Sobre espacios localmente convexos de Rosenthal

Por J. Motos y J. L. Hueso

Recibido: 12 Mayo 1985.

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia Ureña.

Abstract

We say that a locally convex space E is a Rosenthal space if every bounded set of E is weakly conditionally compact. In this paper we study some properties of Rosenthal spaces, particularly in connection with function spaces.

Sea X un espacio topológico completamente regular y E un espacio localmente convexo; $C_s(X, E)$ es el espacio de las funciones continuas de X en E, con la topología de la convergencia puntual. Si E es el cuerpo escalar, esta notación se abrevia a $C_s(X)$. $C_c(X, E)$ y $C_c(X)$ denotan estos mismos espacios con la topología compacta abierta. Si X es compacto se omite el subíndice c y la topología es la de la convergencia uniforme.

En un trabajo de A. Pelczynski y Z. Semadeni [4] se prueba el resultado siguiente (A): Si K es un compacto son equivalentes las siguientes condiciones: (1) K es diperso, (2) $C(K)$ no contiene subespacios topológicamente isomorfos a 1^1 y (3) en $C(K)$ todo acotado es débilmente condicionalmente compacto. Se dice que un subconjunto B de un espacio localmente convexo E es débilmente condicionalmente compacto si de toda sucesión de B puede extraerse una subsucesión de Cauchy para la topología débil de E. Posteriormente H. P. Rosenthal [5] demuestra que la equivalencia de (2) y (3) es cierta para espacios de Banach en general. Esto nos sugiere la definición siguiente: Decimos que un espacio localmente convexo E es de *Rosenthal* si todo acotado de E es débilmente condicionalmente compacto. Obviamente esta propiedad sólo depende del par dual.

Nuestro primer resultado agrupa algunas propiedades de los espacios de Rosenthal. Si E es un espacio localmente convexo $c_0(E)$ denota el espacio de las sucesiones nulas de E con la topología generada por las seminormas p_∞, al variar p en la familia de las seminormas contínuas sobre E, donde $p_\infty(x) = \sup_n p(x_n)$, siendo $x = (x_n) \in c_0(E)$. Si $(E_i, \| \|_i)$ es una sucesión de espacios de Banach, $(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus E_i)_{c_0}$ es el espacio de Banach de las sucesiones (x_i) de elementos $x_i \in E_i$ tales que $\|x_i\|_i \to 0$, con la norma $\|(x_i)\| = \sup_i \|x_i\|_i$.

Teorema 1

(1) sea $E = \prod_i E_i$ *el producto de una cantidad numerable de espacios localmente convexos* E_i. E *es de Rosenthal si y sólo si cada* E_i *es un espacio de Rosenthal.*

(2) Sea E *un espacio localmente convexo.* $c_0(E)$ *es un espacio de Rosenthal si y sólo sí* E *lo es.*

(3) Sea (E_i) *una sucesión de espacios de Banach. El espacio* $E = (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus E_i)_{c_0}$ *es de Rosenthal si y sólo si cada* E_i *es de Rosenthal.*

(4) Sea (X_i) *una sucesión de espacios uniformes isomorfos cada uno de ellos a un subconjunto débilmente condicionalmente compacto* M_i *de un espacio de Banach* E_i, *con la uniformidad de la topología débil de* E_i. *Entonces el espacio uniforme producto* $X = \prod_i X_i$ *es isomorfo a un subconjunto débilmente condicionalmente compacto de un espacio de Banach, con la uniformidad de la topología débil.*

(5) Un espacio localmente convexo límite inductivo regular de espacios de Rosenthal es de Rosenthal.

(6) Sea E *un espacio localmente convexo metrizable y* F *un subespacio de* E *tal que todo acotado de* E *está contenido en la clausura de un acotado de* F. *Entonces, si* F *es de Rosenthal,* E *es de Rosenthal. En particular el completado de un espacio normado de Rosenthal es de Rosenthal y el completado de un espacio metrizable separable de Rosenthal es de Rosenthal.*

Demostración:

(1) Si E es un espacio de Rosenthal, cada factor E_i también es de Rosenthal por ser subespacio del producto. Supongamos ahora que cada E_i es de Rosenthal. Sea (x_n) una sucesión acotada en E. Para cada i, la sucesión $(x_n^i,\, n \in \mathbb{N})$ está acotada en E_i, siendo x_n^i la componente i-ésima de x_n. Por ser cada factor E_i de Rosenthal, utilizando un argumento diagonal se obtiene una subsucesión de (x_n) cuyas componentes son débilmente Cauchy en los factores. Entonces la subsucesión es débilmente Cauchy en el producto E que por tanto es de Rosenthal.

(2) Se puede considerar E como subespacio de $c_0(E)$, luego si $c_0(E)$ es de Rosenthal, E también lo es. Recíprocamente, sí E es de Rosenthal y (x_n) es una sucesión acotada en $c_0(E)$, razonando como en (1) obtenemos una subsucesión que denotaremos también por (x_n) cuyas componentes son débilmente Cauchy en E. Veamos que (x_n) es débilmente Cauchy en $c_0(E)$. Si $u \in c_0(E)'$, existe una seminorma contínua p sobre E y una sucesión $(u^i) \subset E'$ tales que para todo $x = (x^i) \in E$,

$$\langle x, u\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x^i, u^i\rangle \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \|u^i\|_p < \infty$$

siendo
$$\|u^i\|_p = \sup \{ |\langle x^i, u^i\rangle|, \ p(x^i) \leqslant 1\} .$$

Por ser (x_n) acotada, $p_\infty(x_n) < K$ para todo n. Dado $\epsilon > 0$ existe un i_0 tal que $\sum_{i_0+1}^{\infty} \|u^i\|_p < \epsilon/4K$. Para $1 \leqslant i \leqslant i_0$, la sucesión $(x_n^i, n \in \mathbb{N})$ es débilmente Cauchy en E_i luego existe un n_i tal que

$$|\langle x_n^i - x_m^i, \ u_i\rangle| < \epsilon/2\, i_0 \quad \text{si } n, m \geqslant n_i .$$

Sea $n_0 = \text{máx}\{ n_i, \ i = 1,2,\ldots, i_0\}$ y $n, m \geqslant n_0$, entonces

$$|\langle x_n - x_m, u\rangle| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x_n^i - x_m^i, u^i\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\epsilon}{2i_0} + \sum_{i_0+1}^{\infty} \|u^i\|_p \cdot p(x_n^i - x_m^i) \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4K} \cdot 2K = \epsilon,$$

luego (x_n) es débilmente Cauchy y $c_0(E)$ es de Rosenthal.

(3) El dual de E es $\{u = (u^i)\colon u^i \in E_i', \ \sum_{i=1}^{\infty} \|u^i\|_i < \infty\}$ donde $\|\ \|_i$ es la norma en el dual de E_i y si $x = (x_i)$ es un elemento de E, $\langle x, u\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x^i, u^i\rangle$. Utilizando esta representación podemos hacer una prueba similar a la de (2).

(4) Podemos suponer que M_i está contenido en la bola de centro cero y radio $1/i$ del espacio de Banach E_i, por la acotación de M_i. Así $M = \Pi M_i$ esta contenido en E y es incluso débilmente condicionalmente compacto por un razonamiento análogo al de (2). Veamos que en M coinciden la uniformidad producto de las uniformidades de los M_i y la inducida por la uniformidad de la topología débil de E. Esta uniformidad tiene una subbase formada por las bandas

$$U = \{(x, y) \in M \times M : |\langle x - y, u\rangle| \leqslant 1\} , u \in E'.$$

Fijada una de estas bandas, si $u = (u^i)$ determinamos un i_0 tal que $\sum_{i_0+1}^{\infty} \|u^i\|_i < \frac{1}{2}$. El conjunto $V_i = \{(x^i, y^i) \in M_i \times M_i\colon |\langle x^i - y^i, u^i\rangle| \leqslant \frac{1}{2i_0}\}$ es una banda en M_i de la uniformidad inducida por la de la topología débil de E_i y $V = \{(x, y) \in M \times M\colon (x^i, y^i) \in V_i, \ i = 1,2,\ldots, i_0\}$ es una banda de la uniformidad producto de las citadas que está contenída en U. Recíprocamente si consideramos la banda de la uniformidad producto

$$V = \{ (x, y) \in M \times M\colon (x^j, y^j) \in V_j, j \in I\} ,$$

siendo I un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ y para cada $j \in I$, V_j una banda de M_j que puede suponerse de la forma

$$V_j = \{(x^j, y^j) \in M_j \times M_j: |\langle x^j - y^j, u^j \rangle| \leqslant 1\}$$

con $u^j \in E_j$.

Las sucesiones $u_j = (0,..., 0, u^j, 0,...), j \in I$ son elementos de E' y

$$U = \{(x, y) \in M \times M: |\langle x - y, u_j \rangle| \leqslant 1, j \in I\}$$

es una banda de la uniformidad inducida por la topología débil, que está contenida en V. Por tanto el espacio uniforme $X = \Pi M_i$ es isomorfo a M con la uniformidad inducida por la topología débil de E.

(5) Basta observar que todo acotado del límite inductivo regular está contenido y es acotado en un escalón.

(6) Sea d una métrica invariante por traslación compatible con la topología de E. Sea (x_n) una sucesión acotada en E. Por hipótesis (x_n) está contenida en la clausura de un acotado N de F. Para cada n sea $y_n \in N$ tal que $d(x_n, y_n) < 1/n$. Por ser F de Rosenthal existe una subsucesión (y_{n_k}) de Cauchy para la topología $\sigma(F, E')$. Se comprueba ahora fácilmente que la subsucesión (x_{n_k}) es $\sigma(E, E')$ Cauchy.

Para probar las restantes afirmaciones basta observar que para el completado de un espacio normado de Rosenthal se cumplen obviamente las hipótesis de la parte anterior, y en el caso de un espacio metrizable separable de Rosenthal también, por un teorema de Grothendieck (ver [2], pg. 403).

Nota 1.

Ningún producto de d, con $d \geqslant 2^{\aleph_0}$, espacios de Rosenthal no triviales E_i es de Rosenthal pues contiene un subespacio isomorfo topológicamente a ω_d que no es de Rosenthal. Sin embargo para cualquier cardinal d, el subespacio $\Psi_d(E_i)$ del producto de los E_i formado por los elementos con una cantidad a lo sumo numerable de coordenadas no nulas es de Rosenthal, por lo que si $d \geqslant 2^{\aleph_0}$, $\Psi_d(E_i)$ es un espacio de Rosenthal cuyo completado ΠE_i no lo es.

Si E es un espacio de Fréchet–Rosenthal de dimensión infinita distinto de ω, entonces E con la topología débil es también un espacio de Rosenthal y su completado no es de Rosenthal.

En el resto del trabajo estudiamos la propiedad Rosenthal en espacios de funciones. El resultado siguiente se refiere al caso escalar.

Teorema 2

(1) Sea X *un espacio completamente regular e* Y *un subconjunto compacto de* X. Si $C_c(X)$ *es un espacio de Rosenthal,* C(Y) *es de Rosenthal.*

(2) Sea β una familia de acotados de la realcompactación υX de X, dirigida superiormente y que cubre X. Si $C_s(X)$ es de Rosenthal, C(X) con la topología de la convergencia uniforme sobre los miembros de la familia β es de Rosenthal.

Demostración:

(1) Sea (g_n) una sucesión acotada en $C(Y)$. Para cada n consideramos una extensión contínua f_n de g_n a X de la misma norma que g_n. La sucesión (f_n) es acotada en $C_c(X)$ y por hipótesis tiene una subsucesión $(f_{n_k}, k \in \mathbb{N})$ débilmente Cauchy en $C_c(X)$. Veamos que la subsucesión correspondiente $(g_{n_k}, k \in \mathbb{N})$ es débilmente Cauchy en $C(Y)$. Si $\mu \in C(Y)'$, la función $\tilde{\mu} : C_c(X) \to \mathbb{K} : f \to \mu(f|_Y)$ es una forma lineal contínua en $C_c(X)$ luego $(\tilde{\mu}(f_{n_k}), k \in \mathbb{N})$ es convergente y $(g_{n_k}, k \in \mathbb{N})$ débilmente Cauchy.

(2) Sea $C_\beta(X)$ el espacio $C(X)$ con la topología de la convergencia uniforme sobre los miembros de β. Sea (f_n) una sucesión acotada en $C_\beta(X)$. Como β cubre X, (f_n) es acotada en $C_s(X)$, luego por hipótesis existe una subsucesión $(f_{n_k}, k \in \mathbb{N})$ débilmente Cauchy en $C_s(x)$ que en particular será puntualmente convergente. La sucesión de las extensiones a la realcompactación $(f^{\upsilon}_{n_k}, k \in \mathbb{N})$ también converge puntualmente pues dado $\tau \in \upsilon X$ y la sucesión (f_{n_k}) existe un $x \in X$ tal que $f_{n_k}{}^{\upsilon}(\tau) = f_{n_k}(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ ([6] pg. 38).Veamos ahora que $(f_{n_k}, k \in \mathbb{N})$ es débilmente Cauchy en $C_\beta(X)$. Dada $\mu \in C_\beta(X)'$ existe un acotado $B \in \beta$ y una constante $C > 0$ tales que para toda función g de $C(X)$, $|\mu(g)| \leqslant C.$ máx $\{|g^{\upsilon}(\tau)|, \tau \in \bar{B}\}$. Sea $\tilde{\mu}$: $C(\bar{B}) \to \mathbb{K}$: $h \to \mu(h^{\upsilon}|_X)$ siendo h^{υ} una extensión contínua de $h \in C(\bar{B})$ a υX. $\tilde{\mu}$ está bien definida pues $\mu(g)$ sólo depende de los valores de g en B, es lineal y contínua por la desigualdad precedente. La sucesión $(f_{n_k}{}^{\upsilon}|_{\bar{B}}, k \in \mathbb{N})$ es uniformemente acotada y puntualmente convergente en$C(\bar{B})$. Sea m la medida de Radon sobre $\bar{B}$ que representa a $\tilde{\mu}$. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\int_{\bar{B}} f_{n_k}{}^{\upsilon}|_{\bar{B}} \, dm = \tilde{\mu}(f_{n_k}{}^{\upsilon}|_{\bar{B}}) = \mu(f_{n_k})$$

es convergente. Por tanto $(f_{n_k}, k \in \mathbb{N})$ es débilmente Cauchy en $C_\beta(X)$ y este espacio es Rosenthal.

Por la parte (1) del Teorema precedente y el resultado (A), si $C_c(X)$ es de Rosenthal, X no contiene compactos no dispersos. En particular no contiene compactos metrizables no numerables.

Consideramos continuación la propiedad de Rosenthal en espacios de funciones vectoriales con la topología de la convergencia puntual o la compacta abierta.

Nota 2.

(1) Sea $X = [0, \omega_1]$ el conjunto de los ordinales menores o iguales que el primer ordinal no numerable ω_1 y E un espacio localmente convexo límite inductivo compactamente regular de una sucesión de espacios metrizables de Rosenthal E_i (ver [7], pg. 20). Demostraremos que el espacio $B_s^1(X, E)$ de las funciones de Baire de primera clase de X en E con la topología de la convergencia puntual (y en consencuancia $C_s(X, E)$) es un espacio de Rosenthal. Notemos en primer lugar que las funciones de $B_s^1(X, E)$ son constantes a partir de un cierto ordinal menor que ω_1. En efecto, sea ψ el límite puntual de la sucesión de funciones contínuas (ϕ_n). Para cada n, $\phi_n(X)$ es compacto en E luego está contenido en un cierto E_{i_n} y $\phi_n : X \to E_{i_n}$ es continua. Por ser (E_{i_n}, d_n) metrizable, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe un ordinal numerable α_m tal que si $\alpha > \alpha_m$ entonces $d_n(\phi_n(\alpha), \phi_n(\omega_1)) < 1/m$. El supremo β_n de $\{\alpha_m, m \in \mathbb{N}\}$ es un ordinal numerable a partir del cual ϕ_n es constante. El supremo del conjunto $\{\beta_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un ordinal numerable a partir del cual ψ es constante. Sea ahora (ψ_n) una sucesión acotada en $B_s^1(X, E)$. Veamos que admite una subsucesión débilmente Cauchy. Razonando como antes existe un ordinal numerable β a partir del cual todas las funciones ψ_n son constantes. Como $[0, \beta]$ es numerable por un procedimiento diagonal obtenemos una subsucesión $(\psi_{n_k}, k \in \mathbb{N})$ tal que para todo $\alpha \leqslant \beta$, $(\psi_{n_k}(\alpha), k \in \mathbb{N})$ es débilmente Cauchy en E. Si $\alpha > \beta$, $\psi_n(\alpha) = \psi_n(\beta)$ para todo n, y se tiene el mismo resultado. Por tanto $(\psi_{n_k}, k \in \mathbb{N})$ es débilmente Cauchy en $B_s^1(X, E)$ y este espacio es de Rosenthal.

(2) Si $C_s(X)$ es de Rosenthal, X no es necesariamente realcompacto (véase por ejemplo $C_s([0, \omega_1[))$, pero si X es un espacio completamente regular y E un espacio localmente convexo y si $C_s(X, E)$ es de Rosenthal, entonces $C_s(\upsilon X, E)$ también es de Rosenthal. Efectivamente si (ϕ_n) es una sucesión acotada en $C_s(\upsilon X, E)$ la sucesión de las restricciones $(\phi_{n|X})$ es acotada en $C_s(X, E)$ luego tiene una subsucesión $(\phi_{n_k|X})$ débilmente Cauchy en $C_s(X, E)$. La subsucesión (ϕ_{n_k}) es débilmente Cauchy en $C_s(\upsilon X, E)$ porque dados $\tau \in \upsilon X$ y $e' \in E'$ la sucesión $(\langle \phi_{n_k}(\tau), e' \rangle)$ es convergente ya que existe un $x \in X$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\langle \phi_{n_k}(\tau), e' \rangle = \langle \phi_{n_k}(x), e' \rangle$$

(ver [6], pg. 38).

Recíprocamente, si E es realcompacto y $C_s(\upsilon X, E)$ de Rosenthal, entonces $C_s(X, E)$ es de Rosenthal: Sea ahora (ϕ_n) una sucesión acotada en $C_s(X, E)$. La sucesión de las extensiones a υX, $(\phi_n{}^\upsilon)$ es acotada en $C_s(\upsilon X, E)$ pues dado $\tau \in \upsilon X$ y una seminorma contínua p sobre E, como antes existe $x \in X$ tal que

$$p(\phi_n{}^\upsilon(\tau)) = (p_\circ\, \phi_n)^\upsilon(\tau) = (p_\circ\, \phi_n)(x)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, luego

$$\sup_n \, p(\phi_n{}^\upsilon(\tau)) < \infty.$$

Por hipótesis existe una subsucesión $(\phi_{n_k}{}^{v})$ que es débilmente Cauchy en $C_s(vX, E)$, de donde se deduce inmediatamente que (ϕ_{n_k}) es débilmente Cauchy en $C_s(X, E)$.

(3) Si X es un compacto disperso y E es un espacio de Rosenthal, $C(X, E)$ es de Rosenthal si E tiene además alguna de las siguientes propiedades: (*a*) E es topológicamente isomorfo al producto de una cantidad numerable o a la suma directa de una cantidad cualquiera de espacios $C(X_i)$, con X_i compacto disperso, (*b*) E es una C^*–álgebra de Banach conmutativa con elemento unidad. En el primer caso, $C(X, E)$ es topológicamente isomorfo a un producto numerable o a una suma directa de espacios $C(X; C(X_i)) = C(X \times X_i)$ que son de Rosenthal teniendo en cuenta que el producto de dos compactos dispersos es un compacto disperso y el resultado (A). Del teorema 1, apartados (1) y (5) se obtiene la conclusión. En el caso (*b*) se aplica el teorema Gelfand–Naimark para expresar E como $C(K)$ donde K es el espacio de los caracteres de E.

(4) Sea X un compacto metrizable con ω–acumulación vacía y E un espacio de Rosenthal completo, $C(X)$ es isomorfo topológicamente a c_0 (ver [1]), que a su vez es isomorfo a $C(\hat{\mathbb{N}})$ donde $\hat{\mathbb{N}}$ es la compactación de Alexandrov de los naturales. Se tiene entoces la siguiente cadena de isomorfismos topológicos (ver [2], pg. 278 y [7], pg 92):

$$C(X, E) \cong C(X) \hat{\otimes}_{\epsilon} E \cong C(\hat{\mathbb{N}}) \hat{\otimes}_{\epsilon} E \cong C(\hat{\mathbb{N}}, E) \cong c_0(E) \times E.$$

Aplicando el resultado (2) del teorema anterior, obtenemos que $C(X, E)$ es de Rosenthal.

En [3] damos otros resultados sobre espacios de Rosenthal de funciones contínuas vectoriales con diversas topologías.

BIBLIOGRAFIA

[1] BESSAGA, C., PELCZYNSKI, A. Spaces of continuous functions (IV). *Studia Math.* XIX (1960) 53-62.

[2] KOTHE, G: Topological vector spaces I. Springer Verlag New York, Berlín, Heidelberg (1969).

[3] MOTOS, J., HUESO, J. L. On spaces of vector valued continuous functions. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, 4-5, (1985)271-275.

[4] PELCZYNSKI, A., SEMADENI, Z.: Spaces of continuous functions (III). *Studia Math.* XVIII (1959) 211-222.

[5] ROSENTHAL, H. P.: A characterization of Banach spaces containing l^1. *Proc. Nat. Acad. Sci.* USA. 71 (1974) 2411-2413.

[6] SCHMETS, J.: Spaces de fonctions continues. Lecture Notes in Math. 519. Springer (1976).

[7] SCHMETS, J.: Spaces of vector valued continuous functions. Lecture Notes in Math. 1003. Springer (1983).

Departamento de Matemática Aplicada E.T.S.I. Industriales
Universidad Politécnica de Valencia
Camino de la Vera, s/n.– 46022 Valencia