Desigualdades para las cotas de los desarrollos asintóticos

Por Baltasar Rodriguez-Salinas

Recibido: 4 junio 1986

Abstract

Gorny established for the first time in [2] inequalities between the upper bound of a function on an interval and those of its n firts derivatives. Similar results were found later by H. Cartan [1] and Kolmogoroff [4] for the line, and the author for angle of the complex plane. In this paper we shall establish similar inequalities for the best bounds

$$\mathrm{M}_n = \sup_{z \in C} \left| \frac{f(z) - \sum_{0}^{n-1} a_k z^k}{z^n} \right|$$

of an asymptotic expansion on a subset C of the complex with $0 \in \partial C$. In [6] we have given analogous inequalities for the particular case of an angle $A_\alpha = \{z\colon |\arg z| \leqslant \alpha\pi/2\}$ $(\alpha \leqslant 2)$ and $\Lambda_\alpha = \{z\colon |\arg z| = \alpha\pi/2\}$ $(\alpha \leqslant 1)$. These inequalities are fundamental for the solution of the problem announced in [7] of equivalence of classes of functions with asympotic expansion on a subset of the complex plane.

Resumen

Gorny [2] fue el primero que estableció desigualdades entre las cotas superiores, sobre un intervalo, de una función y de sus n primeras derivadas. Un resultado semejante fue encontrado más tarde por H. Cartan [1] y de manera más precisa por Kolmogoroff [4] para la recta, y por nosotros para un ángulo del plano complejo. Desigualdades análogas para las cotas óptimas

$$M_n = \sup_{z \in C} \left| \frac{f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k}{z^n} \right|$$

de un desarrollo asintótico sobre un conjunto C, $0 \in \partial C$, del plano complejo serán establecidas en

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por la ayuda n° 0338/84 de la CAICYT.

este trabajo. Anteriormente, establecimos en [6] desigualdades análogas para el caso particular de un ángulo $A_\alpha = \{z: |\arg z| \leqslant \alpha\pi/2\}$ $(\alpha \leqslant 2)$ y $\Lambda_\alpha = \{z: |\arg z| = \alpha\pi/2\}$ $(\alpha \leqslant 1)$. Estas desigualdades son fundamentales para la solución del problema de equivalencia de clases de funciones con desarrollo asintótico sobre un conjunto del plano complejo, anunciada en [7].

1. Definición.— De manera análoga que en [8] utilizaremos las siguientes notaciones:

1. C es un conjunto conexo y acotado del plano complejo ampliado Z que consta al menos de dos puntos y tal que $0 \in \partial C$.
2. B es la componente de $Z - \overline{C}$ que contiene el punto $z = \infty$ y $A = Z - B$.
3. $w(z)$ es la representación conforme de B sobre $\{w: |w| > 1\}$ que se puede escribir en la forma

$$w(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^k} \qquad (c_0 > 0)$$

   en un entorno de $z = \infty$.
4. $\sigma(r) = \sup\{\log|w(z)|: \ |z| = r, \ z \in B\}$ para $r > 0$.
5. $\varphi(t) = \inf\left\{\dfrac{e^{t\sigma(r)}}{r}: \ r > 0\right\}$ para $t \geqslant 1$.

Igualmente, $w_\rho(z)$, $\sigma_\rho(r)$ y $\varphi_\rho(t)$ son las funciones correspondientes a la unión B_ρ de B y $\{z: |z| > \rho\}$. Esto si $\rho > 0$ y B_ρ es simplemente conexo, cosa que ocurre en muchos casos para ρ suficientemente pequeño. De manera general, si C_ρ es la componente de $C \cap \{z: |z| \leqslant \rho\}$ tal que $0 \in \overline{C}_\rho$, B_ρ es la componente de $Z - \overline{C}_\rho$ que contiene a $z = \infty$.

2. Lema.— Si $\sigma(r)$ *es derivable en un entorno de* 0 *y*

$$\lim_{r \to 0} \frac{r\sigma'(r)}{\sigma(r)} = \frac{1}{\beta} \qquad (0 \in \overline{B}) \tag{2.1}$$

para $0 < \beta < +\infty$. *Entonces*

$$\lim_{t \to +\infty} t\sigma\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right) = e^{-1}\beta \tag{2.2}$$

y

$$\mu = \inf\left\{t\sigma\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right): \ t \geqslant 1\right\} > 0. \tag{2.3}$$

Demostración.– En efecto, si $f(t) = \log \varphi(t)$ y ponemos

$$\log \frac{1}{r_1} = f(t)$$

y

$$\log \frac{1}{r_2} = f(t) - tf'(t),$$

tendremos

$$\log \frac{r_2}{r_1} = tf'(t) = \frac{\sigma(r_2)}{r_2 \sigma'(r_2)}$$

y

$$\lim_{t \to \infty} \log \frac{r_2}{r_1} = \lim_{r_2 \to 0} \frac{\sigma(r_2)}{r_2 \sigma'(r_2)} = \beta.$$

Como por otra parte, por el teorema de los incrementos finitos, se tiene

$$\frac{\log \sigma(r_2) - \log \sigma(r_1)}{\log r_2 - \log r_1} = \frac{r\sigma'(r)}{\sigma(r)}$$

para cierto r: $r_1 < r < r_2$, se deduce

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\log \sigma(r_2) - \log \sigma(r_1)}{\log r_2 - \log r_1} = \lim_{r \to 0} \frac{r\sigma'(r)}{\sigma(r)} = \frac{1}{\beta}$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{t \to +\infty} \log \frac{\sigma(r_2)}{\sigma(r_1)} = 1$$

y

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\sigma(r_2)}{\sigma(r_1)} = e.$$

Luego

$$\lim_{t \to +\infty} t\sigma\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\sigma(r_1)}{r_2 \sigma'(r_2)} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{\sigma(r_1)}{\sigma(r_2)} \lim_{r_2 \to 0} \frac{\sigma(r_2)}{r_2 \sigma'(r_2)} = e^{-1}\beta.$$

De donde por la continuidad de $t\sigma(1/\varphi(t))$ en $[1, +\infty)$ resulta $\mu > 0$.

3. Proposición.— Supongamos:

1. *$\sigma(r)$ es derivable en un entorno de 0 y*

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\sigma'(r)}{\sigma(r)} = \frac{1}{\beta} \qquad (0 \in \overline{B}) \tag{3.1}$$

para $0 < \beta + \infty$.

2. *$\alpha, \lambda_0, \rho_0, k, n, M_0$ y M_n son números positivos que satisfacen $\alpha \geqslant 1$, $\rho_0\, \varphi(\alpha) \geqslant 1$ y $k \leqslant n$.*

3.

$$\Phi_k\,(M_0, M_n) = \inf_{\rho \leqslant \rho_0} \varphi\left(\frac{\lambda_0}{\sigma(\rho)}\,\frac{n}{k}\right)^k [M_0 + M_n \rho^n]. \tag{3.2}$$

Entonces, si t^*/n es la solución de la ecuación

$$\varphi\left(\frac{t^*}{n}\right) = \text{máx}\left\{\sqrt[n]{\frac{M_n}{M_0}},\ \varphi(\alpha)\right\}, \tag{3.3}$$

resulta

$$\Phi_k\,(M_0, M_n) \leqslant 2\lambda^k \varphi\left(\frac{t^*}{k}\right)^k M_0 \tag{3.4}$$

para una constante λ independiente de k, n, M_0 y M_n.

Demostración.— En primer lugar observemos que por ser $\varphi(t)$ creciente y $\varphi(t^*/n) \geqslant \varphi(\alpha)$ es $t^*/n \geqslant \alpha$. Por tanto, si tomamos

$$\frac{1}{\rho} = \varphi\left(\frac{t^*}{n}\right),$$

tendremos $\rho \leqslant 1/\varphi(\alpha) \leqslant \rho_0$ y

$$\frac{t^*}{n}\ \sigma(\rho) \geqslant \mu > 0$$

en virtud de (2.3). De esto resulta

$$\varphi\left(\frac{\lambda_0}{\sigma(\rho)}\,\frac{n}{k}\right) \leqslant \varphi\left(\frac{\lambda_0}{\mu}\,\frac{t^*}{k}\right)$$

para $\rho = 1/\varphi(t^*/n) \leqslant \rho_0$.

Como por otra parte

$$M_0 + M_n \rho^n \leqslant 2M_0,$$

se deduce

$$\Phi_k\ (M_0, M_n) \leqslant 2\varphi \left(\frac{\lambda_0}{\mu}\ \frac{t^*}{k}\right)^k M_0 \leqslant 2\lambda^k \varphi \left(\frac{t^*}{k}\right)^k M_0$$

para

$$\lambda = \sup_{t \geqslant 1} \frac{\varphi\ ((\lambda_0/\mu)\ t)}{\varphi\ (t)}.$$

Finalmente, $\lambda \neq \infty$ puesto que $\varphi\ (t)$ es una función continua positiva en $[1, +\infty)$ y

$$\lim_{t \to \infty} \log \frac{\varphi\ ((\lambda_0/\mu)\ t)}{\varphi\ (t)} = \log \frac{\lambda_0}{\mu} \lim_{t \to \infty} \frac{t\varphi'\ (t)}{\varphi\ (t)} =$$

$$= \log \frac{\lambda_0}{\mu} \lim_{r \to 0} \frac{\sigma\ (r)}{r\sigma'\ (r)} = \beta \log \frac{\lambda_0}{\mu}\ .$$

4. Proposición.— Sea $M\ (r)$ *una función no negativa y no decreciente de* $r \geqslant 0$. *Si el polinomio*

$$P\ (z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \tag{4.1}$$

satisface la desigualdad

$$|P\ (z)| \leqslant M\ (|z|) \tag{4.2}$$

sobre C, se verifica

$$\left| \frac{1}{z^k} \sum_{k}^{n} a_\nu z^\nu \right| \leqslant 2^k \frac{e^{n\sigma_\rho\ (r)}}{r^k} M\ (\rho) \tag{4.3}$$

para $|z| \leqslant r/2$ *y*

$$\left| \frac{1}{z^k} \sum_{0}^{k-1} a_\nu z^\nu \right| \leqslant 2^{k+1} \frac{e^{n\sigma_\rho\ (r)}}{r^k} M\ (\rho) \tag{4.4}$$

para $|z| \geqslant r/2$, *cualquiera que sea el número* $\rho > 0$.

Demostración.— Como según (4.2) se verifica

$$|P\ (z)| \leqslant M\ (\rho) \tag{4.5}$$

sobre C_ρ, por el teorema 1 [10] tendremos

$$|P\ (z)| \leqslant e^{n\sigma_\rho\ (r)} M\ (\rho) \tag{4.6}$$

para $|z| \leqslant r$ y, por consiguiente,

$$\left| \frac{P^{(k)}(z)}{k!} \right| \leqslant 2^k \frac{e^{n\sigma_\rho(r)}}{r^k} M(\rho) \tag{4.7}$$

para $|z| \leqslant r/2$.

Por tanto, siendo

$$\sum_k^n a_\nu z^\nu = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^z (z-\zeta)^{k-1} P^{(k)}(\zeta)\, d\zeta,$$

resulta (4.3) para $|z| \leqslant r/2$.

De manera análoga se puede probar (4.4). En efecto, teniendo en cuenta el resultado precedente y (4.6), se deduce

$$\left| \frac{1}{z^k} \sum_0^{k-1} a_\nu z^\nu \right| \leqslant \left| \frac{1}{z^k} \sum_k^n a_\nu z^\nu \right| + \left| \frac{1}{z^k} \sum_0^n a_\nu z^\nu \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \frac{e^{n\sigma_\rho(r)}}{r^k} M(\rho) + 2^k \frac{e^{n\sigma_\rho(r)}}{r^k} M(\rho) = 2^{k+1} \frac{e^{n\sigma_\rho(r)}}{r^k} M(\rho)$$

para $|z| = r/2$. Para concluir basta observar que por el teorema del módulo máximo esta desigualdad es también válida para $|z| \geqslant r/2$ puesto que

$$\frac{1}{z^k} \sum_0^{k-1} a_\nu z^\nu$$

es una función analítica en $\{z\colon\ |z| \geqslant r/2\}$, incluido el punto $z = \infty$.

De manera análoga, para $z = 0$, se puede probar

$$|a_k| \leqslant \varphi_\rho \left(\frac{n}{k}\right)^k M(\rho). \tag*{(4.7)$_0$}$$

5. Teorema.— Si $f(z)$ *es una función compleja que admite el desarrollo asintótico*

$$\sum_0^\infty a_\nu z^\nu$$

con cotas óptimas M_n *sobre* C*, se tiene*

$$M_k \leqslant 3 \cdot 2^k \varphi_\rho \left(\frac{n}{k}\right)^k (M_0 + M_n \rho^n) \tag{5.1}$$

y

$$|a_k| \leqslant \varphi_\rho \left(\frac{n}{k}\right)^k (M_0 + M_n \rho^n) \tag{5.2}$$

para $0 < k \leqslant n$, *cualquiera que sea el número* $\rho > 0$.

Demostración.— En efecto, como el polinomio

$$P(z) = \sum_{0}^{n-1} a_\nu z^\nu$$

satisface evidentemente la desigualdad

$$|P(z)| \leqslant M_0 + M_n \rho^n$$

sobre $\overline{C}_\rho$, por la proposición 4 resulta

$$\left| \frac{1}{z^k} \sum_{k}^{n-1} a_\nu z^\nu \right| \leqslant 2^k \frac{e^{n\sigma_\rho(r)}}{r^k} (M_0 + M_n \rho^n)$$

para $|z| \leqslant r/2$ y

$$\left| \frac{1}{z^k} \sum_{0}^{k-1} a_\nu z^\nu \right| \leqslant 2^{k+1} \frac{e^{n\sigma_\rho(r)}}{r^k} (M_0 + M_n \rho^n)$$

para $|z| \geqslant r/2$.

Por tanto, para $|z| \leqslant r/2$ y $z \in C$ tendremos

$$\left| \frac{f(z) - \sum_{0}^{k-1} a_\nu z^\nu}{z^k} \right| \leqslant \left| \frac{1}{z^k} \sum_{k}^{n-1} a_\nu z^\nu \right| + M_n |z|^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \frac{e^{n\sigma_\rho(r)}}{r^k} (M_0 + M_n \rho^n) + \frac{M_n r^n}{r^k} \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \frac{e^{n\sigma_\rho(r)}}{r^k} (M_0 + M_n \rho^n) + \frac{e^{n\sigma_\rho(r)}}{r^k} M_n \rho^n$$

puesto que

$$\frac{1}{\rho} \leqslant \inf_{r>0} \frac{e^{\sigma_\rho(r)}}{r} \leqslant \frac{e^{\sigma_\rho(r)}}{r}.$$

Análogamente, para $|z| \geqslant r/2$ resulta

$$\left| \frac{f(z) - \sum_{0}^{k-1} a_\nu z^\nu}{z^k} \right| \leqslant \frac{M_0}{|z|^k} + \left| \frac{1}{z^k} \sum_{0}^{k-1} a_\nu z^\nu \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \frac{M_0}{r^k} + 2^{k+1} \frac{e^{n\sigma_\rho(r)}}{r^k} (M_0 + M_n \rho^n) \leqslant$$

$$\leqslant 3 \cdot 2^k \frac{e^{n\sigma_\rho(r)}}{r^k} (M_0 + M_n \rho^n).$$

De estas desigualdades resulta

$$M_k = \sup_{z \in C} \left| \frac{f(z) - \sum_0^{k-1} a_\nu z^\nu}{z^k} \right| \leqslant 3 \cdot 2^k \frac{e^{n\sigma_\rho(r)}}{r^k} (M_0 + M_n \rho^n)$$

cualesquiera que sean los números positivos r y ρ y, por consiguiente, (5.1).
Para probar (5.2) basta tener en cuenta $(4.7)_0$.
En el caso $M_{n+1} = 0$, es decir, cuando

$$f(z) = \sum_0^n a_\nu z^\nu,$$

se puede probar de manera análoga el siguiente:

6. *Teorema.— Si el polinomio*

$$P(z) = \sum_0^n a_\nu z^\nu \tag{6.1}$$

satisface la desigualdad

$$|P(z)| \leqslant M(|z|) \tag{6.2}$$

sobre C, *se verifica*

$$\left| \frac{1}{z^k} \sum_k^n a_\nu z^\nu \right| \leqslant 3 \cdot 2^k \varphi_\rho \left(\frac{n}{k}\right)^k M(\rho) \tag{6.3}$$

para $z \in C$ *y* $0 < k \leqslant n$, *cualquiera que sea* $\rho > 0$.

7. *Definición.— Si* $\sigma(r)$ *es derivable en un entorno de* 0 *y*

$$\lim_{r \to 0} \frac{r\sigma'(r)}{\sigma(r)} = \frac{1}{\beta} \qquad (0 \in \bar{B}) \tag{7.1}$$

para $0 < \beta < +\infty$, diremos que 0 es un punto *semirregular* de C si existen dos números positivos λ_0 y ρ_0 tales que

$$\sigma_\rho(r) \leqslant \lambda_0 \frac{\sigma(r)}{\sigma(\rho)} \tag{7.2}$$

para $r \leqslant \rho \leqslant \rho_0$.

Una condición suficiente de semirregularidad ha sido dada en el teorema 10 [9].

8. Proposición.– Si 0 *es un punto semirregular de C existen dos números positivos* λ_0 *y* ρ_0 *tales que*

$$\varphi_\rho(t) \leqslant \varphi\left(\frac{\lambda_0 t}{\sigma(\rho)}\right) \tag{8.1}$$

para $t > 1$ *y* $0 < \rho \leqslant \rho_0$.

Demostración.– En efecto, si se verifica (7.2) para $r \leqslant \rho \leqslant \rho_0$ y elegimos λ_0 suficientemente grande de modo que

$$\lambda_0 \geqslant \sup\left\{\frac{\sigma(\rho)}{\rho\sigma'(\rho)} : \rho \leqslant \rho_0\right\} \qquad (< +\infty),$$

para $t \geqslant 1$ y $\rho \leqslant \rho_0$ existe un $r \leqslant \rho$, tal que

$$\frac{1}{t} = \lambda_0 \frac{r\sigma'(r)}{\sigma(\rho)}$$

y, por tanto,

$$\varphi_\rho(t) \leqslant \exp\{t\sigma_\rho(r)\}/r \leqslant \exp\{\lambda_0 t\sigma(r)/\sigma(\rho)\}/r = \varphi\left(\frac{\lambda_0 t}{\sigma(\rho)}\right).$$

9. Definición.– denotaremos por $(\log M_n^*)$ la sucesión regularizada de $(\log M_n)$ por $\log\varphi(t)$ [11] que, por consiguiente, viene definida por

$$S(t) = \sup\left\{\frac{\varphi(t/n)^n}{M_n} : n \leqslant t\right\} \tag{9.1}$$

y

$$M_n^* = \sup\left\{\frac{\varphi(t/n)^n}{S(t)} : t \geqslant n\right\}. \tag{9.2}$$

Entonces, si (n_i) es la correspondiente sucesión de índices principales, por la proposición 9 [11], para $n' = n_i \leqslant n < n_{i+1} = n''$ se tiene

$$M_{n''} \leqslant \frac{\varphi(t_n/n'')^{n''}}{\varphi(t_n/n')^{n'}} M_{n'} \tag{9.3}$$

y

$$M_n^* = \frac{\varphi(t_n/n)^n}{\varphi(t_n/n')^{n'}} M_{n'} \tag{9.4}$$

para un cierto $t_n \geqslant n''$ tal que

$$n' = \underline{n}(t_n - 0) \qquad \text{y} \qquad n'' = \overline{n}(t_n).$$

Hacemos notar que si se verifica (7.1) para $0 < \beta < +\infty$, por la proposición 8 [11], dicha sucesión (n_i) es infinita.

10. Teorema.– Sea 0 *un punto semirregular del conjunto acotado* C *y* $f(z)$ *una función compleja que admite el desarrollo asintótico*

$$\sum_0^\infty a_\nu z^\nu$$

con cotas optimas M_n. *Si* $(\log M_n^*)$ *es la sucesión regularizada de* $(\log M_n)$ *por* $\log \varphi(t)$ *se tiene*

$$M_n \leqslant q^n M_n^* \tag{10.1}$$

para una constante $q > 0$ *y todo* $n \geqslant 1$.

Demostración.– En efecto, por ser 0 un punto semirregular de C, por la proposición 8 se tiene

$$\varphi_\rho(t) \leqslant \varphi\left(\frac{\lambda_0}{\sigma(\rho)}\, t\right)$$

para cierta constante λ_0, $\rho \leqslant \rho_0$ y $t \geqslant 1$.

De esto se deduce, aplicando el teorema 5 a

$$f_{n'}(z) = \frac{1}{z^{n'}}\left(f(z) - \sum_0^{n'-1} a_\nu z^\nu\right)$$

y teniendo en cuenta la proposición 3, que

$$M_n \leqslant 3 \cdot 2^{n-n'} \inf_{\rho < \rho_0} \varphi_\rho\left(\frac{n''-n'}{n-n'}\right)^{n''-n'} (M_{n'} + M_{n''}\rho^{n''-n'}) \leqslant$$

$$\leqslant 3 \cdot 2^{n-n'} \inf_{\rho < \rho_0} \varphi \left(\frac{\lambda_0}{\sigma(\rho)} \frac{n'' - n'}{n - n'} \right)^{n-n'} (M_{n'} + M_{n''} \rho^{n''-n'}) \leqslant$$

$$\leqslant 6 \, (2\lambda)^{n-n'} \varphi \left(\frac{t^*}{n - n'} \right)^{n-n'} M_{n'}$$

para $n' < n < n''$, y

$$\varphi \left(\frac{t^*}{n'' - n'} \right)^{n''-n'} = \text{máx} \left\{ \frac{M_{n''}}{M_{n'}} , \; \varphi(\alpha)^{n''-n'} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \text{máx} \left\{ \frac{\varphi(t_n/n'')^{n''}}{\varphi(t_n/n')^{n'}} , \; \varphi(\alpha)^{n''-n'} \right\} \leqslant \varphi \left(\frac{\alpha t_n}{n''} \right)^{n''-n'}$$

para $n' = n_i < n < n_{i+1} = n''$, segun (9.3), para la sucesión (n_i) de índices principales y, por tanto,

$$t^* \leqslant \alpha t_n .$$

De esto resulta, por la concavidad de $\log \varphi(t)$ y (9.4), las desigualdades

$$(n - n') \log \varphi \left(\frac{t^*}{n - n'} \right) + \log M_{n'} \leqslant$$

$$\leqslant (n - n') \log \varphi \left(\frac{\alpha t_n}{n - n'} \right) + n' \log \varphi \left(\frac{t_n}{n'} \right) - n \log \varphi \left(\frac{t_n}{n} \right) + \log M_n^* \leqslant$$

$$\leqslant n \log \left[\varphi \left(\frac{(\alpha + 1) \, t_n}{n} \right) / \varphi \left(\frac{t_n}{n} \right) \right] + \log M_n^* \leqslant$$

$$\leqslant n \log \lambda' + \log M_n^*$$

para

$$\lambda' = \sup_{t > 1} \frac{\varphi((\alpha + 1) \, t)}{\varphi(t)} \qquad (< +\infty)$$

y, por consiguiente,

$$M_n \leqslant 6 \, (2\lambda\lambda')^n M_n^* .$$

En el caso que C sea un conjunto no acotado se puede proceder de mamera análoga siguiendo los siguientes pasos.

11. Definición.— De aquí en adelante utilizaremos las siguientes notaciones e hipótesis:

1. C es un conjunto conexo no acotado del plano complejo ampliado Z que consta al menos de dos puntos y tal que $0 \in \partial C$.
2. Existe una sola componente B de $Z - \overline{C}$ tal que $\infty \in \overline{B}$ y $A = Z - B$.
3. $s(z)$ es la representación conforme de B sobre $\{s: \; Re\, s > 0\}$ tal que

$$\lim_{z \to \infty} s(z) = \infty \qquad (z \in B),$$

y $w(z) = \exp s(z)$.
4. $\sigma(r) = \sup \{Re\, s(z): \; |z| = r, \; r \in B\}$ para $r > 0$.
5. $\varphi(t) = \inf \left\{ \frac{e^{t\sigma(r)}}{r} : \; r > 0 \right\}$ para $t > 0$.

C_ρ, B_ρ, $w_p(z)$, $\sigma_\rho(r)$ y $\varphi_p(t)$ serán como en la definición 1.

12. Lema.— Si

$$\lim_{r \to 0} \frac{r\sigma'(r)}{\sigma(r)} = \frac{1}{\beta_0} \qquad (0 \in \overline{B}) \tag{12.1}$$

y

$$\lim_{z \to \infty} \frac{r\sigma'(r)}{\sigma(r)} = \frac{1}{\beta_\infty} \tag{12.2}$$

para $0 < \beta_0 < \infty$ *y* $0 < \beta_\infty < \infty$, *se tiene*

$$\lim_{t \to \infty} t\sigma \left(\frac{1}{\varphi(t)} \right) = e^{-1} \beta_0, \tag{12.3}$$

$$\lim_{t \to 0} t\sigma \left(\frac{1}{\varphi(t)} \right) = e^{-1} \beta_\infty \tag{12.4}$$

y

$$\mu = \inf \left\{ t\sigma \left(\frac{1}{\varphi(t)} \right) : \; t > 0 \right\} > 0. \tag{12.5}$$

13. Proposición.— Supongamos:

1. *Se verifican* (12.1) *y* (12.2) *para* β_0 *y* β_∞ *finitos y positivos.*
2. λ_0, k, n, M_0 *y* M_n *son números positivos tales que* $k \leqslant n$.
3.

$$\Phi_k(M_0, M_n) = \inf_{\rho > 0} \varphi \left(\frac{\lambda_0}{\sigma(\rho)} \frac{n}{k} \right)^k [M_0 + M_n \rho^n]. \tag{13.1}$$

Entonces, si t^*/n *es la solución de la ecuación*

$$\varphi\left(\frac{t^*}{n}\right) = \sqrt[n]{\frac{M_n}{M_0}}, \tag{13.2}$$

resulta

$$\Phi_k (M_0, M_n) \leqslant 2\lambda^k \varphi \left(\frac{t^*}{k}\right)^k M_0 \tag{13.3}$$

para una constante λ *independiente de* k, n, M_0 *y* M_n.

14. Definición.– Si se verifican (12.1) y (12.2) para β_0 y β_∞ finitos y positivos, diremos que 0 es un punto *semirregular* de C si existe un número $\lambda_0 > 0$ tal que

$$\sigma_\rho (r) \leqslant \lambda_0 \frac{\sigma (r)}{\sigma (\rho)} \tag{14.1}$$

para $r > 0$ y $\rho > 0$.

Según el teorema 10 [9] se verifica (14.1) para ciertas condiciones y $r \leqslant \rho$. También, en las mismas condiciones, se puede asegurar lo mismo para $r \geqslant \rho$ porque de la proposición 5 [9], procediendo como en el teorema 10 [9], se deduce

$$\sigma_\rho (r) = \log \frac{r}{\rho} + 0 (1)$$

para $r \geqslant \rho$, y se tiene

$$\log \frac{\sigma (r)}{\sigma (\rho)} = \int_\rho^r \frac{\pi}{r\theta (r)} dr + 0 (1)$$

para $r \geqslant \rho$ según el teorema 11 [9] con $0 < \theta (r) < 2\pi$.

Ahora resulta inmediatamente

$$\varphi_\rho (t) \leqslant \varphi \left(\frac{\lambda_0 t}{\sigma (\rho)}\right) \tag{14.2}$$

para $t > 0$, $\rho > 0$ y λ_0 suficientemente grande.

15. Definición.– Denotaremos por $(\log M_n^*)$ la sucesión regularizada de $(\log M_n)$ por $\log \varphi (t)$ [11] definida por

$$S (t) = \sup \left\{\frac{\varphi (t/n)^n}{M_n} : n \geqslant 1\right\} \tag{15.1}$$

y

$$M_n^* = \sup \left\{ \frac{\varphi(t/n)^n}{S(t)} : \; t > 0 \right\}. \tag{15.2}$$

Entonces, si (n_i) es la correspondiente sucesión de índices principales, para $n' = n_i \leqslant n < n_{i+1} = n''$ se verifican (9.3) y (9.4) para un cierto $t_n > 0$. Pero ahora se presenta una dificultad y es que no es suficiente (12.1) para que dicha sucesión sea infinita porque puede ser $n(t) = \infty$ para un $t > 0$.

16. Proposición.— Si 0 *es un punto semirregular de* C *y*

$$\text{lím } \frac{1}{n}\, \sigma\left(\frac{1}{\sqrt[n]{M_n}}\right) = 0, \tag{16.1}$$

la sucesion (n_i) *de índices principales es infinita.*

Demostración.— En efecto, si $\bar{n}(t) = \infty$ para un $t > 0$ se tiene

$$S(t) = \text{lím sup } \frac{\varphi(t/n)^n}{M_n} > 0$$

y, por tanto, existe un $h > 0$ tal que

$$\varphi\left(\frac{t}{n}\right)^n \geqslant h M_n$$

para infinitos valores de n, de donde se deduce por el lema 12

$$\frac{t}{n}\, \sigma\left(\frac{1}{\sqrt[n]{hM_n}}\right) \geqslant \frac{t}{n}\, \sigma\left(\frac{1}{\varphi(t/n)}\right) \geqslant \mu$$

y, por consiguiente,

$$\text{lím sup } \frac{1}{n}\, \sigma\left(\frac{1}{\sqrt[n]{M_n}}\right) > 0.$$

17.— Teorema.— Sea 0 *un punto semirregular de* C *y* $f(z)$ *una función compleja que admite el desarrollo asintótico*

$$\sum_{0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

con cotas óptimas M_n *sobre* C. *Si*

$$\text{lím}\ \frac{1}{n}\ \sigma\left(\frac{1}{\sqrt[n]{M_n}}\right) = 0 \tag{17.1}$$

y $(\log M^*{}_n)$ *es la regularizada de* $(\log M_n)$ *por* $\log \varphi(t)$, *se tiene*

$$M_n^* \leqslant q^n M_n \tag{17.2}$$

para una constante $q > 0$ *y todo* $n \geqslant 1$.

Hemos omitido las demostraciones de las últimas proposiciones porque son análogas a las demostradas anteriormente cuando C es un conjunto acotado.

Las desigualdades (10.1) y (17.2) son las naturales generalizaciones, para los desarrollos asintóticos, de las desigualdades de Gorny-Cartan para las funciones indefinidamente derivables en un intervalo.

18. Teorema.— Sea 0 *un punto semirregular de* C *y* $f(z)$ *una función compleja que admite el desarrollo asintótico*

$$\sum_0^\infty a_\nu z^\nu$$

con cotas óptimas M_n *sobre* C. *Entonces*

$$\text{lím sup}\ \frac{1}{n}\ \sigma\left(\frac{1}{\sqrt[n]{M_n}}\right) = \frac{1}{t_0} > 0 \tag{18.1}$$

si y sólo si existe una constante $q > 0$ *tal que*

$$M_n \leqslant q^n \varphi\left(\frac{t_0}{n}\right)^n M_0. \tag{18.2}$$

Demostración.— De (18.1) se deduce

$$\text{lím sup}\ \frac{1}{n}\ \sigma\left(\sqrt[n]{\frac{M_0}{M_n}}\right) = \frac{1}{t_0}.$$

Por tanto, si t_n^* es la solución de

$$\varphi\left(\frac{t_n^*}{n}\right) = \sqrt[n]{\frac{M_n}{M_0}},$$

del mismo modo que el lema 12 se tiene la desigualdad

$$\frac{t_n^*}{n}\ \sigma\left(\sqrt[n]{\frac{M_0}{M_n}}\right) \leqslant \frac{t_n^*}{n}\ \sigma\left(\frac{1}{\varphi(t_n^*/n)}\right) \leqslant \alpha$$

para un cierto α finito, y

$$\text{lím inf } t_n^* \leqslant \alpha \text{ lím inf } \frac{n}{\sigma\,(\sqrt[n]{M_0/M_n})} = \alpha t_0 .$$

De esto resulta, teniendo en cuenta que

$$M_k \leqslant 2\lambda^k \varphi \left(\frac{t_n^*}{k}\right)^k M_0 \qquad (k \leqslant n)$$

para una constante $\lambda > 0$, independiente de k y n, según se deduce de (13.3), la desigualdad

$$M_k \leqslant 2\lambda^k \varphi \left(\frac{\alpha t_0}{k}\right)^k M_0$$

y, por consiguiente, (18.2).

Finalmente, si se verifica (18.2) se tiene

$$\text{lím sup } \frac{1}{n}\ \sigma \left(q \sqrt[n]{\frac{M_0}{M_n}}\right) \geqslant \text{lím sup } \frac{1}{n}\ \sigma \left(\frac{1}{\varphi\,(t_0/n)}\right) \geqslant \frac{\mu}{t_0} > 0$$

por el lema 12 y, por consiguiente, (18.1).

19. Corolario.– En las condiciones del teorema 18, *si* $f(z)$ *no es una constante, se tiene*

$$\text{lím sup } \frac{1}{n}\ \sigma \left(\frac{1}{\sqrt[n]{M_n}}\right) < +\infty. \tag{19.1}$$

20. Observación.– Es importante hacer notar que no es necesario el conocimiento de $\sigma(r)$ para calcular la regularizada $(\log M_n^*)$ de $(\log M_n)$ por $\log \varphi(t)$ porque, tanto en la definición 9 como en la 15, se puede sustituir $\sigma(r)$ por otra función $\tilde{\sigma}(r)$ equivalente a ella salvo un factor constante e incluso tal que

$$\log \tilde{\sigma}(r) = \log \sigma(r) + 0\,(1) \tag{20.1}$$

para $0 < r \leqslant \rho_0 = \sup\,\{|z|:\ z \in C\}$. Por esto es muy útil el teorema 11 [9] que, en ciertas condiciones, asegura que

$$\log \sigma(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{\pi\,dr}{r\theta\,(r)} + 0\,(1) \tag{20.2}$$

para un $r_0 > 0$ prefijado y $0 < r \leqslant \rho_0$.

En virtud de esta observación las condiciones (7.1), (12.1) y (12.2) se pueden sustituir, para estas nuevas funciones, por ser $\sigma(r)$ creciente y verificar

$$a \leqslant \frac{\sigma(2r)}{\sigma(r)} \leqslant b \qquad (0 < r \leqslant \rho_0) \tag{20.3}$$

para dos constantes $b \geqslant a > 1$, porque entonces

$$\tilde{\sigma}(r) = \int_0^r \frac{\sigma(r)}{r}\, dr \tag{20.4}$$

además de satisfacer (20.1), para $r \leqslant \rho_0$, satisface las condiciones análogas para los límites de oscilación, superior e inferior.

BIBLIOGRAFIA

[1] CARTAN, H.: *Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives.* París, Act. Sc. et Ind. n^{o} 867, 1940.

[2] GORNY, A.: *Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle.* Acta Math. *71* (1939), 317.

[3] HADAMARD, J.: *Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées.* C.R. Séances Soc. Math. Fr., *42* (1914), 68.

[4] KOLMOGOROFF, A.: *Une généralisation de l'inégalité de J. Hadamard entre les bornes supérieures des derivées successives d'une fonction.* C.R. Acad. Sc., *207* (1938), 764.

[5] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *Una desigualdad entre las cotas de las derivadas de una función analítica en un ángulo.* Rev. Las Ciencias de Madrid, año XXIII (1958), 533-539.

[6] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *Disuguaglianze tra limiti e coefficienti dello sviluppo asintotico di una funzione in un angolo.* Annali di Mat. Pura ed Appl., *48* (1959), 147-159.

[7] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *Solución del problema de equivalencia de clases de funciones con desarrollo asintótico.* Rev. Acad. Ciencias de Zaragoza, Ser. *16* (1961), 47-51.

[8] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *Funciones asociadas a un conjunto del plano complejo.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 81 (1987), 9-21.

[9] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *Influencia de la frontera de la representación conforme.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 81 (1987), 23-35.

[10] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *Desigualdades para las derivadas de un polinomio.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 81 (1987), 467-485.

[11] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *Regularización de sucesiones.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid, 81 (1987), 455-465.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid