Derivadas reducibles de grado superior

POR JAVIER PERALTA

Recibido: 12 junio 1985

Presentado por el académico numerario D. José J. Etayo

Abstract

Following the process which we started in [6] to find the underlying algebraic structure to the different definitions of derivatives on a differentiable manifold, we study the conditions in which the notions of derivative of degree two and Bompiani's derivative would approach. On the other hand, the result obtained by composing two derivatives of first degree is generalized and it is proved that the composition of n derivatives of first degree is another derivative of n degree, as well as the composition of two derivatives of r and s degree is another derivative of $r + s$ degree.

Resumen

Siguiendo el camino indicado en [6] para hallar la estructura algebraica subyacente a las distintas definiciones de derivadas sobre una variedad diferenciable, se estudia en qué condiciones se aproximarían más las nociones de derivada de grado dos y de Bompiani. De otra parte, se generaliza el resultado obtenido al componer dos derivadas de primer grado, y se prueba que la composición de n derivadas de primer grado es otra de grado n, así como que la composición de dos derivadas de grados r y s es una de grado $r + s$.

English title: "Reducible derivatives of higher degree".

1. INTRODUCCION

En [6] nos propusimos hacer un estudio algebraico de los conceptos clásicos, definidos en variedades diferenciables, de conexión lineal, conexión de segundo orden —según la definición dada en [2]— y conexión de orden $n \geqslant 2$ ([3]). El presente artículo puede considerarse como una continuación de aquél y del cual recordamos en las siguientes líneas algunas definiciones y resultados.

Dado un anillo A conmutativo, unitario, sin divisores de cero y de característica nula, llamábamos *vector* de A a toda aplicación aditiva $X: A \to A$ que cumpla:

El presente trabajo ha sido realizado en el Departamento de Topología y Geometría de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense.

$$X(a \cdot b) = aX(b) + bX(a).$$

Precisamente en el A-módulo M de los vectores de A es donde estudiábamos las distintas derivadas y conexiones.

Si P y Q son dos A-módulos y F una aplicación aditiva de P en Q, las aplicaciones $F^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, definidas como $F^{(0)} = F$, y si $n \geqslant 1$,

$$F^{(n)} : A^n \times P \to Q$$

tal que

$$F^{(n)}(a_1, ..., a_n, p) = F^{(n-1)}(a_2, ..., a_n, a_1 p) - a_1 F^{(n-1)}(a_2, ..., a_n, p),$$

decíamos que eran las *extensiones graduadas* de F. Particular importancia tenía la expresión de $F^{(n)}$ en función de F:

$$F^{(n)}(a_1, ..., a_n, p) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} a_{\sigma(k+1)} \dots a_{\sigma(n)} F(a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(k)}\, p). \tag{1}$$

El concepto de extensión graduada nos permitía definir el de *aplicación aditiva de grado n* como toda aplicación aditiva $F: P \to Q$ tal que $F^{(n)} \neq 0$ y $F^{(n+1)} = 0$.

A partir de las definiciones anteriores llegábamos al concepto de *derivada de grado n*. Llamábamos derivada de grado n respecto de $(X_1, ..., X_n) \in \in M^n$ a toda aplicación aditiva de grado n

$$D_{(X_1, ..., X_n)} : M \to M$$

cuya extensión graduada enésima verificaba:

$$D_{(X_1, ..., X_n)}{}^{(n)}(a_1, ..., a_n) = \sum_{\sigma \in S_n} X_1(a_{\sigma(1)}) \dots X_n(a_{\sigma(n)})\, Y. \tag{2}$$

Derivación de grado n era la aplicación D que hacía corresponder a cada $(X_1, ..., X_n)$ una derivada $D_{(X_1, ..., X_n)}$. Si $\forall i \in \{1, ..., n\}$ se cumple que

$$D_{(X_1, ..., X_i + X_i', ..., X_n)} = D_{(X_1, ..., X_i, ..., X_n)} + D_{(X_1, ..., X_i', ..., X_n)},$$

decíamos entonces que la derivación era *multiaditiva*, y si además

$$D_{(X_1, ..., aX_i, ..., X_n)} = aD_{(X_1, ..., X_i, ..., X_n)},$$

que era *covariante* o que se trataba de una *conexión de grado n*.

Las derivadas de grado n nos servían para poner un poco de orden entre las distintas definiciones de derivadas, pues probábamos que la definición de derivada de grado uno, D_X, si $X \neq 0$, resultaba ser equivalente a la definición de derivada primaria (traducción algebraica al A-módulo M de la derivada respecto de una conexión lineal), la definición de derivada de grado cero era equivalente a la definición de derivada banal no nula (una derivada banal era una derivada primaria respecto del vector cero), y la definición de derivada de grado $n \geqslant 2$, $D_{(X_1, \ldots, X_n)}$, era equivalente a la traducción algebraica de la definición de derivada de orden $n \geqslant 2$, si $X_i \neq 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Podíamos, por lo tanto, afirmar que las derivadas de grado n constituían la estructura algebraica subyacente a las distintas derivadas sobre una variedad diferenciable.

En cambio, si trasladábamos al A-módulo M la definición de derivada de orden dos en variedades —desarrollada en [2], si bien introducida en [1]— observábamos que dicha derivada, que llamábamos *derivada de Bompiani*, no era equivalente a la derivada de grado dos, si bien esta última era una generalización de aquélla.

Recordemos la definición que dábamos en [6] de derivada de Bompiani:

Sea $\mathscr{T}_r^s$ el A-módulo de los tensores (r, s) de M y $\mathscr{C}$ una aplicación del A-módulo $M \times M$ en el A-módulo $\mathscr{H}(M, \mathscr{T}^2)$ de los homomorfismos aditivos de M en $\mathscr{T}^2$ que verifique:

$$(C_3)\ \mathscr{C}_{(X,Y)}(aZ) = a\mathscr{C}_{(X,Y)} Z + X(a)\, Y \otimes Z + Y(a)\, X \otimes Z.$$

Sea $\mathscr{D}$ una aplicación del A-módulo $M \times M$ en el A-módulo $\mathscr{H}(M, M)$ de los homomorfismos aditivos de M en M que cumpla:

$$(C_4)\ \mathscr{D}_{(X,Y)}(aZ) = a\mathscr{D}_{(X,Y)} Z + c_1^1\,(da \otimes \mathscr{C}_{(X,Y)} Z) + Y(X(a))\, Z,$$

donde c_1^1 representa la contracción del primer índice de contravariancia y del primer índice de covariancia.

Decimos entonces que $D = \mathscr{D}$ es una *derivación de Bompiani* definida por el par de operadores $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$, y que $D_{(X,Y)} = \mathscr{D}_{(X,Y)}$ es la derivada de Bompiani respecto de (X, Y). Si suponemos además que $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son homomorfismos biaditivos, diremos que la derivación es *biaditiva*, y si además $\mathscr{D}$ es A-bilineal y $\mathscr{C}$ cumple los axiomas:

$$(C_1)\ \mathscr{C}_{(aX,Y)} Z = a\mathscr{C}_{(X,Y)} Z - Y(a)\, X \otimes Z,$$

$$(C_2)\ \mathscr{C}_{(X,aY)} Z = a\mathscr{C}_{(X,Y)} Z,$$

diremos que la derivación es *covariante* o que es una *conexión de Bompiani.*

* * * * *

En el Párrafo 2, al estudiar bajo qué condiciones una derivada de grado dos es de Bompiani, se observa que la composición de dos derivadas de grado uno es otra de grado dos (Prop. 2.1). A tales derivadas de grado dos que pueden obtenerse como composición de dos de grado uno les llamaremos *re-*

ducibles, y se prueba que la definición de derivada de Bompiani es equivalente, precisamente, a la definición de derivada de grado dos reducible (Prop. 2.3).

En el Párrafo 3, con la ayuda de los Lemas 3.1, 3.2 y 3.3, se generaliza el resultado obtenido en la Prop. 2.1 a la composición de n derivadas de primer grado (Prop. 3.1) y, como consecuencia del Lema 3.4 sobre extensiones graduadas de aplicaciones aditivas, se demuestra que al componer derivadas de grados r y s se obtienen derivadas de grado $r+s$ (Prop. 3.3).

2. DERIVADAS DE GRADO DOS REDUCIBLES

Si D_X y D'_Y son dos derivadas de grado uno y $a \in A$, es sencillo demostrar que $D_X + D'_Y$, aD_X y $[D_X, D'_Y]$ son también derivadas de grado uno respecto de $X + Y$, aX y $[X, Y]$, respectivamente. Si componemos D_X con D'_Y obtenemos lo siguiente.

Proposición 2.1.– La composición de dos derivadas de grado uno D_X, D'_Y, es una derivada de grado dos respecto de (X, Y).

Demostración.– $D'_Y \circ D_X$ es una aplicación aditiva de M en M y su extensión graduada segunda es:

$$(D'_Y \circ D_X)^{(2)} (a_1, a_2, Z) =$$

$$= (D'_Y \circ D_X)^{(1)} (a_2, a_1 Z) - a_1 (D'_Y \circ D_X)^{(1)} (a_2, Z) =$$

$$= (D'_Y \circ D_X)(a_2 a_1 Z) - a_2 (D'_Y \circ D_X)(a_1 Z) - a_1 (D'_Y \circ D_X)(a_2 Z) +$$

$$+ a_1 a_2 (D'_Y \circ D_X) Z,$$

y operando sin dificultad se llega a:

$$(D'_Y \circ D_X)^{(2)} (a_1, a_2, Z) = \sum_{\sigma \in S_2} X(a_{\sigma(1)})\, Y(a_{\sigma(2)})\, Z.$$

$D'_Y \circ D_X$ es de grado dos, pues

$$(D'_Y \circ D_X)^{(3)} (a_0, a_1, a_2, Z) =$$

$$= (D'_Y \circ D_X)^{(2)} (a_1, a_2, a_0 Z) - a_0 (D'_Y \circ D_X)^{(2)} (a_1, a_2, Z) = 0$$

y

$$(D'_Y \circ D_X)^{(2)} \neq 0.$$

En efecto: Si no hubiera un $a \in A$ tal que $X(a) \neq 0$, $Y(a) \neq 0$, como de la definición de derivada se deduce que $X \neq 0 \neq Y$ (ver [6]) entonces existirá $a_1 \in A$ tal que $X(a_1) \neq 0$ (luego $Y(a_1) = 0$) y $a_2 \in A$ tal que $Y(a_2) \neq 0$ (luego $X(a_2) = 0$), y tomando $Z \neq 0$, se tiene:

$$(D'_Y \circ D_X)^{(2)} (a_1, a_2, Z) = X(a_1)\, Y(a_2)\, Z \neq 0.$$

Por el contrario, si hubiera un $a \in A$ tal que $X(a) \neq 0$, $Y(a) \neq 0$, eligiendo $a_1 = a_2 = a$, $Z \neq 0$, se llega a que

$$(D'_Y \circ D_X)^{(2)} (a_1, a_2, Z) = 2X(a)\, Y(a)\, Z \neq 0. \qquad \square$$

Como consecuencia de que

$$\sum_{\sigma \in S_2} X(a_{\sigma(1)})\, Y(a_{\sigma(2)})\, Z = \sum_{\sigma \in S_2} Y(a_{\sigma(1)})\, X(a_{\sigma(2)})\, Z,$$

se deduce:

Corolario 2.1.– $D'_Y \circ D_X$ es una derivada de grado dos respecto de (Y, X).

Definición 2.1.– Diremos que una derivada de grado dos es *reducible* si es composición de dos derivadas de grado uno.

Se demuestra fácilmente la siguiente proposición.

Proposición 2.2.– Si, para cada par (X, Y), $D''_{(X,Y)}$ es una derivada reducible: $D''_{(X,Y)} = D'_Y \circ D_X$, se verifican las siguientes propiedades entre las derivaciones:

(i) Si D y D' son aditivas, D'' es biaditiva.
(ii) Si D y D' son covariantes, D'' es covariante.
(iii) Si D_X y D'_Y son inyectivas $\forall (X, Y)$, se cumplen los recíprocos de (i), (ii).

En [6] vimos que toda derivada de Bompiani era una derivada de segundo grado. Veamos ahora que, en el caso de que la derivada de segundo grado sea reducible, ambas definiciones coinciden.

Proposición 2.3.– Si una derivada de segundo grado es reducible, las definiciones de derivada de segundo grado y de Bompiani son equivalentes.

Demostración.– Si $D''_{(X,Y)} = D'_Y \circ D_X$ es una derivada de segundo grado reducible y definimos

$$\mathscr{C}_{(X,Y)} = X \otimes D'_Y + Y \otimes D_X, \qquad \mathscr{D}_{(X,Y)} = D_{(X,Y)},$$

se demuestra inmediatamente que

$$\mathscr{C}_{(X,\,Y)} \in \mathscr{H}(M, \mathscr{C}^2), \qquad \mathscr{D}_{(X,\,Y)} \in \mathscr{H}(M, M)$$

y se cumplen (C_3) y (C_4). □

Aunque es sencillo demostrar que toda derivación biaditiva de Bompiani es una derivación biaditiva de segundo grado, no se verifica el recíproco, ni siquiera en el caso de que la derivación de segundo grado asigne a cada (X, Y) una derivada reducible $D''_{(X,\,Y)} = D'_Y \circ D_X$, ya que los operadores $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ definidos a partir de ella –tal como se indica en la proposición anterior–, si bien cumplen que $\mathscr{D}$ es un homomorfismo biaditivo, no ocurre lo mismo con $\mathscr{C}$ (para que así fuera, habría que imponer además que D_X y D'_Y fuesen inyectivas (Prop. 2.2 (iii)). También, toda derivación covariante de Bompiani es una derivación covariante de segundo grado, pero aun suponiendo que las derivadas de segundo grado fuesen reducibles y sus componentes inyectivas, tampoco se cumpliría el recíproco, pues no se verifica (C_1).

3. DERIVADAS DE GRADO n REDUCIBLES

Intentamos generalizar la Prop. 2.1 y probar que la composición de n derivadas de grado uno es una derivada de grado n, tema tratado parcialmente en [4] para los casos 2 y 3.

Notaciones:

1) Cuando no haya lugar a confusión, escribiremos D_h en vez de $D^h_{X_h}$.
2) En las Prop. 3.2 y 3.3 a $D_{(X_1,\,\dots,\,X_r)}$, $D'_{(Y_1,\,\dots,\,Y_s)}$ y $D''_{(X_1,\,\dots,\,X_r,\,Y_1,\,\dots,\,Y_s)}$ denotaremos, respectivamente, $\mathbf{D}_r$, $\mathbf{D}'_s$ y $\mathbf{D}''_{r+s}$.
3) Si $k = 1, 2, \dots$, y $1 \leqslant h \leqslant k$, llamaremos $\mathscr{P}^h_k$ al conjunto de las particiones de $A_k = \{1, \dots, k\}$ en h subconjuntos no vacíos, donde entendemos que dos particiones que consten de los mismos subconjuntos son iguales, aunque dichos subconjuntos estén en distinto orden.
4) Sea $\{H_1, \dots, H_h\} \in \mathscr{P}^h_k$ y consideremos a los elementos de cada H_i ordenados en sentido decreciente (si $H_i = \{s, t, \dots, u\}$, entonces $s > t > \dots > u$). Escribiremos entonces $X_s \circ X_t \circ \dots \circ X_u = \mathbf{X}_{H_i}$.
5) Si $1 \leqslant h \leqslant k \leqslant p$ y $\sigma \in S_p$, haremos la siguiente simplificación en la notación:

$$\sum_{\{H_1,\,\dots,\,H_h\} \in \mathscr{P}^h_k} \mathbf{X}_{H_1}(a_{\sigma(1)}) \dots \mathbf{X}_{H_h}(a_{\sigma(h)}) = \mathbf{X}^{\mathscr{P}^h_k}(a_{\sigma(A_h)}).$$

Lema 3.1.– Si $D_1, \dots, D_n$ son n derivadas de grado uno, su composición verifica:

$$(D_n \circ \ldots \circ D_1)(aY) = a\,(D_n \circ \ldots \circ D_1)\,Y +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} \sum_{i_1 < \ldots < i_m \in A_n} X_{i_m} \circ \ldots \circ X_{i_1}\,(a)\,(D_n \circ \ldots \circ \hat{D}_{i_m} \circ \ldots \circ \hat{D}_{i_1} \circ \ldots \circ D_1)\,Y,$$

$$\forall\,(a, Y) \in A \times M.$$

Demostración.– Por inducción.
Es evidente que se cumple para $n = 1$.
Si lo admitimos cierto para $n - 1$, se tiene:

$$(D_n \circ D_{n-1} \circ \ldots \circ D_1)(aY) = D_n\,[a\,(D_{n-1} \circ \ldots \circ D_1)\,Y +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{i_1 < \ldots < i_m \in A_{n-1}} X_{i_m} \circ \ldots \circ X_{i_1}\,(a)$$

$$(D_{n-1} \circ \ldots \circ \hat{D}_{i_m} \circ \ldots \circ \hat{D}_{i_1} \circ \ldots \circ D_1)\,Y] =$$

$$= a\,(D_n \circ D_{n-1} \circ \ldots \circ D_1)\,Y + X_n\,(a)\,(D_{n-1} \circ \ldots \circ D_1)\,Y +$$

$$+ D_n\,[\sum_{m=1}^{n-1} \sum_{i_1 < \ldots < i_m \in A_{n-1}} X_{i_m} \circ \ldots \circ X_{i_1}\,(a)$$

$$(D_{n-1} \circ \ldots \circ \hat{D}_{i_m} \circ \ldots \circ \hat{D}_{i_1} \circ \ldots \circ D_1)\,Y].$$

Como

$$X_n\,(a)\,(D_{n-1} \circ \ldots \circ D_1)\,Y +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{i_1 < \ldots < i_m \in A_{n-1}} [X_{i_m} \circ \ldots \circ X_{i_1}\,(a)$$

$$(D_n \circ D_{n-1} \circ \ldots \circ \hat{D}_{i_m} \circ \ldots \circ \hat{D}_{i_1} \circ \ldots \circ D_1)\,Y +$$

$$+ X_n \circ X_{i_m} \circ \ldots \circ X_{i_1}\,(a)\,(D_{n-1} \circ \ldots \circ \hat{D}_{i_m} \circ \ldots \circ \hat{D}_{i_1} \circ \ldots \circ D_1)\,Y] =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \sum_{i_1 < \ldots < i_m \in A_n} X_{i_m} \circ \ldots \circ X_{i_1}\,(a)\,(D_n \circ \ldots \circ \hat{D}_{i_m} \circ \ldots \circ \hat{D}_{i_1} \circ \ldots \circ D_1)\,Y,$$

queda probado para n. □

El siguiente lema puede probarse sin dificultad.

Lema 3.2.– $\forall p \geqslant 1$ y $\forall (a_1, \ldots, a_p, X) \in A^p \times M$, se verifica:

$$X\,(a_1 \ldots a_p) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\sigma \in S_p} a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(p)}\,X\,(a_{\sigma(1)}).$$

Lema 3.3.– Si $1 \leqslant k \leqslant p$, se cumple:

$$X_k \circ \ldots \circ X_1 \,(a_1 \ldots a_p) =$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\sigma \in S_p} a_{\sigma(l+1)} \ldots a_{\sigma(p)} \, \mathbf{X}^{\mathscr{P}_l}_{k} \,(a_{\sigma(A_l)}).$$

Demostración.– Por inducción sobre k.
Si $k = 1$ se verifica como consecuencia del Lema 3.2.
Si lo admitimos cierto para k, vamos a demostrarlo para $k + 1$:

$$X_{k+1} \circ X_k \circ \ldots \circ X_1 \,(a_1 \ldots a_p) =$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\sigma \in S_p} a_{\sigma(l+1)} \ldots a_{\sigma(p)} \, X_{k+1} \circ \mathbf{X}^{\mathscr{P}_l}_{k} \,(a_{\sigma(A_l)}) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\sigma \in S_p} \frac{1}{(p-(l+1))!} \sum_{\tau \in S_{\sigma(p)}} a_{\tau\sigma(l+2)} \ldots a_{\tau\sigma(p)} \,\cdot$$

$$\cdot \, X_{k+1} \,(a_{\tau\sigma(l+1)}) \, \mathbf{X}^{\mathscr{P}_l}_{k} \,(a_{\sigma(A_l)}).$$

Ahora bien, este segundo sumando resulta:

$$\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(p-1)!} \cdot \frac{(p-1)!}{(p-(l+1))!} \sum_{\sigma \in S_p} a_{\sigma(l+2)} \ldots a_{\sigma(p)}$$

$$X_{k+1} \,(a_{\sigma(l+1)}) \, \mathbf{X}^{\mathscr{P}_l}_{k} \,(a_{\sigma(A_l)}) =$$

$$= \sum_{l=2}^{k} \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\sigma \in S_p} a_{\sigma(l+1)} \ldots a_{\sigma(p)} \, X_{k+1} \,(a_{\sigma(l)}) \, \mathbf{X}^{\mathscr{P}_{l-1}}_{k} \,(a_{\sigma(A_{l-1})}) +$$

$$+ \frac{1}{(p-(k+1))!} \sum_{\sigma \in S_p} X_{k+1} \,(a_{\sigma(k+1)}) \, \mathbf{X}^{\mathscr{P}_k}_{k} \,(a_{\sigma(A_k)}),$$

y sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:

$$X_{k+1} \circ X_k \circ \ldots \circ X_1 \,(a_1 \ldots a_p) =$$

$$= \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\sigma \in S_p} a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(p)} \, X_{k+1} \circ \mathbf{X}^{\mathscr{P}_1}_{k} \,(a_{\sigma(A_l)}) +$$

$$+\sum_{l=2}^{k} \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\sigma\in S_p} a_{\sigma(l+1)} \dots a_{\sigma(p)} \cdot$$

$$\cdot [X_{k+1} \circ \mathbf{X}^{\mathscr{P}^l_k} (a_{\sigma(A_l)}) + X_{k+1} (a_{\sigma(l)}) \mathbf{X}^{\mathscr{P}^{l-1}_k} (a_{\sigma(A_{l-1})})] +$$

$$+ \frac{1}{(p-(k+1))!} \sum_{\sigma\in S_p} X_{k+1} (a_{\sigma(k+1)}) \mathbf{X}^{\mathscr{P}^k_k} (a_{\sigma(A_k)}). \tag{3}$$

Pero teniendo en cuenta que $\mathscr{P}^l_{k+1}$ puede considerarse como unión de los conjuntos

$$\{\{H_1, \dots, H_i \cup \{k+1\}; \dots, H_l\} \;/\; \{H_1, \dots, H_l\} \in \mathscr{P}^l_k, \quad 1 \leqslant i \leqslant l\}$$

y

$$\{\{H_1, \dots, H_{l-1}, \{k+1\}\} \;/\; \{H_1, \dots, H_{l-1}\} \in \mathscr{P}^{l-1}_k\},$$

se deduce que:

$$\sum_{\sigma\in S_p} a_{\sigma(l+1)} \dots a_{\sigma(p)} [X_{k+1} \circ \mathbf{X}^{\mathscr{P}^l_k} (a_{\sigma(A_l)}) +$$

$$+ X_{k+1} (a_{\sigma(l)}) \mathbf{X}^{\mathscr{P}^{l-1}_k} (a_{\sigma(A_{l-1})})] =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_p} a_{\sigma(l+1)} \dots a_{\sigma(p)} \mathbf{X}^{\mathscr{P}^l_{k+1}} (a_{\sigma(A_l)}), \qquad 2 \leqslant l \leqslant k. \tag{4}$$

Además, son inmediatas las siguientes relaciones:

$$\sum_{\sigma\in S_p} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(p)} X_{k+1} \circ \mathbf{X}^{\mathscr{P}^1_k} (a_{\sigma(A_1)}) =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_p} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(p)} \mathbf{X}^{\mathscr{P}^1_{k+1}} (a_{\sigma(A_1)}), \tag{5}$$

$$\sum_{\sigma\in S_p} X_{k+1} (a_{\sigma(k+1)}) \mathbf{X}^{\mathscr{P}^k_k} (a_{\sigma(A_k)}) = \sum_{\sigma\in S_p} \mathbf{X}^{\mathscr{P}^{k+1}_{k+1}} (a_{\sigma(A_{k+1})}). \tag{6}$$

Sustituyendo (4), (5) y (6) en (3), queda probado para $k+1$. □

Proposición 3.1.– La composición de n derivadas de grado uno, D_1, ..., D_n es una derivada respecto de $(X_1, \dots, X_n)$.

Demostración.– Empecemos probando (2).

Como consecuencia de la relación (1) sobre extensiones graduadas de aplicaciones aditivas –demostrada en [5]– y del Lema 3.1:

$$(D_n \circ \dots \circ D_1)^{(n)} (a_1, \dots, a_n, Y) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} a_{\sigma(i+1)} \dots a_{\sigma(n)} [a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(i)} (D_n \circ \dots \circ D_1) Y +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j_1 < \dots < j_k \in A_n} X_{j_k} \circ \dots \circ X_{j_1} (a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(i)}) \cdot$$

$$\cdot (D_n \circ \dots \circ \hat{D}_{j_k} \circ \dots \circ \hat{D}_{j_1} \circ \dots \circ D_1) Y].$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n)} (D_n \circ \dots \circ D_1) Y =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}\, n!}{i!\,(n-i)!} a_1 \dots a_n (D_n \circ \dots \circ D_1) Y = 0,$$

se llega a:

$$(D_n \circ \dots \circ D_1)^{(n)} (a_1, \dots, a_n, Y) = \Sigma_1 + \dots + \Sigma_n,$$

donde si $k \in A_n$, hemos llamado

$$\Sigma_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{j_1 < \dots < j_k \in A_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \prod_{i+1}^{n} a_{\sigma(r)} X_{j_k} \circ \dots \circ X_{j_1} \cdot$$

$$\cdot \left(\prod_{1}^{i} a_{\sigma(s)} \right) (D_n \circ \dots \circ \hat{D}_{j_k} \circ \dots \circ \hat{D}_{j_1} \circ \dots \circ D_1) Y.$$

En virtud del lema 3.3, si $1 \leqslant k < n$ se deduce que

$$\Sigma_k = \sum_{j_1 < \dots < j_k \in A_n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \prod_{i+1}^{n} a_{\sigma(r)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{l=1}^{k} \frac{i!}{(i-l)!} \prod_{l+1}^{i} a_{\sigma(s)} X^{\mathscr{P}_k^l} (a_{\sigma(A_l)}) (D_n \circ \dots \circ \hat{D}_{j_k} \circ \dots \circ \hat{D}_{j_1} \circ \dots \circ D_1) Y =$$

$$= \sum_{j_1 < \dots < j_k \in A_n} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{l=1}^{k} \sum_{i=l}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{(i-l)!\,(n-i)!} \prod_{l+1}^{n} a_{\sigma(r)} \cdot$$

$$\cdot\, \mathbf{X}^{\mathscr{P}^l}{}_k\, (a_{\sigma(A_l)})\, (D_n \circ \ldots \circ \hat{D}_{j_k} \circ \ldots \circ \hat{D}_{j_1} \circ \ldots \circ D_1)\, Y = 0,$$

y

$$\Sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-1)!}\, a_{\sigma(i+1)} \ldots a_{\sigma(n)} \,\cdot$$

$$\cdot \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(i-1)!} \sum_{\tau \in S_{\sigma(i)}} a_{\tau\sigma(l+1)} \ldots a_{\tau\sigma(i)}\, \mathbf{X}^{\mathscr{P}^l}{}_n\, (a_{\tau\sigma(A_l)})\, Y =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\, a_{\sigma(i+1)} \ldots a_{\sigma(n)} \,\cdot$$

$$\cdot \sum_{l=1}^{n} \frac{i!}{(i-l)!}\, a_{\sigma(l+1)} \ldots a_{\sigma(i)}\, \mathbf{X}^{\mathscr{P}^l}{}_n\, (a_{\sigma(A_l)})\, Y =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=l}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{(i-l)!\,(n-i)!}\, a_{\sigma(l+1)} \ldots a_{\sigma(n)}\, \mathbf{X}^{\mathscr{P}^l}{}_n\, (a_{\sigma(A_l)})\, Y.$$

Pero

$$\sum_{i=l}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{(i-l)!\,(n-i)!} = 0$$

si $1 \leqslant l < n$, luego:

$$(D_n \circ \ldots \circ D_1)^{(n)}\, (a_1, \ldots, a_n, Y) = \Sigma_n =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} X_1\, (a_{\sigma(1)}) \ldots X_n\, (a_{\sigma(n)})\, Y, \qquad \text{c.q.d.}$$

Veamos ahora que $D_n \circ \ldots \circ D_1$ es de grado n:

$(D_n \circ \ldots \circ D_1)^{(n+1)} = 0$ como consecuencia de la definición de extensión graduada y de aplicar la relación (2).

$(D_n \circ \ldots D_1)^{(n)} \neq 0$. En efecto; distingamos dos casos mutuamente excluyentes:

(i) Si $\nexists\, a \in A \,/\, X_1\,(a) \neq 0, \ldots, X_n\,(a) \neq 0$.

De la definición de derivada de grado n se deduce (ver [6]) que $X_i \neq 0$, $\forall\, i$, luego $\exists\, a_1' \in A \,/\, X_1\,(a_1') \neq 0$.

Mediante una reordenación de los índices si fuera preciso, $\exists\, n_1$, $1 \leqslant n_1 < n$, tal que

$$X_2\,(a_1') \neq 0, \quad \ldots, \quad X_{n_1}\,(a_1') \neq 0, \qquad X_{n_1+1}\,(a_1') = 0, \quad \ldots, \quad X_n\,(a_1') = 0.$$

Como $X_{n_1+1} \neq 0$, $\exists\, a'_2 \in A$ y $\exists\, n_2$, $n_1 + 1 \leqslant n_2 < n$ tal que

$$X_{n_1+1}(a'_2) \neq 0, \quad \ldots, \quad X_{n_2}(a'_2) \neq 0, \qquad X_{n_2+1}(a'_2) = \ldots = X_n(a'_2) = 0.$$

Este proceso terminará en un número finito de pasos $n_1, n_2, \ldots, n_p$, con $n_1 < n_2 < \ldots < n_p = n$, y existirán $a'_1, a'_2, \ldots, a'_p \in A$ tales que:

$$\begin{array}{llll} X_i(a'_1) \neq 0, & 1 \leqslant i \leqslant n_1; & X_j(a'_1) = 0, & j > n_1 \\ X_i(a'_2) \neq 0, & n_1 + 1 \leqslant i \leqslant n_2; & X_j(a'_2) = 0, & j > n_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_i(a'_p) \neq 0, & n_{p-1} + 1 \leqslant i \leqslant n_p = n. & & \end{array}$$

Elijamos

$$a_i = \begin{cases} a'_1, & 1 \leqslant i \leqslant n_1 \\ a'_2, & n_1 < i \leqslant n_2 \\ \ldots & \ldots \\ a'_p, & n_{p-1} < i \leqslant n_p = n, \end{cases}$$

$Y \neq 0$. Entonces:

$$(D_n \circ \ldots \circ D_1)^{(n)}(a_1, \ldots, a_n, Y) =$$

$$= n_1!\, n_2! \ldots n_p!\, X_1(a'_1) \ldots X_{n_1}(a'_1)\, X_{n_1+1}(a'_2) \ldots$$

$$\ldots X_{n_2}(a'_2)\, X_{n_{p-1}+1}(a'_p) \ldots X_{n_p}(a'_p)\, Y \neq 0,$$

pues el anillo A es dominio de integridad y de característica nula.

(ii) Si $\exists\, a \in A \,/\, X_1(a) \neq 0, \ldots, X_n(a) \neq 0$, estamos en el caso anterior con $n_1 = n$, y

$$(D_n \circ \ldots \circ D_1)^{(n)}(a_1, \ldots, a_n, Y) = n!\, X_1(a'_1) \ldots X_n(a'_1)\, Y \neq 0. \qquad \square$$

Corolario 3.1.– $D_n \circ \ldots \circ D_1$ es una derivada de grado n respecto de $(X_{\tau(1)}, \ldots, X_{\tau(n)})$, $\forall\, \tau \in S_n$.

Definición 3.1.– Diremos que una derivada de grado n es *reducible* si es composición de n derivadas de grado uno.

Es fácil demostrar la siguiente Proposición.

Proposición 3.2. – Si $\mathbf{D}_n = D_{(X_1, \ldots, X_n)}$ es una derivada de grado n reducible:

$$D_{(X_1, \ldots, X_n)} = D^n_{X_n} \circ \ldots \circ D^1_{X_1}, \qquad \forall\, (X_1, \ldots, X_n),$$

se verifican las siguientes propiedades entre las derivaciones:

(i) Si $D^1, \ldots, D^n$ son aditivas, D es multiaditiva.
(ii) Si $D^1, \ldots, D^n$ son covariantes, D es covariante.
(iii) Si $D^1_{X_1}, \ldots, D^n_{X_n}$ son inyectivas $\forall\, (X_1, \ldots, X_n)$, se verifican los recíprocos de (i), (ii).

En [5] puede verse el siguiente resultado sobre extensiones graduadas de aplicaciones aditivas.

Lema 3.4.– Si F y *G* son dos aplicaciones aditivas de un A-módulo P en sí mismo, las extensiones graduadas de $G \circ F$ verifican:

$$(G \circ F)^{(n)}\,(a_1, \ldots, a_n, p) = (G \circ F^{(n)})\,(a_1, \ldots, a_n, p) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} G^{(n-k)} \cdot$$
$$\cdot\,(a_1, \ldots, \hat{a}_{i_1}, \ldots, \hat{a}_{i_k}, \ldots, a_n, F^{(k)}\,(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, p)),$$
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \forall\, (a_1, \ldots, a_n, p) \in A^n \times P.$$

Proposición 3.3.– La composición de una derivada de grado r respecto de $(X_1, \ldots, X_r)$ con una derivada de grado s respecto de $(Y_1, \ldots, Y_s)$ es otra derivada de grado $r + s$ respecto de $(X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_s)$: $\mathbf{D}'_s \circ \mathbf{D}_r = \mathbf{D}''_{r+s}$.

Demostración.– En virtud del Lema 3.4, se tiene:

$$(\mathbf{D}'_s \circ \mathbf{D}_r)^{(r+s)}\,(a_1, \ldots, a_{r+s}, Z) = (\mathbf{D}'_s \circ \mathbf{D}^{(r+s)}_r)\,(a_1, \ldots, a_{r+s}, Z) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{r+s-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq r+s} \mathbf{D}'^{(r+s-k)}_s \cdot$$
$$\cdot\,(a_1, \ldots, \hat{a}_{i_1}, \ldots, \hat{a}_{i_k}, \ldots, a_{r+s}, \mathbf{D}^{(k)}_r\,(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, Z)). \qquad (7)$$

Como $\mathbf{D}^{(k)}_r = 0$ si $k > r$, $\mathbf{D}'^{(k)}_s = 0$ si $k > s$ y las extensiones graduadas de una aplicación aditiva son multiaditivas, se deduce que en la expresión (7) sólo queda el sumando correspondiente a $k = r$; es decir:

$$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq r+s} \mathbf{D}'^{(s)}_s (a_1, \ldots, \hat{a}_{i_1}, \ldots, \hat{a}_{i_r}, \ldots, a_{r+s}, \mathbf{D}^{(r)}_r (a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}, Z)).$$

Y sustituyendo $\mathbf{D}_r^{(r)}(a_{i_1}, ..., a_{i_r}, Z)$ por

$$\sum_{\sigma \in S_r'} X_1 (a_{\sigma(i_1)}) \dots X_r (a_{\sigma(i_r)}) Z,$$

donde S_r' representa el grupo de las permutaciones de $\{i_1, ..., i_r\}$, resulta:

$$(\mathbf{D}_s' \circ \mathbf{D}_r)^{(r+s)} (a_1, ..., a_{r+s}, Z) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_{r+s}} X_1 (a_{\sigma(1)}) \dots X_r (a_{\sigma(r)}) Y_1 (a_{\sigma(r+1)}) \dots Y_s (a_{\sigma(r+s)}) Z.$$

Por último, de forma idéntica a como se hizo en el Prop. 3.1 se demuestran:

$$(\mathbf{D}_s' \circ \mathbf{D}_r)^{(r+s+1)} = 0 \quad \text{y} \quad (\mathbf{D}_s' \circ \mathbf{D}_r)^{(r+s)} \neq 0. \qquad \square$$

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BOMPIANI: *Connessioni del 2º ordine.* Rend. Acc. Naz Lincei, (8) 1 (1946), 483-485.

[2] C. DI COMITE: *Sulle connessioni del secondo ordine.* Ann. Mat. Pura Appl. (4), 76 (1967), 51-73.

[3] C. DI COMITE: *Connessioni di ordine n.* Rend. Mat. e Appl. (5), 26 (1967), 163-186.

[4] J. J. ETAYO: *On a complete lifting of derivations.* Tensor, 38 (1982), 169-178.

[5] J. PERALTA: *Derivaciones, pseudoderivaciones y casiderivaciones de grado superior y su comportamiento algebraico.* Tesis. Edit. Univ. Compl. Madrid, 75 (1985).

[6] J. PERALTA: *On the graduated derivatives.* Coll. Math, 35 (1984), 189-205.