Sobre las convergencias débiles y sus topologías

Por Maria del Carmen de las Obras

Recibido: 7 de noviembre de 1984

Presentado por el académico correspondiente D. Antonio Plans

Abstract

Given a real separable Hilbert space H, we denote with $G(H)$ the Geometry of the closed linear subspaces of H, with $S = \{E^{(n)} \mid n \in N\}$ a sequence in $G(H)$ and with $[C]$ the closed linear hull of the set C.

In provious papers we have defined and characteriszed the weak convergences in $G(H)$,

$E^{(n)} \rightharpoonup E$, $E^{(n)} \overset{a}{\rightharpoonup} E$, $E^{(n)} \overset{b}{\rightharpoonup} E$.

Now we report a topological characterization of these convergences by the weak topology τ_W and the finest topology with the weak convergence, τ_c.

INTRODUCCION

Se considera el espacio de Hilbert separable real H; designamos con $G(H)$ la geometría de los subespacios lineales cerrados de H, con $S = \{E^{(n)} \mid \in N\}$ una sucesión en $G(H)$ y con $[C]$ la envoltura lineal cerrada de un conjunto C.

En[1] se definieron las convergencias fuerte y débil de una sucesión S

$$E^{(n)} \to E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in E,\ \exists\ x_n \in E^{(n)} \ni x_n \to x \\ \text{Si } x_{l_n} \in E^{(l_n)} \wedge x_{l_n} \to x \Rightarrow x \in E \end{cases}$$

$$E^{(n)} \rightharpoonup E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in E,\ \exists\ x_n \in E^{(n)} \ni x_n \rightharpoonup x \\ \text{Si } x_{l_n} \in E^{(l_n)} \wedge x_{l_n} \rightharpoonup x \Rightarrow x \in E \end{cases}$$

Posteriormente fueron estudiadas y caracterizadas en[5,6]. La convergencia fuerte verifica los tres axiomas de convergencia de Frechet, es una L*-convergencia, pero para la convergencia débil encontramos un contraejemplo[8], de una sucesión de hiperplanos, $\{\pi_n\}$ tal que $\pi_n \not\rightharpoonup H$ y toda subsucesión $\{\pi_{h_n}\}$ de $\{\pi_n\}$ contiene a su vez una subsucesión $\{\pi_{k_n}\}$ que converge débilmente a H, por consiguiente no se verifica el tercer axioma y es una L-convergencia. Este hecho nos sugirió la definición de una nueva convergencia[8] $E^{(n)} \overset{a}{\rightharpoonup} E \Leftrightarrow [\underset{\rightharpoonup}{\text{es}}\, E^{(l_n)}] = E$, $\forall (l_n) \subset (n)$ que es la mínima L*-convergencia que contiene a la convergencia débil $\rightharpoonup$.

(Los superíndices[1] se refieren a la bibliografía).

Como la convergencia débil de una sucesión S implica la fuerte de los ortogonales[12] pero el recíproco no es cierto[5], definimos otra convergencia[8] $E^{(n)} \xrightarrow{b} E \Leftrightarrow E^{(n)\perp} \longrightarrow E^{\perp}$. Esta convergencia verifica los tres axiomas de Frechet. Además, $E^{(n)} \xrightarrow{b} E$ sí y sólo sí $[\underline{es}\ E^{(l_n)}] = E\ \forall\ (l_n) \subset (n)$, y contiene a las convergencias $\xrightarrow{a}$ y $\xrightarrow{b}$.

El objeto de este trabajo es completar el estudio sobre las convergencias anteriores que fue iniciado en[10,11]. La convergencia fuerte viene caracterizada por la topología métrica[2].

2.–

Sea S una sucesión en G(H) y $\mathfrak{U}$ una base de entornos de la topología débil τ_d definida por hiperplanos.

Definición.– Dada S llamamos núcleo de S y lo representamos por $N(S)$ al conjunto $\cap\ [E^{(n)}, E^{(n+1)},...]$ y núcleo estricto a $N_e(S) = \cap\ [E^{(h_1)},..., E^{(h_2)},...]$, $(h_n) \subset (n)$. Ambos conjuntos son subespacios lineales cerrados con las siguientes propiedades:

$$N(S') \subset N(S)\ \forall\ S' \subset S$$
$$N_e(S') \supset N_e(S)\ \forall\ S' \subset S$$
$$N_e(S) = \bigcap_{S' \subset S} N(S')$$

El siguiente teorema es una caraterización topológica del núcleo estricto de S.

Teorema 1.– $N_e(S) = \{x \in H |\ \forall\ \tau_d$-entorno subbásico $U(x)$, corta a casi todos los términos de $S\}$.

Esta caracterización de lugar a una L*-convergencia definida por $E^{(n)} \xrightarrow[N_e]{} E \Leftrightarrow N_e(S') = E\ \forall\ S' \subseteq S.$

3.–

Al considerar τ_d-entornos básicos, obtenemos una caracterización de la convergencia $\xrightarrow{b}$.

Definición 2.– $M(S) = \{x \in H | \ \forall \ \tau_d$-entorno básico corta a casi todo $E^{(n)}\}$. Es un subespacio lineal cerrado. Si denotamos con $A_{S'} = \cup E^{(h_n)}$, $S' = \{E^{(h_n)} | (h_n) \subset (n)\}$, $M(S = \bigcap_{S' \subset S} \overline{A}^{\tau_d}_{S'}$. Es obvio que esta propiedad se puede extender a otras topologías, es decir $\bigcap_{S' \subset S} \overline{A}^{\tau}_{S'} = \{x \in H | \forall \ \tau$-entorno básico corta a casi todo $E^{(n)}\}$.

Definición 3.– Dados S y $M(S)$, un punto x de $M(S)$ se dice de 1^a clase si para todo τ_d-entorno básico $U(x)$, existen subsucesiones $S' = \{E^{(h_n)}\}$ y $\{x_{h_n}\}$ tales que $x_{h_n} \in U(x) \cap E^{(h_n)}$ y $|x_{h_n}| \leqslant K_{S'}$. En caso contrario se dice de 2^a clase.

El conjunto de los puntos de 1^a clase de $M(S)$ es un subespacio $M_1(S)$.

Teorema 2.– $E^{(n)} \xrightarrow{b} E \Leftrightarrow E = M_1(S') \ \forall \ S' \subset S.$

Dadas S y $S' \subset S$ denotamos $\tilde{A}_{S'} = \{x \in H | \ \exists \{x_m | m \in N\} \subset \cup E^{(h_n)} \ni x_m \rightharpoonup x\}$ y a partir de aquí, $\tilde{M}(S) = \bigcap_{S' \subset S} \tilde{A}_{S'}$. Es un subespacio lineal cerrado contenido en $\tilde{M}(S)$, verificando además $\tilde{M}(S) = \tilde{M}(S') \ \forall \ S' \subset S \Leftrightarrow \underset{\rightharpoonup}{\mathrm{es}}\, S = \underset{\rightharpoonup}{\mathrm{es}}\, S' \ \forall \ S' \subset S$ y por consiguiente $\tilde{M}(S) = \bigcap_{S' \subset S} \underset{\rightharpoonup}{\mathrm{es}}\, S'$.

Teorema 3.– $E^{(n)} \xrightarrow{a} E \Leftrightarrow M(S') = E \ \ \forall \ S' \subseteq S.$

4.–

Consideremos la topología τ_c, cuya base de entornos del origen viene dada por los conjuntos $B = E^\circ \cup [\bigcup_1^\infty E_{\epsilon_i}(E^{(p_i)})]$, donde E° es una bola de centro el origen y radio r_0; $L^{(p_i)}$ subespacio de codimensión p_i, $E^{(p_i)}$ bolas contenidas en $L^{(p_i)}$ con $r_i < r_{i+1}$ $r_i \to \infty$; $E_{\epsilon_i}(E^{(p_i)})$ entornos de estas bolas con $\epsilon_i \to 0$.

Definición 4.– $M^*(S) = \{x \in H | \ \forall \ \tau_c$-entorno básico $B(x)$ corta a casi todo $E^{(n)}\}$.

Es un subespacio lineal cerrado, intersección de las τ_C-clausuras,

$$M^*(S) = \bigcap_{S' \subset S} A^{\tau}_{S'}, c \quad \text{y}\ M^*(S) \subset M(S).$$

Definición 5– $M_1^*(S)$ es un suebspacio de los puntos de 1ª clase para $M^*(S)$ definido de modo análogo a $M_1(S)$.

Teorema 4.– $E^{(n)} \xrightarrow{a} E \Leftrightarrow E = M_1^*(S')\ \ \forall\, S' \subseteq S^{1.1}$.

En general $\tilde{M}(S) \subset M_1^*(S)$ para toda sucesión S. Comparando los teoremas 3 y 4, si $E^{(n)} \xrightarrow{a} E$, ambos subespacios coinciden.

5.–

El siguiente paso es la caracterización de la convergencia débil $E^{(n)} \rightharpoonup E$. Sabemos que la topología asociada a una L- convergencia es la misma que la correspondiente a la mínima L*-convergencia que la contiene[1]. Por ello consideremos la topología τ_c.

Definición 6.– $M_2^*(S) = \{x \in H |\ \forall\, \tau_c$-entorno básico de x, existe una sucesión de norma acotada$\{x_n\}$, tal que $x_n \in E^{(n)} \cap B(x)\}$.

Proposición 1.– $M_2^*(S) = \underset{\rightharpoonup}{li}\, S$.

Dem.

Si x es un vector del límite inferior débil de una sucesión S, existe una sucesión de vectores$\{x_n\}$ con $x_n \in E^{(n)}$ tal que $x_n \rightharpoonup x$, por consiguiente $|x_n| < \infty$ y todo τ_c-entorno básico $B(x)$ corta a $E^{(n)}$.

Recíprocamente, dado un vector x de $M_2^*(S)$ y un τ_c-entorno $B(x)$, la sucesión$\{x_n\}$ con $x_n \in E^{(n)} \cap B(x)$ de norma acotada, es débilmente convergente a x y pertenece por tanto a $\underset{\rightharpoonup}{li}\, S$.

Proposición 2.– $M_2^*(S)$ es un subespacio lineal cerrado contenido en $M_1^*(S)$.

Dem.

Podría demostrarse directamente, pero es evidente por las propiedades del límite inferior débil de una sucesión S[6].

Teorema 5.– $E^{(n)} \rightharpoonup E$ sí y sólo sí $E = M_2^*\ (S)\ \ \forall\, S' \subset S$.

Dem.

Se deduce de la proposición anterior y de las propiedades de los límites inferiores[6].

Finalmente, para completar este estudio, los subespacios $M(S)$ y $M^*(S)$ definen dos nuevas convergencias que verifican los tres axiomas de Frechet de convergencia.

Definición 7.– $E^{(n)} \xrightarrow[M(S)]{} E$ sí y sólo sí $M(S') = E \quad \forall\, S' \subseteq S$.

$$E^{(n)} \xrightarrow[M^*(S)]{} E \text{ sí y sólo si } M^*(S') = E \quad \forall\, S' \subseteq S.$$

Resumiendo tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & M^*(S) \arrow[dr, phantom, "\subset"] & \\
M_2^*(S) \arrow[r, phantom, "\subset"] & M_1^*(S) \arrow[ur, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & & M(S) \\
 & & M_1(S) \arrow[ur, phantom, "\subset"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & & E^{(n)} \xrightarrow[M^*(S)]{} E \arrow[dr, Rightarrow] & \\
E^{(n)} \longrightarrow E \arrow[r, phantom, "\Rightarrow"] & E^{(n)} \xrightarrow{a} E \arrow[urr, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow] & & & E^{(n)} \xrightarrow[M(S)]{} E. \\
 & & & E^{(n)} \xrightarrow{b} E \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Quiero expresar mi agradecimiento al prof. A. Plans de la Universidad de Zaragoza por la supervisión de este trabajo.

BIBLIOGRAFIA

[1] DUDLEY, R. M.: "On sequential convergence". *Trans. Amer. Math. Soc.*, 112 (1964).

[2] KURATOWSKY, C.: "Sur la notion de límite topologique d'ensembles". *Rocznik Pol. Tow. Matem.* XXI, 219-225.

[3] LORCH, E. R. : "Spectral theory". Oxford University Press. (1962).

[4] MARTIN, E. : "Construcción de la topología débil en el espacio de Hilbert" *Rev. Mat. Hisp. Amer.*, 221-229 (1974).

[5] OBRAS, M. C.: "Sobre convergencia en el espacio de Hilbert de sucesiones de subespacios de dimensión y codimensión finita II". *Rev. Mat. Hisp. Amer.* 34. 276-292 (1974).

[6] ———: "Convergencias en $G(H)$" *Rev. Mat. Hisp. Amer.* 40, 177-292 (1980).

[7] ———: "Propiedades de los límites superiores e inferiores en $G(H)$". *Rev. Acd. Ciencias Zaragoza* 34, 49-52 (1979).

[8] ———:L y L*-convergencias en $G(H)$" *Rev. Mat. Hisp. Amer.* 41, 97-101 (1981).

[9] ———:"Nucleo y núcleo estricto de una sucesión de subespacios de $G(H)$" *Actas VIII J.M. H.L.* 340-343, Coimbra 1981.

[10] OBRAS, M. C.: "topological Characterization of *a* and *b* convergences" *Rev. Mat. Hisp. Amer.* 42, 187-193 (1982).

[11t ————: "La topología τ_c y las convergencias débiles en la geometría de los subespacios del espacio de Hilbert" Stochastica, V. núm. 2 119-123 (1981).

[12] PLANS, A. : Propiedades angulares de la convergencia en el espacio de Hilbert" *Rev. Mat. His. Amer.* 21. núm. 3-4 (1961).

[13] ————: "Una base de la topología débil en el conjunto de los rayos del espacio de Hilbert definida mediante hiperplanos" Actas IX R.A.M.E. (1970).

[14] SCHAEFER, H. H. :"Topological vector spaces" Macmillan Series in Advenced Mathematics and Theoretical Physics (1966).

Dpto. Análisis Matemático
Universidad de Valencia