Desarrollos asintóticos en espacios de Banach desde los conjuntos compactos

Por P. GUIJARRO CARRANZA

Recibido: 12 junio 1985

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia Ureña

Abstract

In this paper we are making a study of space $\mathscr{H}_{\mathfrak{K}}(U, F)$ of the holomorphic functions defined in an open, convex subset U of a Banach space with the origin in the boundary of U, with values in another Banach space F, and with asymptotic expansion in $z = 0$ trough the compact subsets of U. We study also its topology $\tau_{\mathfrak{K}}$.

Resumen

En este artículo hacemos un estudio del espacio $\mathscr{H}_{\mathfrak{K}}(U, F)$ de las funciones holomorfas definidas en un subconjunto U abierto y convexo de un espacio de Banach, con el origen en la frontera de U, con valores en otro espacio de Banach F, y que poseen desarrollo asintótico en $z=0$ desde los conjuntos compactos de U. Estudiamos también su topología $\tau_{\mathfrak{K}}$.

Representaremos por E y F dos espacios de Banach complejos y por U un abierto convexo de E con el origen en su frontera. Si K es un subconjunto no vacío de E, denotaremos por $\tilde{K}$ al conjunto

$$\tilde{K} = \{\lambda z, \quad \lambda \in (0, 1], \quad z \in K\}$$

Obsérvese que si K es un subconjunto de U, entonces $\tilde{K} \subset U$, [6]. Como es usual en holomorfía $\mathscr{H}(U, F)$ representará el espacio de todas las funciones holomorfas de U en F.

Definición 1.— Una función holomorfa de U en F diremos que tiene desarrollo asintótico en el origen desde los compactos de U, si existe una serie entera de E en F en $z=0$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z), \qquad \text{con} \qquad \hat{A}_j = \hat{A}_j(f) \in \mathscr{P}(^jE, F), \quad j=0, 1, \ldots,$$

verificando

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in \tilde{K}}} \frac{f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z)}{\|z\|^n} = 0$$

para todo compacto K no vacío de U y para todo $n \in Z$, $n \geqslant 0$.

Esta serie entera

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$$

queda determinada de manera única por la función f, y recibe el nombre de desarrollo asintótico de f desde los compactos de U, escribiéndose

$$f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$$

Representaremos por $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}(U, F)$ el espacio vectorial de todas las funciones holomorfas de U en F que poseen desarrollo asintótico en el origen desde los conjuntos compactos.

Proposición 2.— Si G es otro espacio de Banach complejo, g una aplicación lineal y continua de F en G, y f un elemento de $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}(U, F)$ con

$$f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z),$$

entonces $g \circ f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}}(U, G)$ y

$$g \circ f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} g \circ \hat{A}_j(z)$$

Proposición 3.— Sea V un subconjunto abierto de E tal que $0 \in V$ y $U \subset V$. Si f es una función holomorfa de V en F, entonces

$$f_{|U} \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}}(U, F)$$

y su desarrollo asintótico desde los compactos de U es la serie de Taylor de f en $z = 0$.

Demostración.—Sea

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$$

la serie de Taylor de f en $z = 0$. Por ser f holomorfa en $z = 0$, f es continua en este punto y por tanto existen dos números $r > 0$ y $M > 0$, tales que

$$\bar{B}(0,r) \subset V \qquad \text{y} \qquad \sup \{ \|f(z)\| \,/\, z \in \bar{B}(0,r)\} < M,$$

y si $z \in \overset{\circ}{B}(0,r)$ ([1], pág. 54)

$$\|f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z)\| \leqslant \frac{M\, \|z\|^{n+1}}{r^n\,(r - \|z\|)}$$

de donde se deduce

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \tilde{K}}} \frac{f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z)}{\|z\|^n} = 0$$

para todo compacto K no vacío de U y todo $n \in Z$, $n \geqslant 0$.

Proposición 4.— Si $\mathcal{G}$ es un subconjunto del dual topológico de F, F', que verifica la siguiente propiedad (P):

"Un subconjunto B de F es acotado, si y solamente si, $\phi(B)$ es acotado en C para todo $\phi \in \mathcal{G}$."

Entonces, los enunciados siguientes son equivalentes:

α) $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}}(U, F)$.
β) $\phi \circ f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}}(U, C)$, para todo $\phi \in \mathcal{G}$.

Demostración.—

$\alpha) \Rightarrow \beta)$ Es la proposición 2 cuya demostración es inmediata.
$\beta) \Rightarrow \alpha)$ A) Por ser $\phi \circ f$ una función holomorfa de U en C para todo $\phi \in \mathcal{G}$, y por verificarse la propiedad (P)

$$f \in \mathcal{H}(U, F)$$

([1], Prop. 6.1).

B) Para cada compacto K no vacío de U existe el límite

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \tilde{K}}} f(z) \tag{1}$$

En efecto, sea $\{\omega_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\tilde{K}$, tal que

$$\lim_{m \to \infty} \omega_m = 0$$

Si para cada $\phi \in \mathscr{D}$

$$\phi \circ f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_{j,\phi}(z),$$

entonces la sucesión

$$\left\{ \frac{(\phi \circ f)(\omega_m) - (\hat{A}_{0,\phi} + \hat{A}_{1,\phi}(\omega_m))}{\|\omega_m\|} \right\}_{m=1}^{\infty}$$

es acotada en C, y si M es una cota

$$\frac{|(\phi \circ f)(\omega_p) - (\phi \circ f)(\omega_q)|}{\|\omega_p\| + \|\omega_q\|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|(\phi \circ f)(\omega_p) - (\hat{A}_{0,\phi} + \hat{A}_{1,\phi}(\omega_p))|}{\|\omega_p\|} + \frac{|\hat{A}_{1,\phi}(\omega_p)|}{\|\omega_p\|} +$$

$$+ \frac{|(\phi \circ f)(\omega_q) - (\hat{A}_{0,\phi} + \hat{A}_{1,\phi}(\omega_q))|}{\|\omega_q\|} + \frac{|\hat{A}_{1,\phi}(\omega_q)|}{\|\omega_q\|} \leqslant 2(M + \|\hat{A}_1\|),$$

resulta que el conjunto

$$B_1 = \left\{ \frac{f(\omega_p) - f(\omega_q)}{\|\omega_p\| + \|\omega_q\|} \in F / p, q \geqslant 1 \right\},$$

verifica que $\phi(B_1)$ es acotado para todo $\phi \in \mathscr{D}$; por tanto B_1 es acotado en F (Propiedad (P)), y en consecuencia existe una constante $M' > 0$, tal que

$$\|f(\omega_p) - f(\omega_q)\| \leqslant M'(\|\omega_p\| + \|\omega_q\|), \quad \text{p, q} \geqslant 1,$$

de donde se obtiene que $\{f(\omega_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en F y por tanto convergente. Además, para cualquier otro compacto K' no vacío de U también existe el límite

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \tilde{K}'}} f(z)$$

y coincide con (1).

C) Sea K un compacto cualquiera de U, no vacío, y sea

$$\hat{A}_0 = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \tilde{K}}} f(z).$$

Para cada $\phi \in J$ se tiene:

$$\hat{A}_{0,\phi} = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \tilde{K}}} \phi \circ f(z) = \phi(\hat{A}_0) = \phi \circ \hat{A}_0$$

Razonemos por inducción y supongamos que existen polinomios $\hat{A}_j$ j-homogéneos de E en F tales que

$$\phi \circ \hat{A}_j = \hat{A}_{j,\phi}, \qquad \phi \in J, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

y

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \tilde{K}}} \frac{f(z) - \sum_{j=0}^{p} \hat{A}_j(z)}{\|z\|^p} = 0, \qquad p = 0, 1, \ldots, n-1.$$

cualquiera que sea el compacto K no vacío de U. Si $j = n$, entonces

I) Para cada $a \in U$ existe el límite

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ 0 < \lambda < 1}} \frac{f(\lambda a) - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}_j(\lambda a)}{\|\lambda a\|^n} = z_a$$

En efecto, si $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales de $(0, 1)$ que converge hacia 0 y

$$b_m = \frac{f(\lambda_m a) - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}_j(\lambda_m a)}{\|\lambda_a\|^n} \in F, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

entonces la sucesión $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy en F. Para su demostración basta considerar la nueva sucesión de elementos de C

$$\left\{ \frac{\phi \circ f(\lambda_m a) - \sum_{j=0}^{n+1} \hat{A}_{j,\phi}(\lambda_m a)}{\|\lambda_m a\|^{n+1}} \right\}_{m=1}^{\infty}$$

que es acotada, y razonado como en *B*), se obtiene que el conjunto

$$B_2 = \left\{ \frac{b_p - b_q}{(\lambda_p + \lambda_q)\ \|a\|} \ \varepsilon F \,/\, p, q \geqslant 1 \right\}$$

verifica que $\phi\ (B_2)$ es acotado para todo $\phi \in \mathscr{D}$, luego B_2 es acotado en F (Propiedad (P)), y en consecuencia la sucesión $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy en el espacio de Banach F por lo que tiene límite.

II) Aplicando la hipótesis de inducción, si $\phi \in \mathscr{D}$

$$\phi\ (z_a) = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ 0<\lambda<1}} \frac{\phi \circ f\,(\lambda a) - \sum\limits_{j=0}^{n} \hat{A}_{j,\phi}\ (\lambda a) + \hat{A}_{n,\phi}\ (\lambda a)}{\|\lambda a\|^n} = \hat{A}_{n,\phi} \left(\frac{a}{\|a\|} \right)$$

y la función

$$g\colon\ a \in U \to g\ (a) = \|a\|^n\ z_a\, \varepsilon F$$

es tal que

$$g\ (z) = \hat{A}_{n,\phi}\ (z), \qquad z \in U, \qquad \phi \in \mathscr{D},$$

por lo que $g \in \mathscr{H}\ (U, F)$ ([1] prop. 6.1). Además es inmediato comprobar que g es la restricción a U de un polinomio $\hat{A}_n \in \mathscr{P}\ ({}^n E, F)$, tal que

$$\phi \circ \hat{A}_n = \hat{A}_{n,\phi}, \qquad \phi \in \mathscr{D}.$$

III) Si K es un compacto no vacío de U, entonces

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \tilde{K}}} \frac{f\,(z) - \sum\limits_{j=0}^{n} \hat{A}_j\ (z)}{\|z\|^{\,n}} = 0.$$

Sea $\{\omega_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de K con $\lim\limits_{m \to \infty} \omega_m = 0$. Si

$$c_m = \frac{f\,(\omega_m) - \sum\limits_{j=0}^{n} \hat{A}_j\ (\omega_m)}{\|\,\omega_m\|^{\,n}} \in F, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

entonces

$$\frac{|\phi\ (c_p) - \phi\ (c_q)\,|}{\|\omega_p\| + \|\omega_q\|} \leqslant \frac{|\phi \circ f\,(\omega_p) - \sum\limits_{j=0}^{n+1} \hat{A}_{j,\phi}\ (\omega_p)\,|}{\|\,\omega_p\|^{n+1}} + \frac{|\hat{A}_{n+1,\phi}\ (\omega_p)\,|}{\|\,\omega_p\|^{n+1}} +$$

$$+ \frac{|\phi \circ f\,(\omega_q) - \sum\limits_{j=0}^{n+1} \hat{A}_{j,\phi}\ (\omega_q)\,|}{\|\omega_q\|^{n+1}} \quad \frac{|\hat{A}_{n+1,\phi}\ (\omega_q)\,|}{\|\,\omega_q\|^{n+1}}$$

y como la sucesión

$$\left\{ \frac{\phi \circ f(\omega_m) - \sum_{j=0}^{n+1} \hat{A}_{j,\phi}(\omega_m)}{\|\omega_m\|^{n+1}} \right\}_{m=1}^{\infty}$$

converge hacia 0, resulta que el conjunto

$$B_3 = \left\{ \frac{c_p - c_q}{\|\omega_p\| + \|\omega_q\|} \in F \,/\, p, q \geqslant 1 \right\}$$

verifica que $\phi(B_3)$ es acotado para todo $\phi \in \mathscr{G}$, por tanto B_3 es acotado (Propiedad (P)) y la sucesión $\{c_m\}_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy en F. Finalmente, como F es completo, $\{c_m\}_{m=1}^{\infty}$ es convergente y se verifica

$$c = \lim_{m \to \infty} c_m = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \tilde{K}}} \frac{f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z)}{\|z\|^n},$$

luego si $\phi \in \mathscr{G}$

$$\phi(c) = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \tilde{K}}} \frac{\phi \circ f(z) - \sum_{j=0}^{n} \phi \circ \hat{A}_j(z)}{\|z\|^n} = \frac{\phi \circ f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_{j,\phi}(z)}{\|z\|^n} = 0,$$

y como $\mathscr{G}$ separa puntos, se obtiene que $c = 0$.

Corolario 5.— Si f es una aplicación de U en F, los enunciados siguientes son equivalentes:

α) $f \in \mathscr{H}_{\mathfrak{K}}(U, F)$
β) $\phi \circ f \in \mathscr{H}_{\mathfrak{K}}(U, C)$, para todo $\phi \in F'$.

TOPOLOGIA ASOCIADA AL ESPACIO $\mathscr{H}_{\mathfrak{K}}$(U, F)

Para cada elemento f de $\mathscr{H}_{\mathfrak{K}}(U, F)$ con

$$f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z),$$

si $n \in Z$, $n \geqslant -1$ y K es un compacto no vacío de U, se define

$$P_{K,-1}(f) = \sup \{ \|f(z)\| \;/\; z \in \tilde{K} \}, \qquad \text{si} \quad n = -1,$$

$$P_{K,n}(f) = \sup \left\{ \frac{\left\| f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z) \right\|}{\|z\|^n} \;/\; z \in \tilde{K} \right\}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Como $\tilde{K} \cup \{0\}$ es un compacto de E, resulta

$$P_{K,n}(f) < \infty, \qquad n = -1, 0, 1, \ldots,$$

y por tanto $P_{K,n}$ es una seminorma en (U, F).

Definición 6.— Llamaremos topología natural del espacio $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F)$ a la topología localmente convexa $\tau_{\mathfrak{K}}$ definida por la familia de seminormas $(P_{K,n})$ cuando K recorre los compactos no vacíos de U y n los enteros, $n \geqslant -1$.

Proposición 7.— El espacio $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F), \tau_{\mathfrak{K}})$ es separado.

Demostración.— Si K es un compacto no vacío de U

$$\sup \{ \|f(z)\| \;/\; z \in K \} \leqslant \sup \{ \|f(z)\| \;/\; z \in \tilde{K} \} = P_{K,-1}(f),$$

por lo que $\tau_{\mathfrak{K}}$ es más fina que la topología compacto-abierta τ_0 inducida por $\mathcal{H}(U, F)$ en $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F)$ y en consecuencia $\tau_{\mathfrak{K}}$ es separada.

Lema 8.— Sean $m \in Z$, $m \geqslant 0$, y $\{\hat{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red de polinomios de $\mathcal{P}({}^mE, F)$. Si la red $\{\hat{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es de Cauchy en $(\mathcal{H}(U, F), \tau_0)$, entonces $\{\hat{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una red de Cauchy en $(\mathcal{H}(E, F), \tau_0)$.

Proposición 9.— El espacio $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F), \tau_{\mathfrak{K}})$ es compacto.

Demostración.— Sea $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red de Cauchy en $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F), \tau_{\mathfrak{K}})$. Por ser $\tau_{\mathfrak{K}}$ más fina que la inducida por $(\mathcal{H}(U, F), \tau_0)$, la red $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es también de Cauchy en $(\mathcal{H}(U, F), \tau_0)$ y como este espacio es completo, $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge hacia $f \in \mathcal{H}(U, F)$ por la topología τ_0.

Supongamos que para cada $\lambda \in \Lambda$,

$$f_\lambda(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_{j,\lambda}(z),$$

entonces:

1) Para cada $j \in Z$, $j \geqslant 0$, la red $\{\hat{A}_{j,\lambda} | U\}_{\lambda \in \Lambda}$ es de Cauchy en $(\mathscr{H}(U, F), \tau_0)$ y como $(\mathscr{P}(^j E, F), \tau_0)$ es completo ([4] Propiedad 1.32) y se verifica el lema 8, existe un polinomio $\hat{A}_j \in \mathscr{P}(^j E, F)$, tal que la red $\{\hat{A}_{j,\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge hacia $\hat{A}_j$ por la topología compacto-abierta τ_0 de $\mathscr{P}(^j E, F)$.

2) $f \in \mathscr{H}_{\mathfrak{K}}(U, F)$, y además

$$f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$$

En efecto, sea K un compacto no vacío de U y $n \in Z$, $n \geqslant 0$. Fijando $\varepsilon > 0$, se tiene:

a) Existe un $\lambda_0 \in \Lambda$, tal que

$$P_{K,n}(f_\lambda - f_{\lambda'}) =$$

$$= \sup_{z \in \tilde{K}} \frac{\| f_\lambda(z) - f_{\lambda'}(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_{j,\lambda}(z) + \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_{j,\lambda'}(z) \|}{\|z\|^n} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{(I)}$$

b) Para cada $z \in \tilde{K}$, el conjunto $\{z\}$ es un compacto de U, por tanto

$$\lim_{\lambda'} f_{\lambda'}(z) = f(z),$$

y por 1)

$$\lim_{\lambda'} \hat{A}_{j,\lambda'}(z) = \hat{A}_j(z), \qquad j = 0, 1, \ldots,$$

que llevado a (I) da

$$\frac{\| f_\lambda(z) - f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_{j,\lambda}(z) + \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z) \|}{\|z\|^n} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{(II)}$$

para todo $z \in \tilde{K}$ y todo $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geqslant \lambda_0$.

c) Si $\lambda \geqslant \lambda_0$, como $f_\lambda \in \mathscr{H}_{\mathfrak{K}}(U, F)$, existe un número real $\delta > 0$, tal que

$$\frac{\| f_{\lambda'}(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_{j,\lambda'}(z) \|}{\|z\|^n} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{(III)}$$

si $z \in \tilde{K} \cap \mathring{B}(0, \delta)$.

d) Si $\lambda, \lambda' > \lambda_0$ y $z \in \tilde{K} \cap \mathring{B}(0, \delta)$, de (I), (II) y (III) se obtiene:

$$\frac{\|f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z)\|}{\|z\|^n} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

3) La red $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge hacia f por la topología $\tau_{\mathfrak{K}}$.
Sea K un compacto de U, $n \in Z$, $n \geqslant 0$, y fijemos $\varepsilon > 0$. Al igual que en 2-*b*) se prueba que la existencia de un $\lambda_0 \in \Lambda$, tal que

$$P_{K,n}(f_\lambda - f) < \varepsilon, \qquad \lambda \geqslant \lambda_0, \tag{IV}$$

Por otra parte, por ser $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de Cauchy, existe un $\lambda_1 \in \Lambda$ tal que

$$P_{K,-1}(f_\lambda - f_{\lambda'}) = \sup_{z \in K} \|f_\lambda(z) - f_{\lambda'}(z)\| \leqslant \varepsilon,$$

si $\lambda \geqslant \lambda_1$ y por tanto

$$P_{K,-1}(f_\lambda - f) = \sup_{z \in K} \|f_\lambda(z) - f(z)\| \leqslant \varepsilon. \tag{V}$$

De (IV) y (V) se deduce que $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge hacia f por $\tau_{\mathfrak{K}}$.

Corolario 10.— Si $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una red de elementos de $\mathscr{H}_{\mathfrak{K}}(U, F)$ que converge hacia $f \in \mathscr{H}_{\mathfrak{K}}(U, F)$ por la topología $\tau_{\mathfrak{K}}$, y si

$$f_\lambda(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_{j,\lambda}(z), \qquad \text{y} \qquad f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z),$$

para cada $n \in Z$, $n \geqslant 0$, entonces $\{\hat{A}_{n,\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una red de polinomios n-homogéneos que converge hacia $\hat{A}_{n,f} \in \mathscr{P}(^nE, F)$ por la topología compacto-abierta, τ_0, de este espacio.

TONELACION DEL ESPACIO $\mathscr{H}_{\mathfrak{K}}$ (U, F)

Proposición 11.— Si la dimensión de E es finita, entonces el espacio $(\mathscr{H}_{\mathfrak{K}}(U, F), \tau_{\mathfrak{K}})$ es tonelado.

Demostración.— Si E es de dimensión finita, existe una sucesión creciente de compactos de U, $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$, verificando que cualquier compacto K de U está contenido en algún K_m, por lo que la familia numerable de seminormas $\{P_{K_m,n}\}_{n=-1,0,1,\dots}^{m=1,2,\dots}$ determina la misma topología $\tau_{\mathfrak{K}}$ en $\mathscr{H}_{\mathfrak{K}}(U, F)$, y como $(\mathscr{H}_{\mathfrak{K}}(U, F), \tau_{\mathfrak{K}})$ es completo (Prop. 9), resulta ser de Frechet y por tanto tonelado.

Para estudiar el recíproco de esta proposición comenzaremos el estudio para $F = C$.

Proposición 12.— Si el espacio $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, C), \tau_{\mathfrak{K}})$ es tonelado, entonces la dimensión de E es finita.

Demostración.— Sea a un elemento de U que fijamos y consideremos la aplicación

$$Q\colon f \in \mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, C) \to Q(f) = f'(a) \in E'.$$

Se tiene:

a) Q es lineal.
b) Q es sobre. Si $\phi \in E'$, $\phi|_U \in \mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F)$ y $Q(\phi|_U) = \phi'(a) = \phi$.
c) Q es un proyector algebraico. Si $f \in \mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F)$

$$Q(Q(f)) = Q(f'(a)) = f'(a) = Q(f).$$

d) Q es continuo cuando en $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, C)$ se considera la topología $\tau_{\mathfrak{K}}$ y en E' la topología compacto-abierta τ_0. En efecto, si K es un compacto de E, existen dos números reales $r > 0$, $\rho > 0$, tales que el compacto $H = a + \rho K \subset \overline{B}(a, r) \subset U$. Aplicando entonces la fórmula integral de Cauchy, se tiene

$$f'(a)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \rho} \frac{f(a + \lambda x)}{\lambda^2} \, d\lambda$$

para cada $x \in K$, de donde se deduce

$$\sup_{x \in K} |Q(f)(x)| = \sup_{x \in K} |f'(a)(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\rho} \sup \{ |f(a + \lambda x)| \,/\, x \in K,\ \lambda \in C,\ |\lambda| \leqslant \rho \} = \frac{1}{\rho} P_{H,-1}(f).$$

Como $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, C), \tau_{\mathfrak{K}})$ es tonelado y Q es un proyector continuo de $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, C)$ sobre (E', τ_0), resulta que este espacio es tonelado y por tanto la dimensión de E es finita ([5]).

Proposición 13.— Los enunciados siguientes son equivalentes:

α) El espacio $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F), \tau_{\mathfrak{K}})$ es tonelado.
β) El espacio $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, C), \tau_{\mathfrak{K}})$ es tonelado.
γ) La dimensión algebraica de E es finita.

Demostración.–

$\gamma) \Longleftrightarrow \beta)$ Son las proposiciones 11 y 12.
$\gamma) \Rightarrow \alpha)$ Es la proposición 11.
$\alpha) \Rightarrow \beta)$ Sean $\phi \in F'$ con $\|\phi\| = 1$ y $a \in F$ con $\phi(a) = \|a\| = 1$. Se considera la aplicación

$$\psi : f \in \mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F) \to \psi(f) = \phi \circ f \in \mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, C).$$

Esta aplicación verifica las siguientes propiedades:

a) ψ es lineal.
b) ψ es continua. Si K es un compacto de U y $n \in Z$, $n \geqslant -1$

$$P_{K,n}(\phi \circ f) = \|\phi\| P_{K,n}(f) = P_{K,n}(f).$$

c) ψ es suprayectiva. Si $g \in \mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, C)$, entonces $\psi(ag) = g$, donde ag es el elemento de $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F)$ definido por $ag(z) = g(z)a$, $z \in U$.
d) Si V es un entorno de 0 en $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F), \tau_{\mathfrak{K}})$, entonces $\psi(V)$ es un entorno de 0 en $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, C), \tau_{\mathfrak{K}})$.

En efecto, si V es un entorno de 0 en $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F), \tau_{\mathfrak{K}})$, existen compactos $K_1, \ldots, K_j$ de U, existen números enteros $n_1 \geqslant -1, \ldots, n_j \geqslant -1$ y existe un número real $\varepsilon > 0$, tales que el conjunto

$$W = \{f \in \mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F) \,/\, P_{K_1, n_1}(f) < \varepsilon, \ldots, P_{K_j, n_j}(f) < \varepsilon\} \subset V.$$

Por tanto, si

$$W^* = \{g \in \mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, C) \,/\, P_{K_1, n_1}(g) < \varepsilon, \ldots, P_{K_j, n_j}(g) < \varepsilon\},$$

se tiene

$$W^* \subset \psi(W) \subset \psi(V).$$

Sea entonces, T un tonel en $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, C)$ para la topología $\tau_{\mathfrak{K}}$. Por las propiedades *a*), *b*) y *c*) de ψ, resulta inmediato que $\psi^{-1}(T)$ es un tonel en $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F), \tau_{\mathfrak{K}})$, y por tanto $\psi^{-1}(T)$ es un entorno de cero. Finalmente, por *d*), $\psi[\psi^{-1}(T)]$ es un entorno de cero en $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, C), \tau_{\mathfrak{K}})$, y como $\psi[\psi^{-1}(T)] \subset T$, se obtiene que T es un entorno de cero en $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, C), \tau_{\mathfrak{K}})$.

Corolario 14.– Los enunciados siguientes son equivalentes:

$\alpha)$ $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F), \tau_{\mathfrak{K}})$ es casi-tonelado.
$\beta)$ $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, C), \tau_{\mathfrak{K}})$ es casi-tonelado.
$\gamma)$ La dimensión algebraica de E es finita.

Demostración.— Basta observar que $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F), \tau_{\mathfrak{K}})$ es completo cualquiera que sea el espacio de Banach F.

Corolario 15.— Los enunciados siguientes son equivalentes:

α) $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F), \tau_{\mathfrak{K}})$ es bornológico.
β) $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, C), \tau_{\mathfrak{K}})$ es bornológico.
γ) La dimensión algebraica de E es finita.

Como resulta que el espacio $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F), \tau_{\mathfrak{K}})$ no es bornológico a menos que la dimensión del espacio vectorial E sea finita, en el siguiente apartado hallaremos el bornológico asociado a $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F), \tau_{\mathfrak{K}})$ para el caso de que la dimensión algebraica de E sea infinita.

BORNOLOGICO ASOCIADO AL ESPACIO $(\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F), \tau_{\mathfrak{K}})$

Definición 16.— Un recubrimiento numerable I de U diremos que verifica la propiedad $(\mathscr{C})$, si está formado por conjuntos no vacíos y cerrados en U y para cada compacto K de U existe un $H \in I$, tal que $\tilde{K} \subset H$.

Designaremos por $\mathscr{R}$ el conjunto de todas las sucesiones $\mathscr{Y} = \{I_n\}_{n=-1}^{\infty}$ de recubrimientos numerables de U que verifican la propiedad $(\mathscr{C})$.

Si $\mathscr{Y}^1 = \{I_n^1\}_{n=-1}^{\infty}$ e $\mathscr{Y}^2 = \{I_n^2\}_{n=-1}^{\infty}$ son dos elementos de $\mathscr{R}$, diremos que $\mathscr{Y}^2$ es más fino que $\mathscr{Y}^1$, y escribiremos $\mathscr{Y}^2 \geqslant \mathscr{Y}^1$, si para cada $n = -1, 0, 1, \ldots$, el recubrimiento I_n^2 es más fino que el recubrimiento I_n^1, es decir para cada $H \in I_n^2$ existe $G \in I_n^1$, tal que $H \subset G$. Se tiene así en $\mathscr{R}$ una relación de preorden que es filtrante.

Definición 17.— Sea $\mathscr{Y} = \{I_n\}_{n=-1}^{\infty}$ un elemento de $\mathscr{R}$, denotaremos por $\mathcal{H}_{\mathscr{Y}}(U, F)$ el espacio vectorial de todos los elementos $f \in \mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F)$, tales que para cada $n = -1, 0, 1, \ldots$, y para cada $H \in I_n$, se verifica

$$\sup \{\|\varepsilon_{n,f}(z)\| \,/\, z \in H\} < \infty,$$

donde

$$\varepsilon_{-1,f}(z) = f(z),$$

$$\varepsilon_{n,f}(z) = \frac{f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_{j,f}(z)}{\|z\|^n}, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

siendo

$$f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_{j,f}(z).$$

Y llamaremos topología natural de $\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}(U, F)$, a la topología localmente convexa $\tau_{\mathcal{Y}}$ definida por la familia de seminormas $\{P_{H,n}\}$, $n = -1, 0, 1, \ldots$, $H \in I_n$, donde

$$P_{H,n}(f) = \sup \{ \|\varepsilon_{n,f}(z)\| \,/\, z \in H\}.$$

Proposición 18.– Para cada $\mathcal{Y} \in \mathcal{R}$ el espacio $(\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}(U, F), \tau_{\mathcal{Y}})$ es metrizable y completo, y la inyección canónica de este espacio en $(\mathcal{H}_{\mathcal{K}}(U, F), \tau_{\mathcal{K}})$ es continua.

Demostración.–

a) Es inmediato comprobar que $(\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}(U, F), \tau_{\mathcal{Y}})$ es metrizable.

b) Si K es un compacto no vacío de U e $\mathcal{Y} = \{I_n\}_{n=-1}^{\infty}$, como I_n verifica la propiedad $(\mathcal{C})$, $n = -1, 0, 1, \ldots$, existe un $H \in I_n$ tal que $\tilde{K} \subset H$, deduciéndose

$$P_{K,n}(f) \leqslant P_{H,n}(f)$$

para cada $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{Y}}(U, F)$, por lo que la inyección canónica de $\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}(U, F)$ en $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}(U, F)$ es continua.

c) $(\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}(U, F), \tau_{\mathcal{Y}})$ es completo.

En efecto, si $\{f_p\}_{p=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy de elementos de $(\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}(U, F), \tau_{\mathcal{Y}})$, por *b*) $\{f_p\}_{p=1}^{\infty}$ es también una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}_{\mathcal{K}}(U, F), \tau_{\mathcal{Y}})$, y como este espacio es completo, existe $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}}(U, F)$ tal que $\{f_p\}_{p=1}^{\infty}$ converge hacia f por la topología $\tau_{\mathcal{K}}$, y por tanto

$$\lim_{p \to \infty} f_p(z) = f(z) \tag{1}$$

para todo $z \in U$, y por el corolario 10

$$\lim_{p \to \infty} \hat{A}_{j,f_p}(z) = \hat{A}_{j,f}(z) \tag{2}$$

para cada $z \in U$ y $n = 0, 1, \ldots$

Sean $n \in Z$, $n \geqslant -1$ y $H \in I_n$. Fijado $\varepsilon > 0$, existe $p_0 \in N$ tal que para cada $p, q \geqslant p_0$

$$\|\varepsilon_{n,f_p - f_q}(z)\| \leqslant P_{H,n}(f_p - f_q) < \varepsilon,$$

para todo $z \in H$ y por (1) y (2)

$$\lim_{q \to \infty} \|\varepsilon_{n,f_p - f_q}(z)\| = \|\varepsilon_{n,f_p - f}(z)\| < \varepsilon \tag{3}$$

si $z \in H$ y $p \geqslant p_0$, por tanto

$$\sup \{ \|\varepsilon_{n,f}(z)\| \,/\, z \in H\} \leqslant \varepsilon + P_{H,}(f_{p_0}) < \infty,$$

y $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{Y}}(U, F)$. Además por (3), $\{f_p\}_{p=1}^{\infty}$ converge hacia f por la topología $\tau_{\mathcal{Y}}$.

Proposición 19.— Si $\mathcal{Y}^1$ e $\mathcal{Y}^2 \in \mathcal{R}$ e $\mathcal{Y}^2 \geqslant \mathcal{Y}^1$, entonces $\mathcal{H}_{\mathcal{Y}^1}(U, F) \subset \mathcal{H}_{\mathcal{Y}^2}(U, F)$ y la inyección canónica de $(\mathcal{H}_{\mathcal{Y}^1}(U, F), \tau_{\mathcal{Y}^1})$ en $(\mathcal{H}_{\mathcal{Y}^2}(U, F), \tau_{\mathcal{Y}^2})$ es continua. Además

$$\mathcal{H}_{\mathcal{K}}(U, F) = \bigcup_{\mathcal{Y} \in \mathcal{R}} \mathcal{H}_{\mathcal{Y}}(U, F).$$

Demostración.— Sea $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{K}}(U, F)$ y fijemos un elemento $a \in U$. Existe un natural p_0 tal que $\|f(a)\| \leqslant p_0$.

Para cada $n = -1, 0, 1, \ldots$, y cada $p \geqslant p_0$ sea

$$G_{n,p} = \{a \in U \,/\, \|\varepsilon_{n,f}(z)\| \leqslant p\}.$$

La sucesión $\{G_{n,p}\}_{p=p_0}^{\infty}$ es creciente, está formada por conjuntos no vacíos, cerrados en U, y constituye un recubrimiento de U. Además, si

$$I_n = \{G_{n,p}\}_{p=p_0}^{\infty},$$

se tiene

1) El recubrimiento I_n verifica la propiedad ($\mathcal{C}$). En efecto, sea K un compacto de U; como

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \tilde{K}}} \|\varepsilon_{n,f}(z)\|$$

existe y es finito, entonces

$$\|\varepsilon_{n,f}(z)\| \leqslant M$$

para todo $z \in \mathring{B}(0, \delta) \cap \tilde{K}$, para algún $\delta > 0$.

Por otra parte, como $\tilde{K} - \mathring{B}(0, \delta)$ es un compacto de U, y la función $z \in U \to \varepsilon_{n,f}(z) \in F$ es continua en U, existe $M' > 0$ tal que

$$\|\varepsilon_{n,f}(z)\| \leqslant M'$$

para todo $z \in \tilde{K} - \mathring{B}(0, \delta)$. Por tanto, si $p \geqslant \max(p_0, M, M')$, se verifica

$$\|\varepsilon_{n,f}(z)\| \leqslant p, \qquad z \in \tilde{K},$$

de donde se deduce que $\tilde{K} \subset F_{n,p}$.

2) $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{Y}}(U, F)$ siendo $\mathcal{Y} = \{I_n\}_{n=-1}^{\infty} \in \mathcal{R}$.

Notación.– Representaremos por $\tau_{\mathcal{X},\delta}$ la topología localmente convexa sobre $\mathcal{H}_{\mathcal{X}}(U, F)$ que es la más fina de todas las topologías sobre este espacio que hacen continuas las inyecciones canónicas de $(\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}(U, F), \tau_{\mathcal{Y}})$ en $(\mathcal{H}_{\mathcal{X}}(U, F), \tau_{\mathcal{X}})$ cuando $\mathcal{Y}$ recorre los elementos de $\mathcal{R}$. Por la proposición 18

$$\tau_{\mathcal{X}} \leqslant \tau_{\mathcal{X},\delta}$$

y por las proposicicones 18 y 19, $\tau_{\mathcal{X},\delta}$ es el límite inductivo del sistema inductivo $(\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}(U, F), j_{\mathcal{Y}^1, \mathcal{Y}^2})$, $\mathcal{Y}^1, \mathcal{Y}^2 \in \mathcal{R}$ y donde $j_{\mathcal{Y}^1, \mathcal{Y}^2}$ representa la inyección continua de $\mathcal{H}_{\mathcal{Y}^1}(U, F)$ en $\mathcal{H}_{\mathcal{Y}^2}(U, F)$. Además, como para cada $\mathcal{Y} \in \mathcal{R}$, $(\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}(U, F), \tau_{\mathcal{Y}})$ es bornológico, se tiene que $(\mathcal{H}_{\mathcal{X}}(U, F), \tau_{\mathcal{X},\delta})$ es un espacio bornológico.

Proposición 20.– Si X es un subconjunto de $\mathcal{H}_{\mathcal{X}}(U, F)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

α) X es acotado para la topología $\tau_{\mathcal{X},\delta}$.
β) X es acotado para la topología $\tau_{\mathcal{X}}$.

Demostración.–

$\alpha) \Rightarrow \beta)$ Es trivial ya que $\tau_{\mathcal{X},\delta} \geqslant \tau_{\mathcal{X}}$.
$\beta) \Rightarrow \alpha)$ Para cada $n \in Z$, $n \geqslant -1$ y cada $p = 1, 2, \ldots$, sea

$$F_{n,p} = \bigcap_{f \in X} \{z \in U / \ \|\varepsilon_{n,f}(z)\| \leqslant p\}.$$

Se tiene que $\{F_{n,p}\}_{p=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de conjuntos cerrados que recubre a U, por tanto existe un natural $p_0(n)$ tal que

$$F_{n,p} \neq \phi, \quad \text{si} \quad p \geqslant p_0.$$

Si consideramos la sucesión $I_n = \{F_{n,p}\}_{p=p_0}^{\infty}$, se tiene:

1) I_n verivida la propiedad $(\mathcal{C})$, $n = -1, 0, 1, \ldots$
2) $X \subset \mathcal{H}_{\mathcal{Y}}(U, F)$ donde $\mathcal{Y}$ es el elemento de $\mathcal{R}$ definido por $\mathcal{Y} = \{I_n\}_{n=-1}^{\infty}$ y además X es acotado para la topología $\tau_{\mathcal{Y}}$.

Finalmente, como la inyección canónica de $(\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}(U, F), \tau_{\mathcal{Y}})$ en $(\mathcal{H}_{\mathcal{X}}(U, F), \tau_{\mathcal{X},\delta})$ es continua, resulta que X también es acotado para la topología $\tau_{\mathcal{X},\delta}$.

Proposición 21.– La topología $\tau_{\mathfrak{K},\delta}$ en $\mathcal{H}_{\mathfrak{K}}(U, F)$ es la topología bornológica asociada a $\tau_{\mathfrak{K}}$.

Demostración.– La topología bornológica asociada a $\tau_{\mathfrak{K}}$ es la topología (que existe y es única) que tiene los mismos conjuntos acotados que ella. Como $\tau_{\mathfrak{K},\delta}$ es bornológica y se verifica la proposición 20, resulta que $\tau_{\mathfrak{K}}$ es bornológica.

Proposición 22.-- Son equivalentes los enunciados siguientes:

α) La dimensión algebraica de E es infinita.
β) $\tau_{\mathfrak{K},\delta} > \tau_{\mathfrak{K}}$.

Demostración.– Es inmediata a partir del Corolario 15 y de la proposición anterior.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. A. BARROSO: *Introducción a la holomorfía entre espacios normados.* Universidad de Santiago de Compostela. 1976.
[2] J. BOCHNAK Y SICIAK: *Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces.* Studia Math. 39, 1971. pp. 39-76.
[3] J. BOCHNAK Y SICIAK: *Analytic functions in topological vector spaces.* Studia Math. 39. 1971. pp. 77-112.
[4] S. DINEEN: *Complex Analysis in locally convex spaces.* North-Holland. New York. 1981.
[5] J. M. EXBRAYAT: *Functions analytiques sur un espace de Banach.* Seminaire P. Lelong. 1968/69. Lecture Note in Matematics, n° 116. Springer Verlag.
[6] J. GARXOUX: *Spaces vectorials topologiques et distributions.* Dunod. París. 1963.
[7] M. VALDIVIA: *Desarrollos asintóticos y familias compactas de funciones holomorfas.* Revista de la Real Academia de Ciencias, LIX. 1965.

Dpto.de Matemáticas
Facultad de Informática
Universidad Politécnica
C/ Pablo Gargallo, 5
08028-BARCELONA