que:

$$\lim_i \ \overline{\lim_n} \ |B_i(y)_n| = 0$$

para cada $y \in l^\infty(\mathbb{N})$ de la forma $y = Ax - x$ con $x \in l^\infty(\mathbb{N})$.

El problema (b) se puede expresar diciendo que B es $(\mathcal{F}^\circ \cap [A], \mathcal{F}^\circ)$-regular. Aplicando nuevamente G obtenemos que una condición necesaria y suficiente para que se verifique (b) es que

$$\lim_n \ (B(Ax - x))_n = 0$$

para cada $x \in l^\infty(\mathbb{N})$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALEXANDROV, A. "Additive Set-Functions in Abstract Spaces". *Mat, Sb.* (N. S.) 8(50(1940), p.p. 307-348.

[2] ATALLA, R. "the Inclusion of a Bounded Convergence Field in the espace of Almost Convergent Sequences". *Glasgow Math. Journal* 13(1972), pp, 82-90.

[3] BALIBREA, F. "Sumabilidad en Espacios Topológicos. Funciones Continuas Casi Convergentes". Facultad de Quím. y Matemát. Univ. de Murcia.

[4] BALIBREA, F.; VERA, G. "Sumabilidad en Espacios Topológicos. Teorema de Kojima-Schur Generalizado". Actas VIII jornadas Hispano Lusas, Vol III (1981).

[5] DAY, M. "Amenable Semigrups" *Illinois J. Math.* 1(1957), p.p. 509-544.

[6] DURAN, J. P. "Infinite Matrices and Almost Convergence" *Can. J. Math.* Vol. 26. No. 2(1974) p.p. 372-387.

[7] EBERLEIN, W. F. "Abstract Ergodic Theorem and Weak Almost Periodic Functions". *Trans Amer. Math. Soc.* 67 (1949), pp. 217-240.

[8] EIZEN, C., LAUSH, G. "Infinite Matricrs and Convergence" *Math. Japan* 14(1969), p.p. 137-143.

[9] KING, J. P. "Almost Sumable Sequences". *Proc. Amer. Math. Soc.* 17(1966), p.p. 1219-1225.

]10] LORENTZ, G. A. Contribution to the Theory of Divergent Sequences". *Acta Math.* 80. p.p. 167-190.

[11] MADDOX, I. J. "A New Type of Convergence" *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 83(1978), p.p. 61-64.

[12] MADDOX, I. J. "On Strong Almost Convergence" *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 85(1979, p.p. 345-350.

[13] MAH, P, F. "Summability in Amenable semigroups". *Trans. Amer. Math.* Vol 156(1971), p.p. 391-403.

[14] MURSALEEN. "On Some New Invariant Methods of Summabilty" *Quart. J. Math. Oxford Ser* (2)34(1983) p.p. 77-86.

[15] RUCKLE, W. H. "Sequences Spacces" *Pitman Publishing Ltd.* (1981).

[16] SCHAEFFER, P. "Almost Convergent and Almost Summable Sequences" *Proc. Amer. Math. Soc.* 20(1969), p.p. 51-54.

[17] SCHAEFER, P. "Matrix Transformation of Almost Convergent Sequences". *Math. Zeit.* 112 (1969). p.p. 321-325.

[18] SCHAFER, P. "Matrix Transformation of Almost Convergent Sequences II" *Matg. Zeit,* 120 (1971), p.p. 363-364.

[19] VARADARAJAN, V. "Measures on Topological Spaces". *Trans. Amer. Math. Soc.* (2)48) (1965), p.p. 161-228.

[20] WIILANSKY, A. "Summability trough Functional Analysis". *North-Holland P.* (1984).

[21] ZELLER, K., BEEKMANN, W. "Theorie der Limitierungsverfahren". Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete. *Band* 15(1970).

Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia