Una nota sobre el grupo de automorfismos de una superficie de Klein compacta

Por E. Bujalance*

Recibido: 6 noviembre 1985

Presentado por el académico numerario D. José J. Etayo Miqueo.

Abstract

In this paper we prove that each finite group is the group of automorphisms of a non–orientable compact Klein surface without boundary, of an orientable compact Klein surface with non–empty boundary, and of a non–orientable compact Klein surface with non–empty boundary.

Si X es una superficie de Klein compacta [1], entonces $X = D/\Gamma$ donde Γ es un grupo *NEC* y D es el semiplano superior hiperbólico.

Un grupo *NEC* Γ es un subgrupo discreto del grupo G (el grupo de todos los homeomorfismos de D conformes y anticonformes), con espacio cociente compacto D/Γ. Un grupo *NEC* contenido en G^+ (el subgrupo de G, de los homeomorfismos conformes) es un grupo Fuchsiano.

Las estructuras algebraicas y geometricas de los grupos *NEC* quedan completamente determinadas por sus signaturas (vease [7] y [12]), que tienen la forma

$$(g; \pm; [m_1, ..., m_\tau]; \ (n_{i1}, ..., n_{is_i})\ i = 1,..,k).$$

Si Γ tiene esta signatura D/Γ es una superficie compacta de género g, con k huecos, y la superficie es orientable si y sólo si el signo es $+$. Los m_i se llaman los períodos propios y representan las ramificaciones sobre los puntos interiores de D/Γ en la proyección natural $p\colon D \to D/\Gamma$. Los k paréntesis $(n_{i1}, ..., n_{is_i})$ son los ciclo—períodos y los números n_{ij} representan las ramificaciones alrededor del hueco i.

Si D/Γ es orientable, entonces Γ tiene la siguiente presentación dada por

generadores	i)	$x_i \ \ i = 1 \dots \tau$
	ii)	$c_{ij} \ \ i = 1 \dots k, \ \ j = 0 \dots s_i$
	iii)	$e_i \ \ i = 1 \dots k$
	iv)	$a_j, b_j \ \ j = 1 \dots g$
y relaciones	1)	$x_i^{m} = 1 \ \ i = 1 \dots \tau$
	2)	$c_{is_i} = e_i^{-1} c_{io} e_i \ \ i = 1 \dots k$
	3)	$c_{ij}^2 = c_{i,\ j-1}^2 = (c_{i,j-1} c_{ij})^{n_{ij}} = 1 \ \ i = 1 \dots k, \ \ j = 1 \dots s_i$
	4)	$x_1 \dots x_\tau e_1 \dots e_k [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1$

* Con la colaboración económica de la CAICYT

Si D/Γ es no orientable, Γ tiene la misma presentación, cambiando los generadores iv) por d_j $j = 1 \dots g$ y la relación 4) por $x_1 \dots x_\tau e_1 \dots e_k d_1^2 \dots d_g^2 = 1$ A partir de ahora denotaremos por x_i, e_i, c_{ij}, a_i, b_i, d_i los anteriores generadores asociados con un grupo NEC Γ.

A los homeomorfismos f de X sobre sí mismo que sean dianalíticos, los llamaremos automorfismos de X.

En lo que sigue, el grupo de automorfismos de una superficie es el grupo de todos sus automorfismos.

Podemos clasificar las superficies de Klein compactas en cuatro tipos: orientables sin borde (que son las superficies de Riemann), no orientables sin borde, orientables con borde no vacío y no orientables con borde no vacío.

El siguiente teorema establece para cada uno de los tres tipos un resultado bien conocido para las superficies de Riemann.

Teorema.– Si G es un grupo finito, entonces G es el grupo de automorfismos de una superficie de Klein compacta no orientable y sin borde, de una superficie de Klein compacta orientable y con borde, y de una superficie de Klein compacta no orientable y con borde.

Demostración: Supongamos que G tiene n generadores $g_1, \dots, g_n$ y que el orden de G es m.

Primeramente probaremos que existe una superficie para cada tipo, para la que G es un grupo de automorfismos.

1) Si $n \neq 1$, sea Γ_1 un grupo NEC con signatura

$$\alpha_1 = (2n + 1; - ; [-]; \{-\}).$$

En (2.5) de [2] hemos establecido un epimorfismo $\theta_1 : \Gamma_1 \to G$ tal que $ker\theta_1$ es un grupo NEC con signatura

$$((2n - 1)\, m + 2, -; [-]; \{-\})$$

por lo tanto $\dfrac{D}{ker\theta_1}$ es una superficie de Klein compacta no orientable y sin borde y $G \approx \dfrac{\Gamma_1}{ker\theta_1}$ es un grupo de automorfismos de $\dfrac{D}{ker\theta_1}$.

Si $n = 1$, sea Γ_1 un grupo NEC con signatura

$$\alpha_1 = (4; - ; [-]; \{-\});$$

entonces establecemos un homeomorfismo $\theta_1 : \Gamma_1 \to G$ definido por

$$\theta_1(d_1) = g_1 \qquad \theta_1(d_2) = g_1^{-1}$$
$$\theta_1(d_3) = 1 \qquad \theta_1(d_4) = 1,$$

θ_1 es un epimorfismo; $ker\theta_1$ es un subgrupo normal de Γ_1 con índice finito; por lo tanto es un grupo NEC; por [6], $D/ker\theta_1$ es no orientable y por [3] y [4], $ker\theta_1$ no tiene ni períodos ni ciclo–períodos, y por la relación de las áreas de las regiones fundamentales de Γ_1 y $ker\theta_1$ (véase [9]) el género de $ker\theta_1$ es $2m + 2$; por lo tanto la signatura de $ker\theta_1$ es

$$(2m + 2; -; [-], \{-\}),$$

y así $\dfrac{D}{ker\theta_1}$ es una superficie de Klein compacta no orientable y sin borde y $G \approx \dfrac{\Gamma_1}{ker\theta_1}$.

2) Sea Γ_2 un grupo *NEC* con signatura

$$\alpha_2 = (n + 1; +; [-]; \{-\}),$$

entonces establecemos un homomorfismo $\theta_2 : \Gamma_2 \to G$ definido por

$$\begin{array}{ll} \theta_2(a_1) = g_1 & \theta_2(b_1) = g_1 \\ \quad \cdots & \quad \cdots \\ \theta_2(a_n) = g_n & \theta_2(b_n) = g_n \\ \theta_2(a_{n+1}) = g_n & \theta_2(b_{n+1}) = g_n \\ \theta_2(e_1) = 1 & \theta_2(c_1) = 1, \end{array}$$

θ_2 es un epimorfismo, $ker\theta_2$ es un subgrupo normal de Γ con índice finito, por lo tanto es un grupo *NEC*; por [6], $\dfrac{D}{ker\theta_2}$ es orientable, por [5] $ker\theta_2$ tiene n ciclo—períodos vacíos, y por la relación de las áreas de las regiones fundamentales de Γ_2 y $ker\theta_2$, el género de $ker\theta_2$ es $nm + 1$; por lo tanto la signatura de $ker\theta_2$ es

$$(nm + 1; +; [-]; \{(-) \overset{m}{\cdots} (-)\});$$

por lo tanto $\dfrac{D}{ker\theta_2}$ es una superficie de Klein compacta orientable con borde no vacío y con un grupo de automorfismos isomorfo a G.

3) Sea Γ_3 un grupo *NEC* con signatura

$$\alpha_3 = (2n + 1; -; [-]; \{(-)\})$$

entonces establecemos un homomorfismo $\theta_3 : \Gamma_3 \to G$ definido por

$$\begin{array}{ll} \theta_3(d_1) = g_1 & \theta_3(d_2) = g_1^{-1} \\ \quad \cdots & \quad \cdots \\ \quad \cdots & \quad \cdots \\ \theta_3(d_{2n-1}) = g_n & \theta_3(d_{2n}) = g_n^{-1} \\ \theta_3(d_{2n+1}) = 1 & \theta_3(e_1) = 1 \\ \theta_3(c_1) = 1, & \end{array}$$

θ_3 es un epimorfismo, $ker\theta_3$ es un subgrupo normal de Γ_3 con índice finito, y entonces de [5] y [6] y de la relación de las áreas de las regiones fundamentales de Γ_3 y $ker\theta_3$, tenemos que la signatura de $ker\theta_3$ es

$$((2n-1)\,m+2;-;[-];\{(-)\overset{m}{\dots}(-)\}),$$

por lo tanto $\dfrac{D}{ker\theta_3}$ es una superficie de Klein compacta y no orientable con borde no vacío, y con un grupo de automorfismos isomorfo a G.

Para probar que G en los tres casos es el grupo de automorfismos, necesitamos sólo ver que en los tres casos existe un grupo *NEC* maximal Γ_i teniendo signatura α_i para $i = 1,2,3$; puesto que el grupo de automorfismos de

$$\frac{D}{ker\,\theta_i} \text{ es } \frac{N_G\,(ker\theta_i}{ker\,\theta_i} = \frac{\Gamma_i}{ker\,\theta_i} \approx G.$$

Ahora veremos que en cada caso existe un grupo *NEC* maximal Γ_i

Una signatura α tiene asociado un grupo *NEC* maximal Γ si la signatura de α^+ (la signatura del grupo Fuchsiano canónico $\Gamma^+ = \Gamma \cap G^+$ asociada a un grupo *NEC* Γ, véase [9]) tiene asociado un grupo Fuchsiano maximal. En efecto, si α no tuviese asociado un grupo *NEC* maximal, entonces existiría un grupo *NEC* Γ' del que Γ sería un subgrupo, y $d(T(\Gamma, G)) = d(T(\Gamma', G))$, donde $d(T(\Gamma, G))$ denota la dimensión del espacio de Teichmuller de $T(\Gamma, G)$. Como $d(T(\Gamma^+, G)) = 2d(T(\Gamma, G))$, (véase [11]), entonces $\Gamma^+ \subset \Gamma'^+$ y $d(T(\Gamma^+, G)) = d(T(\Gamma'^+, G))$. Así por [10] Γ^+ no tiene asociado un grupo Fuchsiano maximal.

Dados α_i $i = 1,2,3$, entonces por [9] tenemos que

$\alpha_1^+ = (2n;+;[-];\{-\})$ si $n \neq 1$ y $\alpha_1^+ = (3;+;[-];\{-\})$ si $n = 1$

$\alpha_2^+ = (2n+2;+;[-];\{-\})$ y $\alpha_3^+ = (2n+1;-;[-];\{-\})$.

Como estas signaturas no aparecen en las listas de los teoremas 1 y 2 de [10], cada una tiene asociado un grupo Fuchsiano maximal, y así las signaturas α_i tienen asociados grupos *NEC* maximales.

Sea Y una curva real, la curva Y se dice que separa si $Y(C) - Y(R)$ es un espacio desconexo. La curva Y se dice que no separa si $Y(C) - Y(R)$ es un espacio conexo y $Y(R) \neq \phi$. La curva Y se dice puramente imaginaria si $Y(R) = \phi$.

Por la equivalencia de las superficies de Klein y las curvas reales (véase [1]), las superficies de Klein orientables con borde corresponden a las curvas reales que separan, las superficies de Klein no orientables con borde corresponden a las curvas reales que no separan, y las superficies de Klein no orientables sin borde corresponden a las curvas puramente imaginarias. Así pues los anteriores resultados pueden reescribirse en términos de grupos de automorfismos de curvas reales o de curvas puramente imaginarias.

De los resultados de May [8], que utiliza diferentes técnicas, se puede seguir un resultado más pobre para el caso de superficies de Klein compactas con borde.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALLING, N. L.: Foundations of teory of Klein surfaces. *Lect. Notes in Math. Vol.* 219, Springer–Verlang. Berlín (1971).

[2] BUJALANCE, E.: Cyclic groups of automophisms of compact non–orientable Klein surfaces without boundary. *Pacific J. of Math.* 109, 279–289. (1983).

[3] BUJALANCE, E.: Normal subgroups of *NEC* groups. *Math. Zeit.* 178, 331–331. (1981).

[4] BUJALANCE, E.: Proper periods of normal *NEC* subsgroups with even index. *Rev. Mat. Hisp.–Amer.* (4) 41, 121–127. (1981).

[5] ETAYO, J. J.: On the order of automorphism group of Klein surfaces. *Glas. Math. J.* 26, 75–81. (1985).

[6] HOARE, A. H. M., SINGERMAN, D.: The orientability of subgroups of plane groups. Groups–St Andrews (1981). Lect. Notes Series 71, Cambridge University Press, Cambridge 221–227. (1982).

[7] MACBEATH, A. M.: The classification of non–Euclidean plane crystallographic groups. *Canad. J. Math.* (10) 17, 86–97. (1966).

[8] MAY, C. L., GREENLEAF, N.: Bordered Klein surfaces with maximal symmetry. *Trans. Amer. Math Soc.* (1) 274, 265–283. (1982).

[9] SINGERMAN, D.: On the structure of non–Euclidean crystallographic groups. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 76, 233–240. (1974).

[10] SINGERMAN, D.: Finitely maximal Fuchsian groups. *J. London Math. Soc.* (2), 6, 29–32. (1972)

[11] SINGERMAN, D.: Symmetries of Riemann surfaces with large automorphism group. *Math. Ann.* 210, 17–32. (1974).

[12] WILKIE, M. C.: On non–Euclidean crystallographic groups, *Math. Z.* 91, 87–102. (1966).

Departamento de Matemáticas Fundamentales,
Facultad de Ciencias, UNED,
28040–Madrid.