Segmentos y conjuntos L(f) para funciones del espacio de Bloch $\tilde{\mathfrak{B}}_0$

Por JOSE A. ANTONINO Y SALVADOR ROMAGUERA

Recibido: 3 de marzo 1985

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia Ureña.

Abstract

K. J. Wirths has proved that if $f \in ball\, \tilde{\mathfrak{B}}_0$ and $L(f)$ is an infinite set, then there is a simple closed curve γ and points $z_1, ..., z_j$, such that $L(f) = \gamma \cup z_1, ..., z_j$. The points $z_1, ..., z_j$, lie in the simply–connected bounded domain G defined by $\partial G = \gamma$. In this paper we prove a result which implies that γ no contains segments of stright line.

Resumen

K. J. Wirths ha probado que si f está en la bola unidad de $\tilde{\mathfrak{B}}_0$ y $L(f)$ es infinito, entonces existe una curva cerrada simple γ y puntos $z_1, ..., z_j$, tal que $L(f) = \gamma \cup \{z_1, ..., z_j\}$. Los puntos $z_1, ..., z_j$, pertenecen al dominio acotado simplemente conexo G definido por $\partial G = \gamma$. En este artículo probamos un resultado del que deducimos que γ no contine segmentos de recta.

Sea $D = \{ z \in C\colon |z| < 1\}$ y sea una función holomorfa en D. Siguiendo la notación de [3] sea

$$M(f) = \sup \left\{ |f'(z)|(1 - |z|^2)\colon z \in D \right\}$$

y

$$\mathfrak{B} = \left\{ f\colon f \text{ es holomorfa en } D \text{ y } M(f) < \infty \right\}$$

$\mathfrak{B}$ es un espacio de Banach respecto de la norma $\|f\| = |f(0)| + M(f)$, denominado espacio de Bloch. Sea

$$\mathfrak{B}_0 = \left\{ f \in \mathfrak{B}\colon \lim_{|z| \to 1} |f'(z)|\,(1 - |z|^2) = 0 \right\}$$

En [1] se prueba que $\mathfrak{B}_0$ es un subespacio cerrado de $\mathfrak{B}$.
Definamos, ahora,

$$\tilde{\mathfrak{B}} = \left\{ f \in \mathfrak{B} : f(0) = 0 \right\}, \quad \tilde{\mathfrak{B}}_0 = \mathfrak{B}_0 \cap \tilde{\mathfrak{B}}$$

y $\tilde{\mathfrak{B}}_{0\,1}$ como la bola unidad (cerrada) de $\tilde{\mathfrak{B}}_0$, es decir

$$\tilde{\mathfrak{B}}_{01} = \left\{f \in \tilde{\mathfrak{B}}_0 : M(f) \leqslant 1\right\}$$

Si hacemos

$$\mathfrak{K}' = \left\{f\text{: f es holomorfa en } D \text{ y } M(f) \leqslant 1\right\}$$

entonces, es evidente que $\tilde{\mathfrak{B}}_{01} \subset \mathfrak{K}'$.

Para cada $f \in \mathfrak{K}'$ sea

$$L(f) = \left\{z \in D\text{: } |f'(z)|\,(1 - |z|^2) = 1\right\}$$

En el estudio del conjunto $L(f)$ para las funciones de $\tilde{\mathfrak{B}}_{01}$, Cima y Wogen [3] obtienen varios resultados interesantes y plantean, entre otros el siguiente problema. ¿existen funciones $f \in \tilde{\mathfrak{B}}_{01}$ tal que $L(f)$ sea infinito y no sea una circunferencia?. En esta dirección, Wirths [6] demuestra

Teorema 1 (Wirths).– Si $f \in \tilde{\mathfrak{B}}_{01}$ y $L(f)$ es infinito, entonces existe una curva cerrada simple γ y puntos $z_1, ..., z_j$, tal que $L(f) = \gamma \cup \{z_1, ..., z_j\}$. Los puntos $z_1, ..., z_j$, se encuentran en el dominio acotado simplemente conexo definido por $\partial G = \gamma$.

Otros resultados que pueden contribuir a la definitiva resolución del problema citado se dan en [5].

En este artículo probamos el teorema 2, del que deduciremos que la curva γ del teorema 1 no contiene segmentos de recta.

Es conocido que para cada $a \in D$ existe una sucesión de números reales $\{\delta_n (a)\text{: } n \in N\}$ tal que si $f \in \mathfrak{K}'$ y $L(f)$ contiene una sucesión $\{z_k : k \in N\}$ de puntos distintos tales que $|z_k - a| = r$, $r < 1 - |a|$, para todo k, entonces $L(f) = C(a, r)$ y $r = \delta_n (a)$ para algún n [2], [3] (aquí $C(a, r)$ denota la circunferencia de centro a y radio r). Para segmentos de recta tenemos:

Teorema 2.– Sea $A = \{z_n : n \in N\}$ una sucesión de puntos distintos de D, contenidos en una recta r y con un punto de acumulación en D. Si existe una función $f \in \mathfrak{K}'$ tal que $A \subset L(f)$, entonces $L(f) = r \cap D$.

Demostración: Supongamos primero que la recta r no pasa por el origen. Es fácil comprobar que la aplicación bilineal

$$\Phi\ (z) = \frac{z - z_0}{z\,\bar{z}_0 - 1},\ 0 < |z_0| < 1,$$

transforma conformemente la recta r en una circunferencia $C(a, \rho)$ de centro a y radio $\rho > 0$, que obviamente no está contenida en D. Si $g = f \circ \Psi$ cuando $\Psi = \Phi^{-1}$ tenemos que $g \in \mathfrak{K}'$ pues se verifica

$$|g'(w)|\,(1 - |w|^2) = |f'\ \Psi\ (w)|\,(1 - |\Psi\,(w)|^2)$$

para todo $w \in D$ [4, página 287]. Por tanto, $\{w_n = \Phi(z_n)\text{: } n \in N\} \subset L(g)$. Por otra parte, es conocido que la función meromorfa

$$h(w) = \frac{g''(w)}{wg''(w) + 2g'(w)}$$

verifica $h(w) = \bar{w}$ si $w \in L(g)$ [6]. Es inmediato comprobar que

$$h(w) = \frac{\rho^2}{w - a} + \bar{a}$$

y que $h(w) = \bar{w}$ sí, y sólo si, $w \in C(a, \rho) \cap D$, con lo cual deducimos que $L(g) = C(a, \rho) \cap D$, es decir $L(f) = r \cap D$ (ver [6, página 21])

Supongamos, ahora, que A es una sucesión de números reales. Entonces tenemos que $h(z_n) = z_n$ para todo n y, por tanto,

$$L(f) = D \cap \left\{z = x + iy: \; y = 0\right\}.$$

En este caso es fácil comprobar que existe tal función f y que su expresión es $f(z) = \dfrac{\lambda}{2} \log \dfrac{1+z}{1-z} + k$, con λ, k, constantes complejas tal que $|\lambda| = 1$.

Finalmente, si r es cualquier recta que pasa por el origen y verifica las hipótesis, podemos determinar un $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que $\psi(z) = e^{-i\theta} z$ transforma la recta r en el eje real. En consecuencia, $f \circ \psi = g \in \mathfrak{R}'$ y $\{\psi(z_n): n \in N\} \subset L(g)$. Luego, $f \in \mathfrak{R}'$ y $L(f) = D \cap r$ cuando

$$f(z) = g(e^{i\theta} z) = \frac{\lambda}{2} \log \frac{1 + e^{i\theta} z}{1 - e^{i\theta} z} + k$$

para todo $z \in D$. Esto concluye la demostración.

Corolario.– Sea $f \in \tilde{\mathfrak{B}}_{01}$ tal que $L(f)$ es infinito. Entonces, $L(f)$ no contiene segmentos de recta.

Demostración: La curva cerrada γ que proporciona el teorema 1 carece de segmentos de recta en virtud del teorema 2.

NOTA. Observemos que las funciones $f \in \mathfrak{R}'$ que obtenemos en el teorema 2 no son de $\tilde{\mathfrak{B}}_{01}$.

Los autores agradecen al Académico Numerario Excmo. Sr. D. Manuel Valdivia la presentación de este artículo en la Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDERSON, J. M., CLUNIE, J. and POMMERENKE, CH.: On Bloch functions and normal functions. *J. Reine Angw. Math.* 270, 12-37, (1974).

[2] ANTONINO, J. A., and ROMAGUERA, S.: A short proof of the Cima Wogen $L(f)$ = Circle theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.* 92, 391–392. (1984).

[3] CIMA J. A. and WOGEN, W. R.: Extreme points of the unit ball of the Bloch space $\mathcal{B}_0$. *Michigan Math. J.* 25, 213–222. (1978).

[4] DIEUDONNE, J.: Eléments d'Analyse, tomo 1. Fondements de l'analyse moderne. Gauthier–Villars (1972).

[5] ROMAGUERA, S. Y ANTONINO, J.: Aplicación del problema de Dirichlet a la resolución de la inecuación $|f'(z)|(1-|z|^2)\leqslant 1$ en el disco unidad cuando $|f'(z)|(1-|z|^2)=1$ sobre ciertas elipses. Actas VII Congreso Ecuac. Diferenc. y Aplic. Universidad de Granada 359–363, (1984)

[6] WIRTHS, K. J.: On holomorphic functions satisfying $|f(z)|(1-|z|^2)\leqslant 1$ in the unit disc. *Proc. Amer. Math. Soc.* 85, 19–23, (1982).

José A. Antonino y Salvador Romaguera
Departamento de Matemática Pura
E.T.S.I.C.C.P. Universidad Politécnica
46022 Valencia – España