Relación entre las medidas de Radon fuertemente regulares y las medidas σ-finitas

Por A. Balbás de la Corte

Recibido: 5 diciembre 1984

Presentado por el académico numerario D. Enrique Linés

Abstract

The object of this paper is to give sufficients conditions for a Radon measure of type $(\mathcal{H})$ to be σ-finite.

En este trabajo nos proponemos dar condiciones suficientes para que una medida de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ sea σ-finita. El interés de esta cuestión, radica en que muchas de las propiedades válidas para medidas finitas, siguen siendo ciertas en el caso σ-finito.

A lo largo de todo el trabajo, E será un espacio topológico (no necesariamente separado), y $(\mathcal{H})$ será una clase de cerrados de E, que por comodidad, supondremos estable para las uniones finitas (esto último no supone en realidad ninguna restricción). β representará la σ-álgebra de Borel de E, y una medida μ sobre β, diremos que es una medida de Radon de tipo $(\mathcal{H})$, cuando cumpla las condiciones que se dan en la definición 68 de [5].

Todas las notaciones y propiedades de las medidas de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ no especificadas en este trabajo, se pueden encontrar en [5].

Por el teorema 80 de [5], si $\mu \in M(E, \mathcal{H})$ (donde $M(E, \mathcal{H})$ representa el conjunto de todas las medidas de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ sobre E), μ es localmente σ-finita si y sólo si admite un concassage, es decir, existe una familia localmente contable $(F_i)_{i \in I}$, formada por conjuntos cerrados disjuntos, y tales que

$$0 < \mu(F_i) < +\infty \quad \forall i \in I$$

$$\mu^{\cdot}(E - \bigcup_{i \in I} F_i) = 0,$$

siendo además

$$\text{Sop } \mu_{F_i} = F_i \quad \forall i \in I$$

Representaremos por $\mathcal{M}$ la σ-álgebra de los conjuntos M contenidos en E, que son $\mu^{\cdot}$-medibles, y por el teorema 73 de [5] se sabe que $\mathcal{M}$ contiene a β.

Usaremos repetidamente las siguientes propiedades que no demostraremos por considerar que son conocidas:

Sea μ una medida de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ sobre E localmente σ-finita, y sea $(F_i)_{i\in I}$ un concassage de μ. Entonces:

0.1. *Si $M \in \mathcal{M}$ es tal que $\mu^{\cdot}(M) < +\infty$, existe $I_0 \subset I$ contable y tal que*

$$\mu^{\cdot}(M \cap F_i) = 0 \qquad \forall\, i \notin I_0$$

$$\mu^{\cdot}(M) = \sum_{i\in I_0} \mu^{\cdot}(M \cap F_i) = \sum_{i\in I} \mu^{\cdot}(M \cap F_i)$$

0.2. *μ es σ-finita, si y sólo si, I es contable.*

0.3. *Si $S \subset E$, entonces S está en $\mathcal{M}$ si y sólo si $S \cap F_i \in \mathcal{M}\ \forall\, i \in I$.*

1. **Definición.**– Diremos que $\mu \in M(E, \mathcal{H})$ es *regular*, si

$$\mu(B) = \operatorname{Inf}\{\mu(G): \quad \mathcal{G} \ni G \supset B\} \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}$$

donde $\mathcal{G}$ representa la clase de los conjuntos abiertos de E.
Diremos que $\mu \in M(E, \mathcal{H})$ es *fuertemente regular*, si

$$\mu^{\cdot}(M) = \operatorname{Inf}\{\mu(G): \quad \mathcal{G} \ni G \supset M\} \qquad \forall\, M \in \mathcal{M}$$

Obsérvese que la definición de medida regular que hemos dado equivale a que μ sea simultáneamente medida de Radon de tipo $(\mathcal{H})$, y medida de Radon estricta de tipo $(\mathcal{H})$. Este último concepto se puede encontrar definido en [4].

2. **Definición.**– Diremos que $\mu \in M(E, \mathcal{H})$ es *difusa*, si para cada $x \in E$.

$$\mu^{\cdot}(\{x\}) = 0$$

En consecuencia, si μ es difusa, $\{x\} \in \mathcal{M}$ para todo x de E.

3. **Lema.**– *Sea $\mu \in M(E, \mathcal{H})$ localmente σ-finita, y fuertemente regular. Sea $(F_i)_{i\in I}$ un concassage de μ entonces, el conjunto*

$$I_0 = \{i \in I: \ \exists\, S_i \subset F_i \quad \text{con} \quad S_i \neq \phi \quad \text{y} \quad \mu^{\cdot}(S_i) = 0\}$$

es contable.

Demostración.– Para cada $i \in I_0$ consideremos S_i satisfaciendo las condiciones del enunciado. Sea

$$S = \bigcup_{i \in I_0} S_i$$

Por 0.3, se tiene que $S \in \mathcal{M}$ y por 0.1, es $\mu^{\bullet}(S) = 0$.

Supongamos que I_0 no es contable. Sea G un abierto de E que contiene a S. Para cada $i \in I_0$,

$$G \cap F_i \supset S_i \neq \phi,$$

y por ser

$$\text{Sop}\ \mu_{F_i} = F_i \qquad \forall\, i \in I,$$

resulta

$$\mu\,(G \cap F_i) > 0 \qquad \forall\, i \in I_0.$$

De ser I_0 no contable, y de 0.1, se deduce por tanto que

$$\mu\,(G) = +\infty.$$

Por consiguiente, de ser μ fuertemente regular, podemos deducir que

$$\mu^{\bullet}(S) = +\infty$$

y estamos en contradicción.

4. **Teorema.**– *Sea* $\mu \in M\,(E, \mathcal{H})$ *localmente* σ*-finita y fuertemente regular. Sea* $(F_i)_{i \in I}$ *un concassage de* μ*. Entonces, si para cada i de I, existe* $S_i \subset F_i$ *tal que* $\mu^{\bullet}(S_i) = 0$, μ *es* σ*-finita.*

Demostración.– Naturalmente, extamos suponiendo los S_i no vacíos. Si I_0 es el del lema anterior, resulta de la hipótesis del teorema que $I = I_0$, y por tanto I es contable. Por 0.2, μ es σ-finita.

5. **Corolario.**– *Sea* $\mu \in M\,(E, \mathcal{H})$ *localmente* σ*-finita, fuertemente regular, y difusa. Entonces* μ *es* σ*-finita.*

Demostración.– Resulta inmediatamente del teorema anterior.

6. **Corolario.**– *Sea* $\mu \in M\,(E, \mathcal{H})$ *localmente* σ*-finita, fuertemente regular, y no atómica. Si E satisface el axioma de separación* T_1*, entonces* μ *es* σ*-finita.*

Demostración.– Cada $\{x\} \subset E$ es un conjunto de Borel de E. de ser μ no atómica, se deduce que $\mu(\{x\}) = 0$, y por tanto μ es difusa.

7. **Corolario.**– *Sea $\mu \in M(E, \mathcal{H})$ localmente σ-finita, fuertemente regular, y no atómica. Si cada $H \in \mathcal{H}$ es compacto, entonces μ es σ-finita.*

Demostración.– Sea $(F_i)_{i \in I}$ un concassage de μ. Para cada $i \in I$ se tiene

$$\mu(F_i) > 0$$

y por ser μ no atómica, existirá $B_i \in \mathcal{B}$ con $B_i \subset F_i$ y tal que

$$0 < \mu(B_i) < \frac{\mu(F_i)}{2}$$

de ser

$$\mu(B_i) = \operatorname{Sup}\{\mu(H) \colon B \supset H \in \mathcal{H}\}$$

se deduce que existe $H_i \subset B_i$ de $\mathcal{H}$ y tal que

$$0 < \mu(H_i) < \frac{\mu(F_i)}{2}$$

Nótese por H_i^1 el H_i anterior. Mediante un razonamiento similar, se puede probar que existe una familia H_i^2 contenida en $\mathcal{H}$ y tal que

$$H_i^2 \subset H_i^1 \qquad \forall i \in I$$

y además

$$0 < \mu(H_i^2) < \frac{\mu(H_i^1)}{2} < \frac{\mu(H_i^0)}{4}$$

donde $H_i^0 = F_i$ para $i \in I$.

Procediendo por inducción, se obtiene una sucesión decreciente $(H_i^n)_{n \in N}$ que depende de i, y tal que cada $H_i^n \in \mathcal{H}$ y

$$0 < \mu(H_i^n) < \frac{\mu(F_i)}{2^n}$$

Sea

$$S_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_i^n \qquad \forall i \in I$$

Evidentemente, S_i es no vacío cualquiera que sea $i \in I$, ya que es intersección de una familia de compactos que por ser decreciente, verifica la propiedad de la intersección finita. Además, es claro que

$$\mu(S_i) = 0 \qquad \forall i \in I.$$

Del teorema 4 resulta que μ es σ-finita.

Hasta ahora hemos estudiado condiciones que garanticen que una medida de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ fuertemente regular sea σ-finita. El problema inverso, es decir, encontrar condiciones que impliquen que una medida σ-finita es fuertemente regular, queda resuelto en la siguiente proposición.

8. Proposición.– *Sea* $\mu \in M(E, \mathcal{H})$ *σ-finita. Los siguientes apartados son equivalentes:*

8.1. μ *es moderada (es decir, existe una sucesión de abiertos de E,* $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *tales que*

$$E = \bigcup_{n \in N} G_n$$

y cada G_n *tiene medida* μ *finita).*

8.2. μ *es fuertemente regular.*

Demostración.– Supongamos que μ es moderada, y sea $(G_n)_{n \in N}$ una sucesión de abiertos E satisfaciendo las condiciones de 8.1. Sea $M \in \mathcal{M}$. Probaremos la igualdad

$$\mu^{\cdot}(M) = \operatorname{Inf}\{\mu(G): \quad \mathcal{G} \ni G \supset M\} \tag{8.1}$$

$$G_n - M \in \mathcal{M} \qquad \forall\, n \in N$$

y en consecuencia

$$\mu^{\cdot}(G_n - M) = \operatorname{Sup}\{\mu(H): \ \mathcal{H} \ni H \subset G_n - M\}$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $H \in \mathcal{H}$ con $H \subset G_n - M$ y

$$\mu^{\cdot}(G_n - M) \leqslant \mu(H) + \varepsilon$$

De ser $G_n - H \supset G_n \cap M$ y $G_n - H \in \mathcal{G}$, y de

$$\mu(G_n - H) = \mu(G_n) - \mu(H) = \mu^{\cdot}(G_n \cap M) + \mu^{\cdot}(G_n - M) - \mu(H) \leqslant$$

$$\leqslant \mu^{\cdot}(G_n \cap M) + \varepsilon$$

se obtiene haciendo ε tender a cero

$$\mu^{\cdot}(G_n \cap M) = \operatorname{Inf}\{\mu(G): \quad \mathcal{G} \ni G, \quad G_n \supset G \supset G_n \cap M\}$$

Luego para cada $\varepsilon > 0$ y cada $n \in N$ existe $G_n' \in \mathcal{G}$ con $G_n \supset G_n' \supset$ $\supset G_n \cap M$ y tal que

$$\mu(G_n') \leqslant \mu^{\cdot}(G_n \cap M) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Sea

$$G' = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n'$$

Se tiene que $G' \in \mathfrak{G}$ y

$$G' \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \cap M) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) \cap M = E \cap M = M$$

Además

$$\mu(G') \leqslant \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n') \leqslant$$

$$\leqslant \mu^{\cdot}((\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n') - (\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \cap M))) + \mu^{\cdot}(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \cap M)) \leqslant$$

$$\leqslant \mu^{\cdot}(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n' - (G_n \cap M))) + \mu^{\cdot}(M) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{\cdot}(G_n' - (G_n \cap M)) + \mu^{\cdot}(M) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} + \mu^{\cdot}(M) \leqslant \varepsilon + \mu^{\cdot}(M)$$

Haciendo ε tender a cero, se tiene (8.1).

La implicación en sentido contrario es inmediata.

BIBLIOGRAFIA

[1] GARDNER Y PFEFFER.: *Are diffused regular Radon measures σ-finites?* J. London Math. Soc. (2) 20 (1979) 485-494.

[2] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *Teoría de la medida sobre los espacios topológicos no localmente compactos.* Rev. Mat. Hisp. Amer. 33 (1973) 257-274.

[3] —— Y JIMENEZ GUERRA, P.: *Strictly localizable measures.* Nagoya J. Math. 85 (1982) 81-86.

[4] ——: *Teorema de Fubini en espacios topológicos arbitrarios.* R. Acad. Ci. Madrid 76 (1982).

[5] ——: *Medidas de Radon de tipo ($\mathcal{H}$) en espacios topológicos arbitrarios.* Memorias de la R. Acad. Ci. Madrid (1979).

[6] SCHWARTZ, L.: *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures.* Oxford University Press (1973).