Una nota sobre espacios hiperplano-Baire

POR JOSE L. HUESO Y JOAQUIN MOTOS

Recibido: 7 noviembre 1984

Presentado por el académico numerario D. Manual Valdivia

Abstract

In this note we prove that if X is a P-space and $E\ [\mathcal{J}]$ is a Baire-hyperplane space, then $C\ (X, E)$ $[\mathcal{J}_s]$ is Baire-hyperplane.

Sea X un espacio topológico completamente regular y $E\ [\mathcal{C}]$ un espacio localmente convexo. $C\ (X, E)$ es el espacio de las funciones continuas de X en $E\ [\mathcal{C}]$. Denotamos por $\mathcal{J}$ una topología localmente convexa sobre E más fina que $\mathcal{C}$ y por $\mathcal{J}_s$ la topología sobre $C\ (X, E)$ de la convergencia puntual asociada a $\mathcal{J}$. $C_s\ (X)$ es el espacio de las funciones escalares continuas sobre X con la topología de la convergencia puntual. Se dice que un espacio completamente regular es *P-espacio* si en él toda intersección numerable de abiertos es abierta; en un P-espacio toda parte numerable es discreta y $C\ (X)$-sumergida, y los compactos son finitos ([1], p. 62). En [3] M. Valdivia define los espacios *hiperplano-Baire* como aquellos espacios localmente convexos que no son unión numerable de hiperplanos cerrados.

Proposición.— Si X es P-espacio, $C_s\ (X)$ es hiperplano-Baire.

Demostración.— Para probar que $C_s\ (X)$ es hiperplano-Baire basta ver que para toda sucesión $(\mu_n,\ n \in \mathbb{N})$ de elementos no nulos del dual de $C_s\ (X)$ existe un elemento $f \in C\ (X)$ tal que $\mu_n f \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Representaremos los elementos μ_n de $C_s\ (X)'$ mediante

$$\mu_n\ (f) = \sum_{x \in \operatorname{sop} \mu_n} c_{nx} f\ (x)$$

donde sop μ_n es un subconjunto finito de X y c_{nx} son escalares no nulos. El conjunto

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{sop} \mu_n$$

es numerable a lo más. Numeramos sus elementos $A = \{x_i,\ i \in I \subset \mathbb{N}\}$ y escribimos

$$\mu_n (f) = \sum_{i \in I_n} c_{ni} f(x_i)$$

donde $I_n = \{i \in I\colon x_i \in \operatorname{sop} \mu_n\} = \{i_1, i_2, ..., i_p\}$ y $c_{ni} = c_{nx_i}$. Sea

$$u_n = (0, ..., c_{ni_1}^{i_1)}, ..., c_{ni_2}^{i_2)}, ..., c_{ni_p}^{i_p)}, 0, ...) \in \phi \subset l^2$$

y H_n el hiperplano ortogonal a $[u_n]$. Como l^2 es un espacio de Hilbert, es de Baire, luego existe

$$z \in l^2 \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n,$$

es decir que

$$(u_n \cdot z) = \sum_{i \in I_n} c_{ni} \bar{z}_i \neq 0 \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por hipótesis X es P-espacio luego A es discreto y $C(X)$-sumergido. Consideremos pues $f \in C(X)$ tal que $f(x_i) = \bar{z}_i$; ahora

$$\mu_n f = (u_n \cdot z) \neq 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ luego $C_s(X)$ es hiperplano-Baire.

El recíproco no es cierto pues si X es un compacto infinito, no es P-espacio y $C(X)$ es un espacio de Banach luego hiperplano-Baire y $C_s(X)$ también lo es pues la propiedad de hiperplano-Baire se conserva al tomar topologías localmente convexas menos finas.

Teorema.—

a) Si $C(X, E)[\mathcal{T}_s]$ es hiperplano-Baire, $C_s(X)$ y $E[\mathcal{T}]$ son hiperplano-Baire.

b) Si X es P-espacio y $E[\mathcal{T}]$ es hiperplano-Baire, $C(X, E)[\mathcal{T}_s]$ es hiperplano-Baire.

Demostración.—

a) $C_s(X)$ y $E[\mathcal{T}]$ son imagen continua del espacio hiperplano-Baire $C(X, E)[\mathcal{T}_s]$ luego son hiperplano-Baire.

b) Sea $(\Pi_n,\ n \in \mathbb{N})$ una sucesión de elementos no nulos del dual de $C(X, E)[\mathcal{T}_s]$. Representamos Π_n mediante

$$\Pi_n \phi = \sum_{x \in \operatorname{sop} \Pi_n} < \phi(x),\ e'_{\Pi_n x} >$$

para toda $\phi \in C(X, E)$ donde para cada n, sop Π_n es un subconjunto finito de X y $e'_{\Pi_n x}$, $x \in \operatorname{sop} \Pi_n$, son formas lineales continuas no nulas sobre $E[\mathcal{T}]$ (ver [2], p. 123). El conjunto

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{sop } \Pi_n$$

es numerable a lo más. Numeramos como antes sus elementos $A = \{x_i, i \in I \subset \mathbb{N}\}$, llamamos $I_n = \{i \in I: x_i \in \text{sop } \Pi_n\} = \{i_1, i_2, ..., i_p\}$ y escribimos

$$\Pi_n \phi = \sum_{i \in I_n} < \phi(x_i), e'_{\Pi_{ni}} >$$

donde $e'_{\Pi_{ni}}$ es $e'_{\Pi_n x_i}$. Sea

$$u_n = (0, ..., e'^{i_1)}_{\Pi_{ni_1}}, ..., e'^{i_2)}_{\Pi_{ni_2}}, ..., e'^{i_p)}_{\Pi_{ni_p}}, 0, ...)$$

u_n es un elemento de la suma directa de I copias del dual de $E[\mathscr{S}]$, que es el dual de un producto de I copias de E, $(E[\mathscr{S}])^I$. En ([3], p. 284) se prueba que el producto de una cantidad arbitraria de espacios hiperplano-Baire es un espacio hiperplano-Baire, por tanto existe un elemento

$$z = (z_i) \in (E[\mathscr{S}])^I$$

tal que

$$< z, u_n > \neq 0$$

para todo n. Por ser A discreto podemos determinar un entorno cerrado V_i de x_i que no contenga a ningún x_j, con $j \neq i$, para cada $i \in I$.

$$W_i = \bigcap_{j \neq i} X \sim V_j$$

es un entorno abierto de x_i por ser X un P-espacio y es disjunto con V_j para todo $j \neq i$. Para cada $i \in I$, sea U_i un entorno abierto de x_i tal que

$$\overline{U}_i \subset W_i \cap V_i.$$

Los U_i así construidos son disjuntos dos a dos. Sea $f_i \in C(X)$ una función continua escalar tal que

$$f_i(x_i) = 1 \qquad \text{y} \qquad f_i(X \sim U_i) = \{0\}.$$

La función

$$\phi = \sum_{i \in I} f_i \otimes z_i$$

está bien definida y es continua en X. En efecto, si x está en algún W_i entonces $\phi = f_i \otimes z_i$ en un entorno de x (el W_i) luego es continua en x. Si x pertenece a

$$\bigcap_{i \in I} (X \sim \overline{U}_i),$$

que es un G_δ luego abierto, $\phi = 0$ en un entorno de x, luego también es continua en x. Como

$$\Pi_n \phi = \sum_{i \in I_n} < \phi (x_i), \ e'_{\Pi_{ni}} > = \sum_{i \in I_n} < z_i, \ e'_{\Pi_{ni}} > \neq 0$$

se concluye que $C(X, E)\, [\mathcal{T}_s]$ es hiperplano-Baire.

El recíproco de (a) se verifica en ciertos casos, por ejemplo, si X es localmente compacto numerable en el infinito y E es un producto de espacios de Fréchet, entonces $C(X, E)$ es isomorfo topológicamente a un producto de espacios de Fréchet, que es de Baire, luego hiperplano-Baire, y con la topología menos fina $C(X, E)\, [\mathcal{T}_s]$ también es hiperplano-Baire.

BIBLIOGRAFIA

[1] GILLMAN, L., JERISON, M.: *Rings of continous functions.* D. van Nostrand Co. Inc. Princeton (1960).

[2] SCHMETS, J.: *Espaces de fonctions continues.* Lecture Notes in Math. 519. Springer Berlín (1976).

[3] VALDIVIA, M.: *On Baire-hyperplane spaces.* Proc. Edimburg Math. Soc. 23 (1979) 247-255.

Departamento de Matemática Aplicada
E.T.S.I. Industriales

Universidad Politécnica de Valencia
Cno. de Vera, s/n
46022-Valencia