Una caracterización del dual del ideal de los operadores absolutamente sumantes en espacios de Banach

Por Candido Piñeiro Gomez

Recibido: 14 diciembre 1984

Presentado por el académico correspondiente D. Antonio de Castro Brzezicki

Abstract

If E is a Banach space and I is an index set, by $D(I, E)$ we denote the vector space of all bounded families $\hat{x} = \{x_i \mid i \in I\}$ of E such that the map $S: x' \in E' \to \{\langle x_i, x'\rangle \mid i \in I\} \in l^\infty(I)$ is absolutely symming and we define $\|\hat{x}\|$ to be the norm absolutely summing of S. If $D_0(I, E) = \overline{\Phi(I, E)}$, where $\Phi(I, E)$ is the vector space of all families of E with only a finite number of entries not equal to the zero vector, we prove that the dual Banach space of $(D_0(I, E), \|\ \|)$ and the Banach space $(l^1[I, E'], \varepsilon)$ are isometric.

Finally, if Π denotes the ideal of the absolutely summing operators on Banach spaces, we characterize its dual operator ideal by transforming continuously the families of $c_0\{I, \cdot\}$ into families of $D_0(I, \cdot)$ and also by transforming the bounded families into families of $D(I, \cdot)$.

1. INTRODUCCION

Sea I un conjunto de índices arbitrario y E un espacio de Banach. Si $\hat{x} = \{x_i \mid i \in I\}$ es una familia acotada de E, la aplicación

$$S_{\hat{x}}: x' \in E' \to \{\langle x_i, x'\rangle \mid i \in I\} \in l^\infty(I) \tag{1}$$

es lineal y continua. Con $D(I, E)$ denotamos el conjunto de todas las familias $\{x_i \mid i \in I\}$ de E tales que $S_{\hat{x}} \in \Pi(E', l^\infty(I))$, donde Π es el ideal de los operadores absolutamente sumantes en espacios de Banach (Pietsch 1972).

Es bien conocido (Pietsch 1972, p. 40) que $S_{\hat{x}}$ es absolutamente sumante si y sólo si existe una medida de Radon positiva μ sobre U'' (bola unidad cerrada de E'' a la que se dota de la topología $\sigma(E'', E')$) tal que

$$\|S_{\hat{x}}(x')\|_\infty \leq \int_{U''} |\langle x'', x'\rangle| \, d\mu(x'') \qquad (\forall\, x' \in E') \tag{2}$$

Por tanto, $\{x_i \mid i \in I\}$ pertenece a $D(I, E)$ si y sólo si se verifica

$$\sup_{i \in I} |\langle x_i, x' \rangle| \leqslant \int_{U''} |\langle x'', x' \rangle| \, d\mu (x'') \qquad (\forall x' \in E') \tag{3}$$

para alguna medida positiva μ sobre U''. Por esta razón, llamamos dominadas a las familias $\{x_i \mid i \in I\}$ que pertenecen a $D(I, E)$.

A lo largo de nuestro trabajo usaremos que el par $[\Pi, p]$ es un ideal normado de operadores en espacios de Banach (p es la norma absolutamente sumante). Las propiedades que necesitamos y la definición pueden encontrarse en Pietsch (1980).

De ser Π un ideal de operadores, sigue que $D(I, E)$ es un espacio vectorial sobre K (K denota R ó C indistintamente) que contiene a $l^\infty(I) \otimes E$, espacio vectorial de las familias acotadas y finitodimensionales de E.

Para cada familia $\hat{x} = \{x_i \mid i \in I\}$, ponemos $\|\hat{x}\| = \inf \mu(U'')$, donde el ínfimo se toma sobre todas las medidas positivas μ que verifican (3). Entonces $\|\hat{x}\|$ es la norma absolutamente sumante $p(S_{\hat{x}})$ de la aplicación (1) y, por tanto, $(D(I, E), \|\cdot\|)$ es un espacio normado. En Pietsch (1972, p. 40) se prueba que existe una medida μ_0 al menos, que satisface (2) y para la que $\mu_0(U'')$ es igual a la norma absolutamente sumante de $S_{\hat{x}}$.

Si en (3) se toma $x' \in U'$ (U' es la bola unidad cerrada de E'), entonces

$$\sup_{i \in I} |\langle x_i, x' \rangle| \leqslant \mu(U'')$$

de donde sigue que

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup_{i \in I} \|x_i\| \leqslant \mu(U'')$$

para cada μ positiva que verifica (3). Por tanto, se tiene la desigualdad

$$\|\hat{x}\|_\infty \leqslant \|\hat{x}\| \qquad (\forall \hat{x} \in D(I, E)) \tag{4}$$

Es decir, la inyección canónica de $D(I, E)$ en $l^\infty(I, E)$ es continua.

Si $\mathcal{F}(I)$ denota la colección de todos los subconjuntos finitos de I y $\hat{x} = \{x_i \mid i \in I\}$ es una familia arbitraria de E, definimos

$$x_i(J) = \begin{cases} x_i & \text{si} \quad i \in J \\ 0 & \text{si} \quad i \notin J \end{cases}$$

para cada $J \in \mathcal{F}(I)$. Es claro que las familias $\hat{x}(J) = \{x_i(J) \mid i \in I\}$ forman un sistema dirigido en $D(I, E)$ poniendo

$$J_1 \geqslant J_2 \iff J_1 \supseteq J_2 \qquad (J_1, J_2 \in \mathcal{F}(I))$$

Se define $D_0(I, E)$ como el subespacio lineal de $D(I, E)$ formado por las familias $\hat{x} \in D(I, E)$ para las que se verifica

$$\hat{x} = \lim_J \hat{x}(J).$$

Obviamente $\Phi(I, E)$ está contenido en $D_0(I, E)$ ($\Phi(I, E)$ denota el espacio vectorial de las familias finitamente no nulas de E). Por otra parte, si $\hat{x} = \{x_i \mid i \in I\} \in D_0(I, E)$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $J_0 \in \mathscr{F}(I)$ tal que

$$\|\hat{x} - \hat{x}(J)\| < \varepsilon \qquad (\forall J \in \mathscr{F}(I) \mid J \supseteq J_0)$$

de donde sigue, utilizando (4), que

$$\sup_{i \notin J_0} \|x_i\| < \varepsilon$$

Es decir, $D_0(I, E) \subseteq c_0\{I, E\}$, espacio vectorial de las familias nulas de E.

En la sección 2 obtenemos una caracterización de las familias dominadas que utilizamos para probar que $D(I, E)$ es un espacio de Banach y para probar, en la sección 3, que el dual topológico de $D_0(I, E)$ es isométrico al espacio de Banach $(l^1[I, E'], \varepsilon)$, donde $l^1[I, E']$ es el espacio vectorial de las familias $\{x_i' \mid i \in I\}$ débilmente absolutamente sumables de E' y ε la norma definida por

$$\varepsilon(\{x_i'\}) = \sup\{\sum_{i \in I} |\langle x'', x_i'\rangle| : x'' \in U''\}$$

En la sección 4 caracterizamos las aplicaciones $T \in \mathscr{L}(E, F)$ cuya traspuesta es absolutamente sumante, por transformar las familias acotadas de E en familias dominadas de F, y también por transformar las familias nulas de E en familias de $D_0(I, F)$.

Finalmente, en la sección 5 estudiamos la relación existente entre familias dominadas y familias prenucleares de E' (Köthe 1979, p. 314). Demostramos que, si E es secuencialmente denso en E'' para la topologìa $\sigma(E'', E')$, se tiene la igualdad

$$D(I, E') = P(I, E')$$

donde $P(I, E')$ denota el conjunto de las familias prenucleares de E'.

2. UNA CARACTERIZACION DE LAS FAMILIAS DOMINADAS

Si $\hat{x} = \{x_i \mid i \in I\}$ es una familia dominada de E y μ es alguna medida positiva sobre U'' verificando (3), para cada $J \in \mathscr{F}(I)$ y cada $\varphi: J \to E'$, se tiene

$$\sum_{i \in J} |\langle x_i, \varphi(i)\rangle| \leqslant \sum_{i \in J} \int_{U''} |\langle x'', \varphi(i)\rangle| \, d\mu(x'') \leqslant$$

$$\leqslant \mu(U'') \sup\{\sum_{i \in J} |\langle x'', \varphi(i)\rangle| : x'' \in U''\}$$

En realidad se tiene el siguiente:

Teorema 1.– $\{x_i \,/\, i \in I\}$ es dominada en E si y sólo si existe $k > 0$ tal que se tiene

$$\sum_{i \in J} |\langle x_i, \varphi(i)\rangle| \leqslant k \cdot \sup \{ \sum_{i \in J} |\langle x'', \varphi(i)\rangle| : x'' \in U'' \} \tag{5}$$

para cada $J \in \mathscr{F}(I)$ y cada $\varphi\colon J \to E'$.

Demostración.– Sólo necesitamos probar la suficiencia. Sea $\{x_i \,/\, i \in I\}$ una familia de E tal que existe $k > 0$ para el que se tiene (5). Para cada $J \in \mathscr{F}(I)$ y cada $\varphi\colon J \to E'$, definimos

$$F_{J,\varphi}(\mu) = \sum_{i \in J} [\, |\langle x_i, \varphi(i)\rangle| - k \int_{U''} |\langle x'', \varphi(i)\rangle| \, d\mu]$$

Si $\mathscr{B}$ es el conjunto de las medidas positivas μ definidas sobre U'' tales que $\mu(U'') \leqslant 1$, es obvio que $\mathscr{B}$ es un subconjunto compacto y convexo, para la topología $\sigma(\mathscr{M}, C(U''))$, del espacio de Banach $\mathscr{M}$ de las medidas de Radon sobre U'', y que $F_{J,\varphi}\colon \mathscr{B} \to R$ es continua y convexa.

Vamos a aplicar un lema de Kay Fan (Fan 1951) y necesitamos probar que la colección Σ de todas las $F_{J,\varphi}$ es cóncava. Es decir, si

$$F_{J_p, \varphi_p} \in \Sigma \qquad \text{y} \qquad \sum_{p=1}^{n} \alpha_p = 1 \qquad (0 \leqslant \alpha_p \leqslant 1),$$

existe $F_{J,\varphi} \in \Sigma$ de manera que

$$\sum_{p=1}^{n} \alpha_p F_{J_p, \varphi_p} \leqslant F_{J,\varphi} \tag{6}$$

En efecto, sea

$$J = \bigcup_{p=1}^{n} J_p \qquad \text{y} \qquad \varphi\colon J \to E'$$

definida por

$$\varphi(i) = \sum_{p / i \in J_p} \alpha_p \lambda_i^p \varphi_p(i) \qquad (\forall\, i \in J)$$

donde λ_i^p se escoge de manera que $\lambda_i^p \langle x_i, \varphi_p(i)\rangle = |\langle x_i, \varphi_p(i)\rangle|$. Entonces se tiene

$$\sum_{p=1}^{n} \alpha_p \sum_{i \in J_p} |\langle x_i, \varphi_p(i)\rangle| = \sum_{p=1}^{n} \sum_{i \in J_p} \alpha_p \lambda_i^p \langle x_i, \varphi(i)\rangle =$$

$$= \sum_{i \in J} \sum_{p} \alpha_p \lambda_i^p \langle x_i, \varphi(i) \rangle = \sum_{i \in J} \langle x_i, \varphi(i) \rangle \tag{7}$$

y por otra parte

$$\sum_{i \in J} |\langle x'', \varphi(i) \rangle| \leqslant \sum_{i \in J} \sum_{p} |\lambda_i^p| \cdot \alpha_p \cdot |\langle x'', \varphi_p(i) \rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i \in J} \sum_{p} \alpha_p |\langle x'', \varphi_p(i) \rangle| = \sum_{p=1}^{n} \alpha_p \sum_{i \in J_p} |\langle x'', \varphi_p(i) \rangle| \tag{8}$$

Ahora (6) sigue fácilmente de (7) y (8).

Para cada $J \in \mathscr{F}(I)$ y cada $\varphi: J \to E'$, escojamos x_0'' en U'' de modo que

$$\sup \{ \sum_{i \in J} |\langle x'', \varphi(i) \rangle| : x'' \in U'' \} = \sum_{i \in J} |\langle x_0'', \varphi(i) \rangle| .$$

Si $\delta_{x_0''}$ denota la medida de Dirac en el punto x_0'', desde luego $\delta_{x_0''} \in \mathscr{B}$ y se tiene

$$F_{J,\varphi}(\delta_{x_0''}) = \sum_{i \in J} [\, |\langle x_i, \varphi(i) \rangle| - k\, |\langle x_0'', \varphi(i) \rangle|\,]$$

y sigue de (5) que $F_{J,\varphi}(\delta_{x_0''}) \leqslant 0$. Por el Lema citado existe $\mu \in \mathscr{B}$ tal que $F(\mu) \leqslant 0$ para cada $F \in \Sigma$. Si se toma, en particular, $i \in I$ y $x' \in E'$, se tendrá

$$F_{i,x'}(\mu) = |\langle x_i, x' \rangle| - k \int_{U''} |\langle x'', x' \rangle| \, d\mu \leqslant 0$$

de donde sigue que $\{x_i \,/\, i \in I\}$ pertenece a $D(I, E)$. □

Sigue de la demostración del teorema que, si $\hat{x} \in D(I, E)$, $\|\hat{x}\|$ es el menor $k > 0$ que satisface (5), y que

$$\|\hat{x}(J)\| \leqslant \|\hat{x}\| \qquad (\forall J \in \mathscr{F}(I)) \tag{9}$$

Corolario 1.– Una vamilia $\hat{x} = \{x_i \,/\, i \in I\}$ de E, es dominada si y sólo si $\{\hat{x}(J) : J \in \mathscr{F}(I)\}$ es un subconjunto acotado de $D(I, E)$, en cuyo caso se tiene

$$\|\hat{x}\| = \sup_{J} \|\hat{x}(J)\|.$$

Demostración.– Sigue directamente de (5) y (9). □

Corolario 2.– Si $\lambda = \{\lambda_i \;/\; i \in I\} \in l^\infty(I)$ y $\hat{x} = \{x_i \;/\; i \in I\} \in D(I, E)$ entonces $\lambda \cdot \hat{x} = \{\lambda_i \cdot x_i \;/\; i \in I\} \in D(I, E)$ y se tiene

$$\|\lambda \cdot \hat{x}\| \leqslant \|\lambda\|_\infty \cdot \|\hat{x}\|.$$

Demostración.– De la desigualdad

$$\sum_{i \in J} |\langle \lambda_i \cdot x_i, \varphi(i)\rangle| \leqslant (\sup_{i \in J} |\lambda_i|) \cdot \sum_{i \in J} |\langle x_i, \varphi(i)\rangle|,$$

sigue directamente de (5) que

$$\|(\lambda \cdot \hat{x})(J)\| \leqslant (\sup_{i \in J} |\lambda_i|) \cdot \|\hat{x}(J)\|$$

y ahora basta aplicar el Corolario 1. □

Teorema 2.– $D(I, E)$ es un espacio de Banach.

Demostración.– Sea $\hat{x}_n = \{x_i^n \;/\; i \in I\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $\{\hat{x}_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $D(I, E)$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\hat{x}_n - \hat{x}_m\| < \varepsilon \qquad (n, m \geqslant n_0) \tag{10}$$

y teniendo en cuenta (4) obtenemos

$$\|x_i^n - x_i^m\| < \varepsilon \qquad (n, m \geqslant n_0)$$

para cada $i \in I$. Esto prueba que $\{x_i^n\}$ es una sucesión de Cauchy en E, para cada $i \in I$. Por tanto, existe $x_i \in E$ tal que

$$x_i = \lim_{n \to \infty} x_i^n \qquad (\forall\, i \in I)$$

Para probar que $\hat{x} = \{x_i \;/\; i \in I\}$ pertenece a $D(I, E)$, utilizamos (10) y la nota que sigue al teorema 1, obteniendo

$$\sum_{i \in J} |\langle x_i^n - x_i^m, \varphi(i)\rangle| \leqslant \varepsilon \cdot \sup\{\sum_{i \in J} |\langle x'', \varphi(i)\rangle| : x'' \in U''\} \tag{11}$$

para cada $J \in \mathscr{F}(I)$ y cada $\varphi: J \to E'$ $(n, m \geqslant n_0)$. Si tomamos en (11) límite cuando $m \to \infty$, con J, φ y n fijos, obtenemos

$$\sum_{i \in J} |\langle x_i^n - x_i, \varphi(i)\rangle| \leqslant \varepsilon \cdot \sup\{\sum_{i \in J} |\langle x'', \varphi(i)\rangle| : x'' \in U''\} \tag{12}$$

para cada $n \geqslant n_0$. (12) prueba que $\{x_i^n - x_i \;/\; i \in I\}$ pertenece a $D(I, E)$ y que

$$\|\hat{x}_n - \hat{x}\| \leqslant \varepsilon \qquad (\forall\, n \geqslant n_0). \qquad \square$$

Terminamos esta sección probando que $D_0\ (I, E)$ es completo.

Teorema 3.– $D_0\ (I, E)$ es un subespacio cerrado de $D\ (I, E)$.

Demostración.– Sea $\hat{y} \in \overline{D_0\ (I, E)}$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\hat{x} \in D_0\ (I, E)$ tal que $\|\hat{x} - \hat{y}\| < \varepsilon/3$. Por otra parte, $\hat{x} = \lim\limits_J \hat{x}\ (J)$ en $D\ (I, E)$, por lo que existe $J_0 \in \mathscr{F}(I)$ tal que

$$\|\hat{x} - \hat{x}\ (J)\| < \varepsilon/3$$

para cada $J \in \mathscr{F}(I)$ con $J_0 \subseteq J$. Para un tal J, se tiene

$$\|\hat{y} - \hat{y}\ (J)\| \leqslant \|\hat{y} - \hat{x}\| + \|\hat{x} - \hat{x}\ (J)\| + \|\hat{x}\ (J) - \hat{y}\ (J)\| <$$
$$< \|(\hat{x} - \hat{y})\ (J)\| + 2\varepsilon/3$$

Por (9), se tiene que $\|(\hat{x} - \hat{y})\ (J)\| < \varepsilon/3$. Por tanto, será $\|\hat{y} - \hat{y}\ (J)\| < \varepsilon$, de donde sigue que $\hat{y} \in D_0\ (I, E)$. $\square$

3. EL DUAL TOPOLOGICO DE D_0 (I, E)

Proposición 1.–

a) Si $\hat{x} = \{\lambda_i \cdot x \ /\ i \in I\}$, donde $\{\lambda_i \ /\ i \in I\}$ pertenece a $l^\infty(I)$ y $x \in E$, entonces $\|\hat{x}\| = \|x\| \cdot \sup |\lambda_i|$.

b) Si $\{\lambda_i / i \in I\} \in c_0\ (I)$ y $\{x_i / i \in I\} \in D\ (I, E)$, entonces $\{\lambda_i \cdot x_i / i \in I\} \in D_0\ (I, E)$.

c) La aplicación σ_j: $x \in E \ \rightarrow\ \{\delta_{ij} \cdot x \ /\ i \in \mathrm{I}\} \in D\ (I, E)$ es lineal y continua, para cada $j \in I$.

d) La aplicación Π_j: $\{x_i \ /\ i \in I\} \ \in D\ (I, E) \ \rightarrow\ x_j \in E$ es lineal y continua.

Demostración.–

a) La aplicación

$$S_{\hat{x}}\!: \ x' \in E' \ \rightarrow\ \{\lambda_i \langle x, x'\rangle \ /\ i \in I\} \in l^\infty(I)$$

es de rango unidimensional y es conocido que la norma absolutamente sumante de $S_{\hat{x}}$ coincide con la norma ordinaria.

b) Si $\{x_i \mid i \in I\} \in D(I, E)$, existe una medida positiva μ que satisface (3). Por otra parte, para cada $\varepsilon > 0$ existe $J_0 \in \mathscr{F}(I)$ tal que $|\lambda_i| < \varepsilon$ si $i \notin J_0$. Por tanto, para cada $J \in \mathscr{F}(I)$ tal que $J \supseteq J_0$, se tiene

$$\sup_{i \in I/J} |\langle \lambda_i \cdot x_i, x' \rangle| \leqslant \varepsilon \int_{U''} |\langle x'', x' \rangle| \, d\mu(x'') \tag{13}$$

para cada $x' \in E'$. Ahora sigue fácilmente que $\{\lambda_i \cdot x_i \mid i \in I\}$ pertenece a $D_0(I, E)$.

c) $\|\sigma_j(x)\| = \|x\|$, para cada $x \in E$, por (*a*).

d) $\|\Pi_j(\hat{x})\| = \|x_j\| \leqslant \sup_i \|x_i\|$ y ahora basta aplicar (4) para obtener

$\|\Pi_j(\hat{x})\| \leqslant \|\hat{x}\|$. □

Teorema 1.– El dual topológico de $D_0(I, E)$ y $(l^1[I, E'], \varepsilon)$ son isométricos.

Demostración.– i) Sea $\hat{x}' = \{x'_i \mid i \in I\} \in l^1[I, E']$. Si $\{x_i \mid i \in I\}$ pertenece a $D_0(I, E)$, puede aplicarse el Teorema 2.1 para obtener

$$\sum_{i \in J} |\langle x_i, x'_i \rangle| \leqslant \|\hat{x}\| \cdot \sup\{\sum_{i \in J} |\langle x'', x'_i \rangle| : x'' \in U''\}$$

para cada $J \in \mathscr{F}(I)$. Ahora sigue

$$\sum_{i \in J} |\langle x_i, x'_i \rangle| \leqslant \|\hat{x}\| \cdot \varepsilon(\{x'_i\}) \tag{14}$$

Luego, si se define

$$f(\hat{x}) = \sum_{i \in I} \langle x_i, x'_i \rangle,$$

f resulta ser lineal y continua.

ii) Sea f: $D_0(I, E) \to K$ lineal y continua. Para cada $i \in I$, $f \circ \sigma_i \in E'$. Si $x'_i = f \circ \sigma_i$, se tiene la igualdad

$$f(\hat{x}) = \sum_{i \in I} \langle x_i, x'_i \rangle$$

para cada $\hat{x} = \{x_i \mid i \in I\}$ que pertenece a $\Phi(I, E)$, y ésta puede extenderse por continuidad a $D_0(I, E)$. Por la continuidad de f, existe $M > 0$ tal que

$$|\sum_{i \in I} \langle x_i, x'_i \rangle| \leqslant M \cdot \|\hat{x}\|$$

para cada $\hat{x} = \{x_i \mid i \in I\}$ que pertenece a $D_0(I, E)$. Ahora haciendo uso del Corolario 2 y tomando λ_i de tal suerte que $\lambda_i \langle x_i, x'_i \rangle = |\langle x_i, x'_i \rangle|$ para cada $i \in I$, se obtiene

$$\sum_{i\in I} |\langle x_i, x_i'\rangle| \leqslant M \cdot \|\hat{x}\| \tag{15}$$

Para probar que $\{x_i' \;/\; i \in I\} \in l^1 \; [I, E']$, tomemos $x'' \in U''$; como U es $\sigma(E'', E')$-denso en U'', para cada $J \in \mathscr{F}(I)$, existe $x \in U$ tal que

$$|\langle x'' - x,\; x_i'\rangle| < 1/\mathrm{card}\,(J) \qquad (\forall\, i \in J) \tag{16}$$

Definiendo $\hat{x} = \{x_i \;/\; i \in I\}$ de modo que $x_i = x$ si $i \in J$ y $x_i = 0$ si $i \notin$ J, $\hat{x}$ pertenece a $D_0\;(I, E)$ y $\|\hat{x}\| = \|x\|$. Así que, usando (15) y (16), podemos poner

$$\sum_{i\in J} |\langle x'', x_i'\rangle| \leqslant \sum_{i\in J} |\langle x'' - x,\; x_i'\rangle| + \sum_{i\in J} |\langle x, x_i'\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \|x\| \cdot M \leqslant 1 + M$$

de donde sigue que

$$\sum_{i\in I} |\langle x'', x_i'\rangle| < +\infty$$

iii) Sigue de (14) que

$$L = \sup \{|\sum_{i\in I} \langle x_i, x_i'\rangle| : \hat{x} \;/\; \|\hat{x}\| \leqslant 1\} \leqslant \varepsilon\,(\{x_i'\})$$

para cada $\{x_i' \;/\; i \in I\} \in l^1 \; [I, E']$. Para probar que se tiene la igualdad, tomamos $x_0'' \in U''$ y probamos que

$$\sum_{i\in I} |\langle x_0'', x_i'\rangle| \leqslant L.$$

En efecto, para cada $J \in \mathscr{F}(I)$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $x \in U$ tal que

$$|\langle x_0'' - x,\; x_i'\rangle| \leqslant \varepsilon/\mathrm{Card}\,(J) \qquad (\forall\, i \in J)$$

Definiendo $\hat{x} = \{\lambda_i \cdot x \;/\; i \in I\}$ donde λ_i se toma de modo que $\lambda_i\,\langle x, x_i'\rangle = |\langle x, x_i'\rangle|$ si $i \in J$ y $\lambda_i = 0$ si $i \notin J$, obtenemos la siguiente acotación

$$\sum_{i\in J} |\langle x_0'', x_i'\rangle| \leqslant \sum_{i\in J} |\langle x_0'' - x,\; x_i'\rangle| + \sum_{i\in J} |\langle x, x_i'\rangle| <$$

$$< \varepsilon + \sum_{i\in J} \lambda_i\,\langle x, x_i'\rangle = \varepsilon + |\sum_{i\in I} \langle \lambda_i \cdot x,\; x_i'\rangle| \leqslant \varepsilon + L$$

ya que $\|\hat{x}\| \leqslant 1$. Ahora es claro que

$$\sum_{i\in J} |\langle x_0'', x_i'\rangle| \leqslant L,$$

para cada $J \in \mathscr{F}(I)$, lo que implica que $\varepsilon\,(\{x_i'\}) \leqslant L$. □

4. APLICACIONES DOMINADAS

Sea T: $E \to F$ una aplicación lineal. Si T transforma las sucesiones acotadas de E en sucesiones dominadas de F, diremos que T es una aplicación dominada.

Teorema 1.— Si I es un conjunto arbitrario de índices y T: $E \to F$ es dominada, puede definirse una aplicación

$$T_I \colon \{x_i \,/\, i \in I\} \in l^\infty (I, E) \to \{Tx_i \,/\, i \in I\} \in D\,(I, F)$$

lineal y continua.

Demostración.— Denotemos por $\mathcal{U}$ la bola unidad cerrada de $l^\infty (I, E)$ y supongamos que

$$\sup \{\lim_J \|T_I\,[\hat{x}\,(J)]\| \colon \hat{x} \in \mathcal{U}\} = +\infty$$

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\hat{x}_n \in \mathcal{U}$ tal que

$$\lim_J \|T_I\,[\hat{x}_n\;(J)]\| > n$$

Ahora podemos encontrar $J_n \in \mathcal{F}(I)$ de manera que

$$\|T_I\,[\hat{x}_n\;(J_n)]\| > n \qquad (\forall\, n \in N) \tag{17}$$

Si $\hat{x}_n = \{x_{in} \,/\, i \in I\}$, la familia numerable $\{x_{in} \,/\, n \in N,\; i \in J_n\}$ es acotada y, por tanto, $\{Tx_{in} \,/\, n \in N,\; i \in J_n\}$ es una familia dominada de F, lo que contradice (17). Entonces debe existir $M > 0$ de manera que

$$\lim_J \|T_I\,[\hat{x}\,(J)]\| \leqslant M \qquad (\forall\, \hat{x} \in \mathcal{U})$$

y se sigue del Corolario 2.1 que $T_I\,(\hat{x}) \in D\,(I, F)$ para cada $\hat{x}$ perteneciente a $\mathcal{U}$, así como que

$$\|T_I\,(\hat{x})\| \leqslant M \qquad (\forall\, \hat{x} \in \mathcal{U})$$

quedando probado el teorema. □

En particular, sigue el Teorema 1 que toda aplicación denominada es continua.

En Pietsch (1980), p. 67) se define el dual de un ideal de operadores en espacios de Banach por

$$\mathscr{A}^d\ (E,F) = \{T \in \mathscr{L}(E,F) \ / \ {}^tT \in \mathscr{A}(F',E')\}$$

y se prueba que $\mathscr{A}^d$ es un ideal de operadores.

Teorema 2.– Sean E y F espacios de Banach e I un conjunto de índices infinito. Son equivalentes las proposiciones siguientes:

i) $T \in \Pi^d\ (E,F)$.

ii) T transforma las familias acotadas de E en familias dominadas de de F y la aplicación

$$\{x_i \ / \ i \in I\} \in l^\infty (I,E) \ \to \ \{Tx_i \ / \ i \in I\} \in D\,(I,F) \tag{18}$$

es lineal y continua.

iii) T transforma las familias nulas de E en familias pertenecientes a $D_0\ (I,F)$ y la aplicación

$$\{x_i \ / \ i \in I\} \in c_0\ \{I,E\} \ \to \ \{Tx_i \ / \ i \in I\} \in D_0\ (I,F) \tag{19}$$

es lineal y continua.

Demostración.– i) $\Rightarrow$ ii). Si $\hat{x} = \{x_i \ / \ i \in I\} \in l^\infty (I,E)$, ponemos $\hat{y} = \{Tx_i \ / \ i \in I\}$, y se tiene $S_{\hat{y}} = {}^tT \cdot S_{\hat{x}}$. Por tanto, $S_{\hat{y}}$ es absolutamente sumante y sigue que $\hat{y} \in D\,(I,F)$. Por otro lado

$$\|\hat{y}\| = p\ (S_{\hat{y}}) \leqslant p\ ({}^tT) \cdot \|S_{\hat{x}}\| = p\ ({}^tT) \cdot \|\hat{x}\|_\infty$$

lo que prueba que la aplicación (18) es lineal y continua.

ii) $\Rightarrow$ iii). Denotemos por T_I la restricción a $c_0\ \{I,E\}$ de la aplicación (18). Como T_I es lineal y continua, existe $M > 0$ tal que

$$\|T_I\ (\hat{x})\| \leqslant M \cdot \|\hat{x}\|_\infty \qquad (\forall\, \hat{x} \in c_0\ \{I,E\}) \tag{20}$$

Si $\hat{x} = \{x_i \ / \ i \in I\} \in c_0\ \{I,E\}$, debemos probar que $T_I\ (\hat{x})$ pertenece a $D_0\ (I,F)$. En efecto, para cada $\varepsilon > 0$, existe $J_0 \in \mathscr{F}(I)$ tal que $\|x_i\| < \varepsilon$ si $i \notin J_0$. Si $J \supseteq J_0$, aplicando (20) a la familia $\hat{x} - \hat{x}\ (J)$, obtenemos

$$\|T_I\ (\hat{x}) - T_I\ [\hat{x}\ (J)]\| \leqslant M\ \|\hat{x} - \hat{x}\ (J)\|_\infty \leqslant M \cdot \varepsilon$$

lo que prueba que $T_I\ (\hat{x}) \in D_0\ (I,F)$.

iii) $\Rightarrow$ i). De ser lineal y continua la aplicación (19) sigue, aplicando el Teorema 3.1, que la aplicación

$$\{x'_i \ / \ i \in I\} \in l^1\ [I,F'] \ \to \ \{{}^tTx'_i \ / \ i \in I\} \in l^1\ \{I,E'\}$$

es lineal y continua. Por tanto, ${}^tT$ es absolutamente sumante. □

Corolario 1.– $l^\infty(I, E) = D(I, E)$ si y sólo si E es finitodimensional.

Demostración.– Si $l^\infty(I, E) = D(I, E)$, la identidad en E es una aplicación dominada y, por tanto, la identidad en E' es absolutamente sumante. Esto implica (Wong 1979) que E' es nuclear. □

Corolario 2.– $c_0\{I, E\} = D_0(I, E)$ si y sólo si E es finitodimensional.

Demostración.– Si $c_0\{I, E\} = D_0(I, E)$, (4) y el Teorema de la aplicación abierta, implican que la identidad de $c_0\{I, E\}$ en $D_0(I, E)$ es continua. Por tanto, la identidad en E' es absolutamente sumante.

El recíproco sigue de la inclusión $c_0(I) \otimes E \subset D_0(I, E)$ que se obtiene directamente de la Proposición 3.1 (*b*). □

5. RELACION ENTRE FAMILIAS DOMINADAS Y FAMILIAS PRENUCLEARES

En Wong (1979) se prueba que una aplicación $T \in \mathscr{L}(E, F)$ es absolutamente sumante si y sólo si ${}^tT$ aplica las familias acotadas de F' en familias prenucleares de E'. Una familia $\{x_i' \,/\, i \in I\}$ de E' se llama prenuclear si existe una medida positiva μ sobre U' tal que

$$\sup_{i \in I} |\langle x, x_i' \rangle| \leqslant \int_{U'} |\langle x, x' \rangle| \, d\mu(x') \tag{21}$$

para cada $x \in E$. Es decir, $\{x_i' \,/\, i \in I\}$ es prenuclear si y sólo si la aplicación

$$x \in E \to \{\langle x, x_i' \rangle\} \in l^\infty(I)$$

es absolutamente sumante. Se tiene la inclusión $D(I, E') \subset P(I, E')$, ya que si $\{x_i' \,/\, i \in I\} \in D(I, E')$, la aplicación

$$S: x'' \in E'' \to \{\langle x'', x_i' \rangle \,/\, i \in I\} \in l^\infty(I)$$

es absolutamente sumante, y entonces lo es también $S \circ K_E$ (K_E es la aplicación evaluación de E en E''). El estudio de la inclusión contraria no es tan fácil; hemos obtenido el siguiente:

Teorema 1.– Si E es un espacio de Banach secuencialmente denso en E'' para la topología $\sigma(E'', E')$, entonces se tiene la igualdad

$$D(I, E') = P(I, E')$$

para cada conjunto de índices I.

Demostración.– Si $\{x_i' \,/\, i \in I\}$ es prenuclear, existe una medida positiva μ sobre U' verificando (21). Para cada $x'' \in E''$, existe una sucesión $\{x_n\}$ en E tal que

$$x'' = \sigma(E'', E') - \lim_{n \to \infty} x_n \tag{22}$$

Por (21) podemos poner

$$|\langle x_n, x_i' \rangle| \leqslant \int_{U'} |\langle x_n, x' \rangle| \, \mathrm{d}\mu(x') \tag{23}$$

para cada $n \in N$ y cada $i \in I$. Ahora (22) permite aplicar el Teorema de la convergencia dominada que asegura la μ-integrabilidad de $\varphi(x') = \langle x'', x' \rangle$. Tomando límite cuando $n \to \infty$ en (23), obtenemos

$$|\langle x'', x_i' \rangle| \leqslant \int_{U'} |\langle x'', x' \rangle| \, \mathrm{d}\mu(x') \tag{24}$$

para cada $x'' \in E''$ y cada $i \in I$.

Si M denota el subespacio vectorial de $C(U''')$ formado por las funciones μ-integrables, en particular M contiene las funciones $\varphi(x''') = \langle x'', x''' \rangle$ ($x'' \in U''$ y $x''' \in U'''$, bola unidad de E'''), definimos

$$\nu(\varphi) = \int_{U'} \varphi(x') \, \mathrm{d}\mu(x') \qquad (\forall \varphi \in M)$$

ν es una forma lineal sobre M, continua para la topología inducida por $C(U''')$. Por el teorema de Hahn-Banach, ν posee una extensión a $C(U''')$ que denotamos por $\tilde{\nu}$. Si ν_0 es la medida valor absoluto de $\tilde{\nu}$, ν_0 es una medida positiva de Radon sobre U''' para la que se tiene

$$\int_{U'''} |\langle x'', x''' \rangle| \, \mathrm{d}\nu_0(x''') \geqslant \left| \int_{U'''} |\langle x'', x''' \rangle| \, \mathrm{d}\tilde{\nu}(x''') \right| =$$

$$= \int_{U'} |\langle x'', x' \rangle| \, \mathrm{d}\mu(x')$$

que junto con (24) da

$$\int_{U'''} |\langle x'', x''' \rangle| \, \mathrm{d}\nu_0(x''') \geqslant |\langle x'', x_i' \rangle|$$

para cada $x'' \in E''$ y cada $i \in I$, de donde sigue que $\{x_i' \,/\, i \in I\}$ pertenece a $D(I, E')$. □

$E = c_0$ es un espacio de Banach en las condiciones del Teorema 1. En Rosenthal (1978) se pueden encontrar once condiciones equivalentes cada una de ellas a la densidad secuencial de E en E'' para la topología $\sigma(E'', E')$, si E es un espacio de Banach separable.

En Pietsch (1966) se prueba que, si T: $E \to F$ es absolutamente sumante, también lo es ${}^{tt}T$: $E'' \to F''$. No es cierto, sin embargo, que ${}^{t}T$

deba ser absolutamente sumante. Utilizando el mencionado resultado de Pietsch, podemos establecer finalmente la siguiente caracterización dual de las aplicaciones absolutamente sumantes en espacios de Banach.

Teorema 2.— Sean E y F espacios de Banach y T: $E \to F$ una aplicación lineal y continua. Se verifican las siguientes afirmaciones:

(T) T es absolutamente sumante si y sólo si ${}^tT$ transforma sucesiones acotadas de F' en sucesiones dominadas de E'.

(T') ${}^tT$ es absolutamente sumante si y sólo si T transforma sucesiones acotadas de E en sucesiones dominadas de F.

Demostración.— Sólo se necesita probar (T).

($\Rightarrow$) Si T es absolutamente sumante, ${}^{tt}T$ también lo es y sigue del Teorema 4.2 que ${}^tT$ debe transformar sucesiones acotadas en sucesiones dominadas.

($\Leftarrow$) En este caso ${}^tT$ es una aplicación dominada y sigue del Teorema 4.1 que ${}^tT$ transforma familias acotadas de F' en familias dominadas de E'. Teorema 2.2.2 de Wong (1979) prueba que T es absolutamente sumante. □

BIBLIOGRAFIA

[1] FAN, KAY. (1951): *Maximum properties and iniqualities for the eigenvalues of completely continuous operators.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA 37, 760-766.

[2] KOTHE, G. (1979): *Topological Vector Spaces II.* Berlin: Springer-Verlag.

[3] PIETSCH, A. (1972): *Nuclear Locally Convex Spaces.* Berlin: Springer-Verlag.

[4] – – (1980): *Operator Ideals.* North-Holland. Vol 20.

[5] – – (1966): *Quasinukleare Abbildungen in normierten Räumen.* Math. Annalen 165, 76-90.

[6] ROSENTHAL, H. P. (1978): *Some recent discoveries in the isomorphic theory of Banach spaces.* Amer. Math. Soc. 84. Nº 5.

[7] WONG, YAU-CHUEN. (1979): *Schwartz Spaces, Nuclear Spaces and Tensor Products.* Lecture Notes in Mathematics 726. Berlin: Springer-Verlag.

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla