Algunos resultados sobre representabilidad finita de 1^q $(0 < q \leqslant \infty)$ en espacios p-Banach

Por Zenaida Uriz

Recibido: 9 mayo 1985

Presentado por el académico numerario D. Baltasar Rodríguez-Salinas

Abstract

In this paper, we give the two following results relative to local theory in p-Banach spaces $(0<p\leq 1)$.

1) If a p-Banach space contains a basic squence, then, it also contains subspaces isomorphic to $\mathbb{R}^n$ endowed with one of the usual topologies. More exactly, we show that "If $(x_n)_n$ is a sequence in a p-Banach space such that there is a basic sequence in span $(x_n)_n$, then either c_0 es $2^{1/p-1}$-block finitely representable in a permutation of $(x_n)_n$ or there is a real q, $p \leq q$ such that l^q is block finitely representable in $(x_n)_n$.
2) Whenever the embedding $l^r \to l^s$ $(1 \leq r \leq s \leq \infty)$ is λ-finitely factorizable through a Banach space, we can obtain the best possible constant of factoritation, i.e., it is finitely factorizable too.

Resumen

Obtenemos los siguientes resultados relativos a la geometría de espacios p-Banach $(0<p\leq 1)$.

1) En un espacio p-Banach conteniendo una sucesión básica, existen subespacios de dimensión finita cualesquiera, cuya norma se aproxima a alguna de las habituales de $\mathbb{R}^n$. Más concretamente, demostramos que "si $(x_n)_n$ es una sucesión en un espacio p-Banach tal que span $(x_n)_n$ contiene una sucesión básica, entonces ó c_0 es $2^{1/p-1}$-finitamente representable en bloques de una permutación de $(x_n)_n$ ó existe $q \in [p, +\infty)$ tal que l^q es finitamente representable en bloques de $(x_n)_n$".
2) Si la inclusión i: $l^r \to l^s$ $(1 \leq r \leq s \leq \infty)$ es λ-finitamente factorizable a través de un espacio de Banach X, puede obtenerse la mejor constante de factorización, es decir, i es finitamente factorizable a través de X.

Un espacio p-Banach $(0 < p \leqslant 1)$ es un espacio vectorial (que supondremos real) completo respecto de la topología localmente acotada inducida por una aplicación, norma p-convexa, $x \to \|x\|$ de X en $\mathbb{R}^+$ que cumple

i) $\|x\| = 0 \iff x = 0, \qquad x \in X.$

ii) $\|ax\| = |a|\, \|x\|, \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad x \in X.$

iii) $\|x+y\|^p \leqslant \|x\|^p + \|y\|^p, \qquad x, y \in X.$

Definiciones 1.– Se dice que la inclusión $i\colon l^r \to l^s$, $0 < r \leqslant s \leqslant \infty$ (entenderemos c_0 en lugar de l^∞) es λ-*finitamente factorizable a través de un espacio p-Banach* X, (λ-f.f.t.X), si para todo $\varepsilon > 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ (dependientes de ε y n) tales que cualesquiera que sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\|(a_i)_{i=1}^n\|_{l^s} \leqslant \|\sum_{i=1}^n a_i x_i\| \leqslant \lambda\,(1+\varepsilon)\ \|(a_i)_{i=1}^n\|_{l^r}$$

Si $\lambda = 1$ se dice que i es finitamente factorizable. Cuando $r = s$ diremos que l^r es λ-finitamente representable en X, (λ-f.r.X).

Sea $(x_n)_n$ una sucesión en un espacio p-Banach. Se llama *bloque* de la sucesión a un vector no nulo de span $(x_n)_n$. Dos bloques

$$\sum_{i=1}^k a_i x_{m_i}, \qquad \bigcup_{j=1}^1 b_j x_{n_j}$$

se dicen *disjuntos* si $m_i \neq n_j$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant 1$.

Sucesión bloque de $(x_n)_n$ es una sucesión $(u_k)_k$ de bloques de la forma

$$u_k = \sum_{i=m_k}^{m_{k+1}} a_i x_j,$$

donde $(m_k)_k$ es una sucesión estrictamente creciente de naturales.

Sean X, Y p-Banach, $(x_n)_n \subseteq X$ e $(y_n)_n \subseteq Y$. Se dice que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es λ-*finitamente representable en bloques de* $(x_n)_n$ (f.r.b. $(x_n)_n$) si para cada $\varepsilon > 0$ y cada $n \in \mathbb{N}$ existen n vectores $u_1, \ldots, u_n$ (dependientes de ε y n), componentes de una sucesión bloque de $(x_n)_n$, tales que

$$\|\sum_{i=1}^n a_i y_i\| \leqslant \|\sum_{i=1}^n a_i u_i\| \leqslant \lambda\,(1+\varepsilon)\ \|\sum_{i=1}^n a_i y_i\|.$$

Es inmediato comprobar que si $(y_n)_n$ es λ-f.r.b. $(x_n)_n$ y $(z_n)_n$ es μ-f.r.b. $(y_n)_n$, entonces $(z_n)_n$ es $\lambda\mu$-f.r.b. $(x_n)_n$.

Un resultado como el del teorema 2 fue establecido por Krivine en [5] para sucesiones con clausura lineal infinito dimensional en retículos de Banach. En [12] aparece una versión, en el contexto de espacios normados completos, utilizando el lenguaje de bloques. Esta versión ha sido mejorada en [6]. Dado que la existencia de subespacios minimales es un problema abierto en espacios no normados, hemos impuesto la hipótesis adicional de que $\overline{\text{span}}\,(x_n)_n$ contenga una sucesión básica.

Teorema 2.– Sea $(x_n)_n$ una sucesión en un espacio p-Banach X tal que $\overline{\text{span}}\,(x_n)_n$ contiene una sucesión básica. Entonces:

– ó c_0 es $2^{1/p-1}$ f.r.b. de una reordenación de $(x_n)_n$
– ó existe $q \in [p, +\infty)$ tal que l^q es f.r.b. $(x_n)_n$.

Para demostrar este teorema utilizaremos, entre otros conceptos y resultados auxiliares, la noción de ultrapotencia en un espacio p-Banach.

Sea I un conjunto infinito de índices y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no elemental en I. Definimos

$$l^\infty (I; X) = \{(x_i)_{i \in I} \subseteq X; \text{acotada}\} \qquad \text{y}$$

$$\mathscr{C}_0 \,(I, X) = \{(x_i)_{i \in I} \in l^\infty (I; X);\ \lim_{i,\mathcal{U}} \|x_i\| = 0\}$$

Se define la ultrapotencia $X^I_\mathcal{U}$ como el espacio cociente

$$l^\infty (I; X) \,/\, \mathscr{C}_0 \,(I; X).$$

Respecto de la norma p-convexa

$$\|(\hat{x}_i)_{i \in I}\| = \lim_{i,\mathcal{U}} \|x_i\|,$$

$X^I_\mathcal{U}$ es un espacio p-Banach que contiene isométricamente a X. Análogamente a como ocurre en espacios de Banach, la inclusión $i: l^r \to l^s$ $(0 < r \leqslant s \leqslant \infty)$ es λ-f.f.t.X si y sólo si se λ-factoriza a través de un subespacio de alguna ultrapotencia de X (ver [8]).

El principal resultado en que nos basaremos es un teorema de Krivine que puede adaptarse a espacios p-Banach. Este teorema es válido en retículos de Banach y por tanto en espacios de Banach con una base incondicional. La posible inexistencia, dentro de nuestro contexto, de tales bases se suple con la construcción de sucesiones invariantes por propagación y por cambios de signo y en consecuencia incondicionales (ver [4]).

Definiciones 3.– Una sucesión, $(x_n)_n$, en un espacio p-Banach X se dice *invariante por propagación* si para todo $k \in \mathbb{N}$, para toda k tupla de naturales $n_1 < \ldots < n_k$ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_i\| = \|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i}\|$$

Una sucesión, $(e_n)_n$, en un espacio p-Banach X es *invariante por cambios de signo* si

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i e_i\| = \|\sum_{1}^{n} a_i e_i\|$$

cualesquiera que sean $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon_i = \pm 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

En el teorema 4 establecemos la versión de los teoremas II.1, II.2 y III.1 de [5] que vamos a utilizar. Un enunciado similar puede verse en [1]. Omitimos la demostración ya que es análoga a la de Krivine con los cambios necesarios para sustituir retículos de Banach por nuestra situación.

Teorema 4.– Sea X p-Banach y $(e_n)_n \subseteq X$ no nula, invariante por propagación y cambios de signo. Entonces

– ó c_0 es

$$\frac{2^{2/p-2}}{(2^p - 1)^{1/p}}\text{-f.r.b.}$$

de una reordenación de $(e_n)_n$ (1)

– ó existe $t > 0$, $C > 0$ tales que

$$(\sum_{1}^{n} \|x_i\|^t)^{1/t} \leqslant C \quad \|\sum_{1}^{n} x_i\| ,$$

cualesquiera que sean $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, ..., x_n$ bloques disjuntos dos a dos de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Además si q viene dado por

$$2^{-1/q} = \inf \{\lambda > 0;\ \lim_n \lambda^n \ \|\sum_{i=1}^{2^n} e_i\| = +\infty\},$$

entonces l^q es f.r.b. $(e_n)_n$ (2)

(La expresión "c_0 es

$$\frac{2^{2/p-2}}{(2^p - 1)^{1/p}}\text{ f.r.b.}$$

de una reordenación de $(e_n)_n$" se entiende en sentido amplio, es decir: fijado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen una permutación σ de $\mathbb{N}$ y n elementos $y_1, ..., y_n$ de una sucesión bloque de $(e_{\sigma(n)})_n$ tales que

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i| \leqslant \|\sum_{1}^{n} a_i y_i\| \leqslant \frac{2^{2/p-2}}{(2^p - 1)^{1/p}} (1 + \varepsilon) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$$

siempre que $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ (ver [12])).

La construcción de una sucesión acotada, sin subsucesiones convergentes y bloque de $(x_n)_n$ se efectúa en los lemas siguientes.

Lema 5.— Sea $(x_n)_n \subseteq X$, p-Banach, tal que $\overline{\text{span}}\,(x_n)_n$ contiene una sucesión básica, $(y_n)_n$. Entonces existe una sucesión normalizada, $(u_n)_n$, bloque de $(x_n)_n$ que es básica.

Demostración.— Sea M la constante de la sucesión, que suponemos normalizada, $(y_n)_n$. Tomemos

$$A < \frac{1}{2M^p} \qquad \text{y} \qquad (z_n)_n \subseteq \text{span}\,(x_n)_n$$

tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n - z_n\|^p \leqslant A.$$

Razonando como en [7] (prop. 1.a.9) se obtiene

$$(1 + 2M^p A)^{-1/p} \ \|\sum_{i=n}^{m} a_i z_i\| \leqslant \|\sum_{i=n}^{m} a_i y_i\| \leqslant$$

$$\leqslant (1 - 2M^p A)^{-1/p} \ \|\sum_{i=n}^{m} a_i z_i\|$$

siempre que $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $n < m$.

La proposición 1 de [11] prueba que $(z_n)_n$ es básica. Para construir $(u_n)_n$ podemos suponer sin pérdida de generalidad, ya que span $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es infinito dimensional, que $(x_n)_n$ es de vectores linealmente independientes. Denotaremos Π_n, $n \in \mathbb{N}$, la proyección de span $(x_n)_n$ sobre $[x_1, ..., x_n]$. Tomemos $u_1 = z_1 / \|z_1\|$ y sean $x_1, ..., x_{n_1}$ tales que $u_1 \in$ $\in [x_1, ..., x_{n_1}]$. Poniendo $n_0 = 0$ y obtenido

$$u_k \in [z_{n_0 + \ldots + n_{k-2} + k}, \ \ldots, \ z_{n_0 + \ldots + n_{k-1} + k}]$$

verificando $\Pi_{n_{k-1}}(u_k) = 0$ y $\|u_k\| = 1$, para algún $n_k \geqslant n_{k-1} + 1$ se tendrá $u_k \in [x_{n_{k-1}+1}, ..., x_{n_k}]$. Por tanto, existe

$$u'_{k+1} \in [z_{n_0 + \ldots + n_{k-1} + k + 1}, \ \ldots, \ z_{n_0 + \ldots + n_k + k + 1}]$$

no nulo tal que

$$\Pi_{n_k}(u'_{k+1}) = 0.$$

Tomemos

$$u_{k+1} = \frac{u'_{k+1}}{\|u'_{k+1}\|}.$$

Es inmediato comprobar que la sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es normalizada, bloque de $(x_n)_n$, bloque de $(z_n)_n$ y, como consecuencia de esto último, básica.

La siguiente proposición, de carácter elemental, es un resultado auxiliar para la demostración del Lema 7.

Proposición 6.— Sea X espacio métrico y $(x_n)_n$ una sucesión en X que no posee subsucesiones de Cauchy. Entonces, existen $\delta > 0$ e $(y_n)_n$ subsucesión de $(x_n)_n$, tales que

$$d(y_n, y_m) > \delta \qquad \text{siempre que} \quad n \neq m, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Demostración.— Tomemos

$$y_1 = x_1 \qquad \text{y} \qquad \delta_1 = \liminf_n d(x_1, x_n).$$

(necesariamente $\delta_1 > 0$). Sea $(x_n^{(1)})_n$ subsucesión de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\delta_1 \leqslant d(y_1, x_n^{(1)}) < 2\delta_1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Pongamos

$$y_2 = x_1^{(1)}, \qquad \delta_2 = \liminf_n d(y_2, x_n^{(1)}) > 0 \qquad \text{y} \qquad (x_n^{(2)})_n \subseteq (x_n^{(1)})_n$$

tal que

$$\delta_2 \leqslant d(y_2, x_n^{(2)}) < 2\delta_2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Por recurrencia se obtienen

$$(\delta_n)_n \subseteq \mathbb{R}^+ \qquad \text{e} \qquad (y_n)_n \subseteq (x_n)_n$$

tales que

$$\delta_n \leqslant d(y_n, y_m) < 2\delta_n$$

siempre que $n < m$. Además

$$\inf_n \delta_n > 0$$

ya que $(y_n)_n$ no es de Cauchy. Basta tomar

$$\delta = \inf_n \delta_n$$

para concluir.

Lema 7.– Sea X un espacio p-normado de dimensión finita y $(x_n)_n$ una sucesión básica en X. Entonces, existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión acotada, $(u_n)_n$, bloque de $(x_n)_n$ tales que

$$\|u_n - u_m\| \geqslant \varepsilon \qquad \text{si } n \neq m.$$

Demostración.– Sea $Y = \text{span}\,(x_n)_n$. En $\{x \in Y;\ \|x\| \leqslant 1\}$ existe alguna sucesión sin subsucesiones de Cauchy. Aplicando la proposición 5, extraemos de ella una sucesión $(y_n)_n$ tal que

$$\|y_n - y_m\| \geqslant \delta^{1/p} > 0 \qquad \text{si } n \neq m.$$

Los vectores y_n, $n \in \mathbb{N}$, son bloques, no necesariamente disjuntos, de $(n_n)_n$. Sea $E_k = [x_1, ..., x_k]$. En Y/E_k la topología cociente está dada por una norma p-convexa, si se considera en E_k la topología inducida por la de Y. Denotemos Π_k la proyección de Y sobre E_k y P_k la proyección de Y sobre Y/E_k.

Se cumple

$$\liminf_n \|P_k(y_n)\| \geqslant \left(\frac{\delta}{3}\right)^{1/p}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

En efecto: en caso contrario se obtendría $(z_m)_m \subseteq E_k$ tal que

$$\|y_{n_m} + z_m\| < \left(\frac{\delta}{3}\right)^{1/p},$$

de donde

$$\|z_m\| < \left(\frac{1+\delta}{3}\right)^{1/p}.$$

Denotando $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una subsucesión conergente de $(z_m)_m$ y tomando $1, q$ tales que

$$\|v_1 - v_q\| < \left(\frac{\delta}{3}\right)^{1/p}$$

sería

$$\delta \leqslant \|y_{m_1} - y_{m_q}\|^p \leqslant$$

$$\leqslant \|y_{m_1} + v_e\|^p + \|v_1 - v_q\|^p + \|y_{m_q} + v_q\|^p < \delta$$

Pongamos $u_1 = y_1$ y sea $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $y_1 \in E_{k_1}$. Elijamos $u_2' = y_m$ de forma que

$$\|P_{k_1}(y_m)\| > \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{3}\right)^{1/p}, \qquad y_m \notin E_{k_1}.$$

Tomemos $u_2 = u_2' - \Pi_{k_1}(u_2')$. Es claro que existe $k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 < k_1$, tal que

$$u_2 \in [x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_2}].$$

Además

$$\|u_2 - u_1\| \geqslant \|P_{k_1}(u_2')\| > \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{3}\right)^{1/p}.$$

Procediendo por recurrencia sobre u_j y P_{k_j} obtenemos una sucesión $(u_n)_n$, bloque de $(x_n)_n$ tal que

$$\|u_n - u_m\| > \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{3}\right)^{1/p} \qquad \text{siempre que} \quad n \neq m.$$

Si M denota la constante de la sucesión básica $(x_n)_n$

$$\|\Pi_{k_{n-1}} u_n'\| \leqslant M \, \|u_n'\|,$$

de donde

$$\|u_n\| \leqslant (\|u_n'\|^p + \|\Pi_{k_{n-1}} u_n'\|^p)^{1/p} = (1 + M^p)^{1/p}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Demostración del teorema 2.— De acuerdo con el lema 5, existe una sucesión normalizada, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bloque de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es básica. Sea $(u_n)_n$ la sucesión acotada, sin subsucesiones convergentes y bloques de $(y_n)_n$ obtenida mediante el lema 7. La demostración del teorema I.1 de [5] puede efectuarse, con ligeros cambios, en el contexto de espacios p-Banach por lo que se obtiene, en una ultrapotencia de X, una sucesión $(e_n)_n$, normalizada, invariante por propagación y cambios de signo y f.r.b. $(u_n)_n$.

Si se cumple la alternativa (1) del Teorema 4, utilizando un resultado de [13] se deduce que c_0 es $2^{1/p-1}$ f.r.b. de una reordenación de $(e_n)_n$. Si se verifica (2) del mismo teorema, de

$$2^{n/t} \leqslant C \, \|\sum_{i=1}^{2^n} e_i\|$$

se sigue que $q \leqslant t$ y de

$$\|\sum_{i=1}^{2^n} e_i\| \leqslant 2^{n/p} \qquad \text{que} \quad q \geqslant p.$$

En cualquier caso, por transitividad, de la λ representación finita en bloques, se concluye la demostración.

Si X es un espacio p-Banach, $0 < p \leqslant 1$, del teorema de Dvoretzky Rogers, [3], se deduce que $i\colon l^r \to l^s$ es f.f.t. X siempre que $r \leqslant 2 \leqslant s$.

Para X Banach con tipo y cotipo Rademacher $p(X)$ y $q(X)$, respectivamente, del teorema de Maurey-Pisier-Krivine, [9], se sigue que la inclusión de l^r en l^s es f.f.t. X para

$$(r, s) \in [1, p(X)] \times [p(X), 2) \cup (2, q(X)] \times [q(X), +\infty]$$

y no es λ-f.f.t. X para ningún valor de λ si

$$(r, s) \in [1, p(X)) \times [1, p(X)) \cup (q(X), +\infty] \times (q(X), +\infty]$$

Es conocido que l^r es f.r. l^q para $q \leqslant r < 2$, por lo que $i: l^r \to l^s$ es f.f.t. X para

$$(r, s) \in (p(X), 2) \times (p(X), 2).$$

En [5] se prueba que si l^r es λ-f.r. X, es f.r. x.

El teorema siguiente cierra, por tanto, afirmativamente la cuestión relativa a la posibilidad de mejorar la constante de factorización finita del operador arriba considerado, a través de un espacio de Banach.

Teorema 8.— Sea X Banach tal que i: $l^r \to l^s$ $(1 \leqslant r \leqslant s \leqslant \infty)$ es λ-f.f.t.X. Entonces i es f.f.t.X.

Para su demostración nos basaremos en la versión que del teorema de Krivine aparece en [10], teorema 2.6, que, adaptada a nuestra situación, puede enunciarse así:

Lema 9.— Sea X Banach e $(y_n)_n \subset X$ normalizada, incondicional e invariante por propagación. Si, para cada sucesión de naturales $(t_n)_n$ con límite infinito,

$$q = \inf \{p; \lim_n t_n^{1/p} \| \sum_{i=1}^{t_n} y_i \| = +\infty\}$$

l^q es f.r.b. $(y_n)_n$.

Demostración del teorema 8.— Ya que i: $l^r \to l^s$ es *λ-f.f.t.X*, existe, en una ultrapotencia de X, una sucesión $(x_n)_n$ tal que

$$\|(a_n)_n\|_{l^s} \leqslant \| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \| \leqslant \lambda \, \|(a_n)_n\|_{l^r}$$

siempre que $(a_n)_n \in l^r$, por lo que $(x_n)_n$ es acotada y sin subsucesiones convergentes. Sea $(y_n)_n$ una sucesión invariante por propagación asociada a $(x_n)_n$. Entonces $(y_n)_n$ es f.r.b. $(x_n)_n$ e $(y_{2n-1} - y_{2n})_n$ es incondicional (ver [2]).

Denotando

$$z_n = \frac{y_{2n-1} - y_{2n}}{\|y_1 - y_2\|} \qquad (\|y_1 - y_2\| > 2^{1/s}), \qquad (z_n)_n$$

satisface las condiciones del lema 9. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$

$$\frac{2^{1/s}}{\delta} \|(a_i)_{i=1}^n\|_{l^s} \leqslant \|\sum_{i=1}^n a_i z_i\| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \frac{2^{1/r}}{\delta} \|(a_i)_{i=1}^n\|_{l^r}$$

Si $(t_n)_n$ y q son como en el lema anterior, de

$$t_n^{-1/r} \|\sum_{j=1}^{t_n} z_i\| \leqslant \frac{\lambda 2^{1/r}}{\delta}$$

se deduce que $q \geqslant r$.

Por otra parte si $p > s$,

$$\lim_n t_n^{-1/p} \|\sum_{i=1}^{t_n} z_i\| = +\infty,$$

de donde $q \leqslant s$.

Aplicando el lema 9 y un sencillo argumento de transitividad, se concluye la demostración.

Agradecimientos.— Quiero expresar mi gratitud a G. Pisier por sus indicaciones sobre el lema 7 y a J. Bastero, quien me introdujo en el estudio de esta materia.

BIBLIOGRAFIA

[1] BASTERO, J. (1982): *Annales Inst. Henri Poincaré*, vol. XVIII, nº 3, pp. 293-304.
[2] BRUNEL, A., SUCHESTON, L. (1975): *Trans. A.M.S. 204*, pp. 79-90.
[3] DVORETZKY-ROGERS (1961): *Some results on convex bodies and Banach spaces.* Procedings of the international Simposium on Linear Spaces. Jerusalem, Academic Press, pp. 123-160.
[4] KALTON, N. J.: *The convexity type of quasi-Banach spaces.* No publicado.
[5] KRIVINE, J. L. (1976): *Annals of Math.* Vol. 104, pp. 1-29.
[6] LEMBERG, H. (1981): *Isr. Jour. of Math.*, vol. 39, nº 4, pp. 341-348.
[7] LINDENSTRAUSS-TZAFRIRI (1977): *Classical Banach Spaces*, vol. I. Sequence Spaces, Springer-Verlag.
[8] MAUREY, B. (1973-74): *Seminaire Maurey-Schwartz.* Exposée XXIV-XXV.
[9] MAUREY, B., PISIER, G. (1976): *Studia Math.* T. LVIII, pp. 45-90.
[10] MILMAN, V. D., SHARIR, M. (1979): *Isr. Jour. of Math.*, Vol. 33, nº 1, pp. 73-87.

[11] PISIER, G. (1972-73): *Seminaire Maurey-Schwartz.* Exposée n° XVIII.
[12] ROSENTHAL, H. (1978): *Journal of Funct. Analysis*, 28, pp. 197-225.
[13] URIZ, Z. (1982): *Actas de las IX J.M.H.L.* Vol. 1, pp. 405-408.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad de Zaragoza