Regularización de sucesiones

Por BALTASAR RODRIGUEZ-SALINAS

Recibido: 7 marzo 1986

Abstract

The exponential regularization of sequences enabled Mandelborjt [2] to solve the problem of the problem of the analiticity of a class of infinitely often differentiable functions proposed by Carleman in 1926. By the same methods H. Cartan and Mandelbrojt [1] were able to gibe a complete solution of the more general problem (also proposed by Carleman) of inclusion of a class of infinitely often differentiable functions into another, and then the problem of equivalence of two classes on a finite interval. In order to treat the same problem on the line or on a half-line it suffices the classic convex regularization or some simple variant. We have announced in [3] a similar solution of the problem of equivalence of classes of functions with asymptotic expansion for a subset of the complex plane. This problem leads to a regularization of sequences that we shall study here. It provides also an explanation of the occurence of the Mandelbrojt's exponential regularization, which is a particular case.

Resumen

La regularización exponencial de sucesiones le permitió a Mandelbrojt [2] resolver el problema de analiticidad de una clase de funciones indefinidamente derivables propuesto por Carleman en 1926. Esta misma regularización exponencial les permitió a H. Cartan y a Mandelbrojt [1] dar una solución completa del problema más general, también propuesto por Carleman, de inclusión de una clase de funciones indefinidamente derivables en otra y como consecuencia la equivalencia de dos clases para un intervalo finito. Para tratar el mismo problema sobre la recta o sobre una semi-recta es suficiente la clásica regularización convexa o de una sencilla variante. Nosotros hemos anunciado en [3] una solución análoga del problema de equivalencia de clases de funciones con desarrollo asintótico para un conjunto del plano complejo. Este problema conduce a una regularización de sucesiones que vamos a estudiar aquí y que explica la aparición de la regularización exponencial de Mandelbrojt, contenida como caso particular.

Definición 1.— Dada una función $f(r)$ no decreciente, cóncava y derivable en el intervalo $[1, +\infty)$ y una sucesión (μ_n) de números reales construimos la sucesión (μ_n^*) poniendo

$$s(r) = \sup \{nf(\frac{r}{n}) - \mu_n :\ n \leqslant r\} \tag{1.1}$$

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por la ayuda n$^{\text{o}}$ 0338/84 de la CAICYT.

para $r \geqslant 1$ y

$$\mu_n^* = \sup \{nf(\frac{r}{n}) - s(r): \; r \geqslant n\} \tag{1.2}$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Esta sucesión (μ_n^*) diremos que es la *regularizada* de (μ_n) mediante $f(r)$.

En particular, para $f(r) = \alpha \log r$ se puede construir la regularizada (μ_n^*) a través de la regularizada exponencial poniendo

$$\overline{\mu}_n = n \log n + \frac{\mu_n}{\alpha} \qquad (\alpha > 0), \tag{1.3.1}$$

$$\overline{s}(t) = \frac{s(t)}{\alpha} = \sup \{nt - \overline{\mu}_n: \; n \leqslant e^t\} \tag{1.3.2}$$

$$\overline{\mu}_n^* = \sup \{nt - \overline{s}(t): \; t \geqslant \log n\} \tag{1.3.3}$$

y

$$\mu_n^* = \alpha (\overline{\mu}_n^* - n \log n) \tag{1.3.4}$$

En nuestras aplicaciones tomaremos $f(r) = \log \varphi_a(r)$ para la función $\varphi_a(r)$ definida en [4].

Otra regularización que utilizaremos, cuando $f(r)$ es una función no decreciente, cóncava y derivable en el intervalo $(0, +\infty)$, es la definida por

$$s(r) = \sup \{nf(\frac{r}{n}) - \mu_n: \; n \in \mathbb{N}\} \tag{1.1$'$}$$

para $r > 0$ y

$$\mu_n^* = \sup \{nf(\frac{r}{n}) - s(r): \; r > 0\} \tag{1.2$'$}$$

Como las propiedades de esta regularización son más sencillas que la definida anteriormente, con la novedad de que $s(r)$ puede tomar valores infinitos, nos limitaremos a estudiar aquélla.

Proposición 2.— $s(r)$ es una función no decreciente de $r \geqslant 1$.

Demostración.— Resulta fácilmente teniendo en cuenta que $f(r)$ es no decreciente.

Definición 3.— Sean $\underline{n} = \underline{n}(r)$ y $\overline{n} = \overline{n}(r)$ los enteros, no superiores a r, determinados por

$$s(r) = nf(\frac{r}{n}) - \mu_n \qquad \text{para } n = \underline{n} \text{ y } n = \overline{n} \tag{3.1}$$

y

$$s\,(r) > nf\,(\frac{r}{n}) - \mu_n \qquad \text{para} \quad n < \underline{n} \quad \text{y} \quad n > \overline{n}. \tag{3.2}$$

Evidentemente,

$$\underline{n}\,(r) \leqslant \overline{n}\,(r) \qquad (\leqslant r). \tag{3.3}$$

Si $\underline{n}\,(r) = \overline{n}\,(r)$ designaremos este valor común por $n\,(r)$.

Proposición 4.–

1. $s\,(r+0) = s\,(r)$ *para todo* $r \geqslant 1$ *y* $s\,(r-0) \leqslant s\,(r)$ *para todo* $r > 1$, *siendo* $s\,(r-0) < s\,(r)$ *si y sólo si* $\underline{n}\,(r) = \overline{n}\,(r) = r$.
2. $s\,(r)$ *tiene derivada a la derecha* $s^+\,(r)$ *en todo punto* $r \geqslant 1$ *y derivada a la izquierda* $s^-\,(r)$ *en un punto* $r > 1$ *si* $s\,(r-0) = s\,(r)$, *siendo*

$$s^-\,(r) \geqslant s^+\,(r).$$

Demostración.– Sea $\underline{n}\,(r_0) = \overline{n}\,(r_0) < r_0$. Entonces por la continuidad de $f\,(r)$ existe un número $\delta = \delta\,(r_0)$ tal que

$$s\,(r) = nf\,(\frac{r}{n}) - \mu_n$$

para $n = n\,(r_0)$ y $|r - r_0| < \delta$ y

$$s\,(r) > nf\,(\frac{r}{n}) - \mu_n \qquad (n \leqslant r)$$

para $n \neq n\,(r_0)$ y $|r - r_0| < \delta$. Por tanto,

$$n\,(r_0 - 0) = n\,(r_0) = n\,(r_0 + 0) \tag{4.1}$$

y

$$s'\,(r_0) = f'\,(\frac{r_0}{n})$$

para $n = n\,(r_0)$.

Sea $\underline{n}\,(r_0) = \overline{n}\,(r_0) = r_0$. Entonces, como antes, existe un número $\delta = \delta\,(r_0) > 0$ tal que

$$s\,(r) = nf\,(\frac{r}{n}) - \mu_n$$

para $n = n\,(r_0)$ y $0 \leqslant r - r_0 < \delta$, y

$$s\,(r) > nf\,(\frac{n}{r}) - \mu_n \qquad (n \leqslant r)$$

para $n \neq n\,(r_0)$ y $0 \leqslant r - r_0 < \delta$. Luego

$$n\,(r_0 + 0) = n\,(r_0)$$

y

$$s^+\,(r_0) = f'\,(\frac{r_0}{n})$$

para $n = n\,(r_0)$.

A la izquierda de r_0 pasan las cosas de manera muy distinta puesto que siendo $\bar{n}\,(r_0 - \varepsilon) \leqslant r_0 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ y r_0 entero, tendremos

$$\bar{n}\,(r_0 - 0) \leqslant n\,(r_0) - 1$$

y, por tanto,

$$s\,(r_0 - 0) < s\,(r_0).$$

En resumen, en este caso resulta

$$\bar{n}\,(r_0 - 0) < n\,(r_0) = n\,(r_0 + 0) \tag{4.3}$$

y

$$s\,(r_0 - 0) < s\,(r_0) \quad \text{y} \quad s^+\,(r_0) = f'\,(\frac{r_0}{n}) \tag{4.4}$$

para $n = n\,(r_0)$.

Finalmente, sea $\underline{n}\,(r_0) < \bar{n}\,(r_0) \leqslant r_0$. Entonces, de igual forma que antes, se puede encontrar un número $\delta = \delta\,(r_0) > 0$ de modo que

$$s\,(r) > nf\,(\frac{r}{n}) - \mu_n$$

para $|r - r_0| < \delta$ y todo entero $n \leqslant r$ para el que se verifique

$$s\,(r_0) > nf\,(\frac{r_0}{n}) - \mu_n.$$

Como por otra parte, si $n' < n''$ y

$$g\,(r) = n''f\,(\frac{r}{n''}) - \mu_{n''} - [n'f\,(\frac{r}{n'}) - \mu_{n'}] \qquad (r \geqslant n''),$$

resulta

$$g'\,(r) = f'\,(\frac{r}{n''}) - f'\,(\frac{r}{n'}) \geqslant 0$$

por ser $f\,(r)$ una función cóncava, se deduce

$$g\,(r)\,(r - r_0) \geqslant 0$$

si $g\,(r_0) = 0$ y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} &\underline{n}\,(r_0 - 0) = \underline{n}\,(r_0) \leqslant \bar{n}\,(r_0 - 0) \leqslant \\ &\leqslant \underline{n}\,(r_0 + 0) \leqslant \bar{n}\,(r_0) = \bar{n}\,(r_0 + 0) \end{aligned} \tag{4.5}$$

y

$$s(r) = n'f\left(\frac{r}{n'}\right) - \mu_{n'} \quad \text{ó} \quad s(r) = n''f\left(\frac{r}{n''}\right) - \mu_{n''}$$

para $n' = \underline{n}(r_0)$, $n'' = \overline{n}(r_0)$ y $|r - r_0|$ suficientemente pequeño, según sea $r_0 - r \geqslant 0$ ó $r - r_0 \geqslant 0$. Por tanto,

$$s^-(r_0) = f'\left(\frac{r_0}{n'}\right) \quad \text{y} \quad s^+(r_0) = f'\left(\frac{r_0}{n''}\right) \tag{4.6}$$

para $n' = \underline{n}(r_0)$ y $n'' = \overline{n}(r_0)$.

En el caso que $f(r)$ no tenga trozos lineales se puede sustituir (4.5) por

$$n(r_0 - 0) = \underline{n}(r_0) < \overline{n}(r_0) = n(r_0 + 0). \tag{4.5$'$}$$

Por sencillez, de aquí en adelante, supondremos que $f(r)$ no tiene trozos lineales.

Proposición 5.– $\underline{n}(r)$ y $\overline{n}(r)$ son funciones no decrecientes de $r \geqslant 1$, la primera de ellas continua a la derecha en todo punto $r \geqslant 1$ y la segunda continua a la izquierda en cada punto $r > 1$ de continuidad de $s(r)$.

Demostración.– Basta tener en cuenta que, según (4.1), (4.3) y (4.5), se tiene

$$\overline{n}(r - 0) \leqslant \overline{n}(r) = \overline{n}(r + 0)$$

y

$$\underline{n}(r - 0) \leqslant \underline{n}(r) \leqslant \underline{n}(r + 0)$$

para todo $r \geqslant 1$ y que

$$\underline{n}(r - 0) = \underline{n}(r)$$

para todo punto $r > 1$ de continuidad de $s(r)$.

Lema 6.– Si $s(r)$ es continua en $I = [r', r'')$ y

$$g_n(r) = nf\left(\frac{r}{n}\right) - s(r) \qquad (r' \geqslant n)$$

resulta que $g_n(r)$ es no creciente en I si $\overline{n}(r') \geqslant n$ y $g_n(r)$ es no decreciente en I si $\underline{n}(r'' - 0) \leqslant n$.

Demostración.– En efecto, si $\overline{n}(r') \geqslant n$ es

$$g_n^+(r) = f'\left(\frac{r}{n}\right) - s^+(r) = f'\left(\frac{r}{n}\right) - f'\left(\frac{r}{n''}\right) \leqslant 0$$

para $n'' = \overline{n}(r)$ y $r \in I$ puesto que $f'(r)$ es no creciente y $n'' = \overline{n}(r) \geqslant \overline{n}(r') \geqslant n$.

Análogamente, si $\underline{n}\,(r'' - 0) \leqslant n$ resulta

$$g_n^-\,(r) = f'\,(\frac{r}{n}) - s^-\,(r) = f'\,(\frac{r}{n}) - f'\,(\frac{r}{n'}) \geqslant 0$$

para $n' = \underline{n}\,(r)$ $(\leqslant n)$ y $r' < r < r''$ y, por consiguiente, que $g_n\,(r)$ es no decreciente en I.

Proposición 7.– Para cada entero positivo $n \leqslant \lim\limits_{r \to \infty} \overline{n}\,(r)$ *existe un punto* $r_n \geqslant n$ *que satisface*

$$\underline{n}\,(r_n - 0) \leqslant n \leqslant \overline{n}\,(r_n) \tag{7.1}$$

y

$$\mu_n^* = nf\,(\frac{r_n}{n}) - s\,(r_n - 0) \tag{7.2.1}$$

para $r_n > n$ *y*

$$\mu_n^* = nf\,(\frac{r_n}{n}) - s\,(r_n) \tag{7.2.2}$$

para $r_n = n$.

Si $n > \lim\limits_{r \to \infty} \overline{n}\,(r)$ *se verifica*

$$\mu_n^* = \lim_{r \to \infty} [nf\,(\frac{r}{n}) - s\,(r)]. \tag{7.3}$$

Demostración.– Siendo $\overline{n}\,(r)$ una función no decreciente y continua a la derecha, el conjunto

$$I^* = \{r\!: \ \overline{n}\,(r) \geqslant n\}$$

es un intervalo $[r_n, +\infty)$ con $n \leqslant r_n \leqslant +\infty$. En este intervalo I^* la función

$$g_n\,(r) = nf\,(\frac{r}{n}) - s\,(r)$$

es no creciente por ser, según el lema 6, no creciente en cada intervalo $[r', r'') \subset I$ donde sea $s\,(r)$ continua y ser

$$g_n\,(r - 0) = nf\,(\frac{r}{n}) - s\,(r - 0) > nf\,(\frac{r}{n}) - s\,(r) = g_n\,(r)$$

en cada punto de discontinuidad de $s\,(r)$.

Vamos a ver que este punto r_n satisface las condiciones (7.1) y (7.2) si $r_n \neq +\infty$ ó lo que es igual si $n \leqslant \lim\limits_{r \to \infty} \overline{n}\,(r)$. En efecto, siendo

$$\overline{n}\,(r) < n \leqslant r$$

para cada punto r perteneciente a $I=[n, r_n)$, $s(r)$ es una función continua en I. Entonces, por la definición de r_n se deduce que

$$\underline{n}(r_n - 0) < n$$

si $n < r_n < +\infty$ y, por tanto, según el lema 6 que $g_n(r)$ es no decreciente en I. De aquí resultan (7.1), (7.2.1) y (7.2.2) para $n \leqslant \lim\limits_{r \to \infty} \overline{n}(r)$ teniendo en cuenta que para $r_n = n$ es $\underline{n}(r_n - 0) \leqslant r_n = n$.

Una pequeña modificación del razonamiento precedente permite demostrar también (7.3) para $n > \lim\limits_{r \to \infty} \overline{n}(r)$.

Proposición 8.— Los conjuntos de valores de las tres funciones $\underline{n}(r)$, $\overline{n}(r)$ *y* $n(r)$ *son idénticos. Además este conjunto es infinito si*

$$\lim_{r \to \infty} [f(r) - rf'(r)] = +\infty. \tag{8.1}$$

Demostración.— La primera afirmación se sigue inmediatamente de (4.1), (4.3) y (4.5)'. Para probar la segunda supongamos que fuese dicho conjunto finito, entonces sería

$$\lim_{r \to \infty} \overline{n}(r) = n < +\infty$$

y

$$nf\left(\frac{r}{n}\right) - \mu_n > mf\left(\frac{r}{m}\right) - \mu_m$$

para $m > n$ y r suficientemente grande: $r \geqslant r_0$. Pero de aquí se llega a una contradicción puesto que por el teorema de los incrementos finitos se verifica

$$\mu_m - \mu_n \geqslant mf\left(\frac{r}{m}\right) - nf\left(\frac{r}{n}\right) = (m-n)\left[f\left(\frac{r}{x}\right) - \frac{r}{x} f'\left(\frac{r}{x}\right)\right]$$

para un $x = x(r) \in (n, m)$ y $r \geqslant r_0$, y

$$\lim_{r \to \infty} \left[f\left(\frac{r}{x}\right) - \frac{r}{x} f'\left(\frac{r}{x}\right)\right] = +\infty$$

por ser

$$\lim_{r \to \infty} \frac{r}{x} \geqslant \lim_{r \to \infty} \frac{r}{m} = +\infty.$$

Llamaremos *sucesión de índices principales de la regularización* de (μ_n) por $f(r)$ a la sucesión (n_k) formada por los valores de $n(r)$ y supondremos que dicha sucesión es infinita y creciente.

Proposición 9.— Sea (n_k) *la sucesión de índices principales de la regularización de* (μ_n) *por* $f(r)$, *entonces se tiene:*

1.
$$\mu_n^* \leqslant \mu_n \tag{9.1}$$
para todo n y
$$\mu_n^* = \mu_n \tag{9.2}$$
para $n = n_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

2.
$$\mu_n^* = \mu_{n_k} + nf\left(\frac{r_n}{n}\right) - n_k f\left(\frac{r_n}{n_k}\right) \tag{9.3}$$
para $n_k < n < n_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

3.
$$\mu_{n_{k+1}} \leqslant \mu_{n_k} + n_{k+1} f\left(\frac{r_n}{n_{k+1}}\right) - n_k f\left(\frac{r_n}{n_k}\right). \tag{9.4}$$

En todo esto, r_n *tiene el significado de la proposición 7.*

Demostración.– 1. En efecto, siendo
$$s(r) \geqslant nf\left(\frac{r}{n}\right) - \mu_n$$
para $r \geqslant n$, tendremos
$$\mu_n^* = \sup \left\{nf\left(\frac{r}{n}\right) - s(r) \colon r \geqslant n\right\} \leqslant \mu_n.$$

Por otra parte, si $n = n_k$, por la definición de n_k existe un punto $r \geqslant n_k$ que satisface $n(r) = n_k$ y, por tanto,
$$\mu_n^* \geqslant nf\left(\frac{r}{n}\right) - s(r) = \mu_n.$$

2. Como $\overline{n}(r') \leqslant \underline{n}(r'')$ para $r' < r''$ y por la proposición 7 existe un punto $r_n \geqslant n$ tal que
$$\underline{n}(r_n - 0) \leqslant n \leqslant \overline{n}(r_n),$$
tendremos
$$n_k = \underline{n}(r_n - 0), \qquad n_{k+1} = \overline{n}(r_n)$$
y
$$n < n_{k+1} \leqslant r_n.$$

De esto resulta
$$\mu_n^* = nf\left(\frac{r_n}{n}\right) - s(r_n - 0) = \mu_{n_k} + nf\left(\frac{r_n}{n}\right) - n_k f\left(\frac{r_n}{n_k}\right).$$

3. Siendo
$$s(r_n - 0) = n_k f\left(\frac{r_n}{n_k}\right) - \mu_{n_k} \leqslant s(r_n) = n_{k+1} f\left(\frac{r_n}{n_{k+1}}\right) - \mu_{n_{k+1}},$$
se deduce (9.4).

Proposición 10.— Con las notaciones de la proposición 7, para todo $a \geqslant 1$ *existe un número real* c *tal que, si*

$$\liminf \frac{\mu^*_{n_i}}{n_i} \geqslant c, \tag{10.1}$$

se tiene

$$\liminf \frac{r_{n_i}}{n_i} \geqslant a. \tag{10.2}$$

Demostración.— En efecto, siendo

$$f\left(\frac{r_n}{n}\right) \geqslant \frac{\mu^*_n}{n} + \frac{s\,(1)}{n}\,,$$

basta tomar $c = f\,(a)$.

Es fácil probar que para $\mu_n = an + b$ se tiene $\mu^*_n = an + b$. Esto se puede completar así:

Proposición 11.— Si

$$0 < \liminf rf'\,(r) \leqslant \limsup rf'\,(r) < +\infty \tag{11.1}$$

para $r \to +\infty$ *y*

$$\tilde{\mu}_n = \mu_n - cn \leqslant \mu_n \tag{11.2}$$

de forma que

$$\liminf \frac{\mu_n}{n} > -\infty, \tag{11.3}$$

se tiene

$$\mu^*_n - c'n \leqslant \tilde{\mu}^*_n \leqslant \mu^*_n \tag{11.4}$$

para un cierto número real c'.

Demostración.— En primer lugar en virtud de (11.1) podemos hallar un $a \geqslant 1$ de modo que

$$f\,(ar) - f\,(r) \geqslant c$$

para $r \geqslant 1$, y después $d \geqslant c$ de forma que

$$f\,(ar) - f\,(r) \leqslant d$$

para $r \geqslant 1$.

Entonces tendremos

$$\tilde{s}\,(r) = \sup\ \{nf\left(\frac{r}{n}\right) + cn - \mu_n\colon\ n \leqslant r\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup \{nf(\frac{ar}{n}) - \mu_n\colon\ n \leqslant ar\} = s\,(ar) \leqslant kr$$

para todo $r \geqslant 1$ y k suficientemente grande, puesto que por (11.3) existe un $k_0 \geqslant 0$ tal que

$$\mu_n \geqslant -k_0 n$$

y, por tanto, $s\,(ar) \leqslant kr$ para todo $r \geqslant 1$ y un cierto número $k \geqslant 0$.

Por consiguiente,

$$\tilde{\mu}_n^* = \sup \{nf(\frac{r}{n}) - \tilde{s}\,(r)\colon\ r \geqslant n\} \geqslant$$

$$\geqslant \sup \{nf(\frac{r}{n}) - s\,(ar)\colon\ r \geqslant n\} \geqslant$$

$$\geqslant -\mathrm{dn} + \sup \{nf(\frac{ar}{n}) - s\,(ar)\colon\ r \geqslant n\} \geqslant -c'n + \mu_n^*$$

para $c' \geqslant d$ suficientemente grande porque

$$\sup \{nf(\frac{ar}{n}) - s\,(ar)\colon\ r \leqslant n \leqslant ar\} \leqslant$$

$$\leqslant nf(a) - s\,(1) + kn - s\,(an) \leqslant$$

$$\leqslant kn - s\,(1) + \sup \{nf(\frac{ar}{n}) - s\,(ar)\colon\ r \geqslant n\}$$

y, por tanto, se puede tomar

$$c' = d + k + |s\,(1)|.$$

Finalmente, es obvio que

$$\tilde{\mu}_n^* \leqslant \mu_n^*.$$

Observación 12.– El estudio de la regularización definida por (1.1)′ y (1.2)′ se puede efectuar teniendo en cuenta que, para

$$s_a\,(r) = \sup \{nf(\frac{r}{n}) - \mu_n\colon\ r \geqslant an\} \quad (a > 0), \tag{12.1}$$

resulta

$$s\,(r) = \lim_{a \to 0} s_a\,(r). \tag{12.2}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] CARTAN, H. y S. MANDELBROJT: *Solution du problème d'équivalence des classes de foctions indéfiniment dérivables.* Acta Math., *72* (1940), 31.

[2] MANDELBROJT, S.: *Séries adhérentes. Regularisation des suites. Applications.* París, Gauthier-Villars, 1952.

[3] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *Solución del problema de equivalencia de clases de funciones con desarrollo asintótico.* Rev. Acad. Ciencias de Zaragoza, Ser. *16* (1961), 47-51.

[4] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *Funciones asociadas a un conjunto del plano complejo.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid 81 (1987), 9-21.

[5] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *Influencia de la frontera en la representación conforme.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid 81 (1987), 23-35.

[6] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *Desigualdades para las derivadas de un polinomio.* Rev. R. Acad. Ci. Madrid (aparecerá).

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid