Sobre $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$-local sucesional tonelación en espacios de funciones continuas con valores vectoriales provistos de la topología de la convergencia puntual

Por Jose L. Hueso y Joaquin Motos

Recibido: 7 noviembre 1.984

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia

Abstract

In this article we give conditions under which $C(X, E)$ $[\mathcal{T}_S]$ is $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$-(locally) sequentially barrelled, being $\mathcal{B}$ a certain class of bounded sets in that space; we also obtain the $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$-(locally) sequentially barrelled topology asociated to $\mathcal{T}_S$ and $\mathcal{B}$.

Sea E un espacio localmente convexo y E' su dual topológico. Si M es un subconjunto absolutamente convexo acotado de E, se denota por E_M la envoltura lineal de M en E con la norma del calibrador de M. Se dice que una sucesión $(x_n, n \in \mathbb{N})$ de E es localmente Cauchy (localmente convergente) en E si existe un absolutamente convexo acotado M tal que $(x_n, n \in \mathbb{N})$ es de Cauchy (convergente) en E_M. Un espacio localmente convexo es localmente completo si toda sucesión localmente Cauchy es convergente.

Sea $\mathcal{B}$ una familia de acotados de E que cubre E (condición que supondremos cumplen todas las familias de acotados consideradas en lo sucesivo). Llamamos $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ a la topología sobre E' de la convergencia uniforme sobre los miembros de $\mathcal{B}$. La topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ así definida está intercalada entre las topologías débil $\sigma(E', E)$ y fuerte $\beta(E', E)$ de E'.

Se dice que un espacio localmente convexo E es σ-*(localmente) sucesionalmente tonelado* si toda sucesión débilmente (localmente) convergente a cero en E' es equicontinua en E. E *es* β-*(localmente) sucesionalmente tonelado* si toda sucesión fuertemente (localmente) convergente a cero en E' es equicontinua en E ([6] y [7]). Se dice que E es $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$-*(localmente) sucesionalmente tonelado* si toda sucesión $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$-(localmente) convergente a cero en E' es equicontinua en E (ver [3] y [4]).

Todo espacio σ-(localmente) sucesionalmente tonelado es $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado, para cualquier familia $\mathcal{B}$ de acotados del espacio, y todo espacio $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado es β-(localmente) sucesionalmente tonelado. Para espacios de Mackey coinciden la $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$-sucesional tonelación y la $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$-local sucesional tonelación, por el Teorema 1 de [3].

Admitimos el siguiente resultado de carácter elemental.

Lema 1.– Sean F y G dos espacios localmente convexos, $\mathscr{B}_F$ y $\mathscr{B}_G$ familias de acotados de F y de G respectivamente y $f: F \to G$ una aplicación lineal tal que $f(\mathscr{B}_F) \subset \mathscr{B}_G$.

a) Si f es débilmente continua, entonces ${}^t f$ es $(\mathscr{C}_{\mathscr{B}_G}, \mathscr{C}_{\mathscr{B}_F})$ continua.

b) Si f es un homomorfismo topológico de F sobre G y F es $\mathscr{C}_{\mathscr{B}_F}$-(localmente) sucesionalmente tonelado, entonces G es $\mathscr{C}_{\mathscr{B}_G}$-(localmente) sucesionalmente tonelado.

Sea X un espacio topológico completamente regular. Se denota por $C_s(X)$ el espacio de las funciones continuas escalares sobre X con la topología de la convergencia puntual. Si $E[\mathscr{C}]$ es un espacio localmente convexo, $C(X, E)$ denota el espacio de las funciones continuas de X en $E[\mathscr{C}]$. En adelante $\mathscr{J}$ representará una topología localmente convexa sobre E más fina que $\mathscr{C}$ y $\mathscr{J}_s$ la topología sobre $C(X, E)$ de la convergencia puntual asociada a $\mathscr{J}$. El dual de $C(X, E)[\mathscr{J}_s]$ admite la siguiente representación ([5], p.123): si Π es una forma lineal continua sobre $C(X, E)[\mathscr{J}_s]$, existe un subconjunto finito A de X y para cada x de A una forma lineal no nula $e'_{\Pi x}$ continua en $E[\mathscr{J}]$, tales que para cada $\phi \in C(X, E)$.

$$\Pi\phi = \sum_{x \in A} \langle \phi(x), e'_{\Pi x} \rangle$$

Esta representación es única y el conjunto A se llama el soporte de Π. Si $x \notin \operatorname{sop} \Pi$ pondremos $e'_{\Pi x} = 0$. Si M es un subconjunto del dual de $C(X, E)[\mathscr{J}_s]$ el soporte de M es por definición:

$$\operatorname{sop} M = \cup \{\operatorname{sop} \Pi,\ \Pi \in M\}$$

Las siguientes propiedades ([5], pp. 125-127) serán útiles en lo sucesivo.

(A): Un subconjunto M del dual de $C(X, E)[\mathscr{J}_s]$ es equicontinuo si y sólo si $\operatorname{sop} M$ es finito y para cada $x \in \operatorname{sop} M$ el conjunto $M_x = \{e'_{\Pi x}, \Pi \in M\}$ es equicontinuo en $E[\mathscr{J}]$.

(B): Un subconjunto M del dual de $C(X, E)[\mathscr{J}_s]$ es fuertemente acotado si y sólo si $\operatorname{sop} M$ es finito y para cada $x \in \operatorname{sop} M$ el conjunto M_x es fuertemente acotado en $E[\mathscr{J}]$.

(C): El soporte de un conjunto débilmente acotado del dual de $C(X, E)[\mathscr{J}_s]$ es acotado en X.

Omitimos la demostración del siguiente lema por ser de carácter rutinario. El concepto de familia saturada de acotados es el de [2], p. 255.

Lema 2.– Sea $\mathscr{B}$ una familia de acotados de $C(X, E)[\mathscr{J}_s]$ cumpliendo:

(1) Si $B \in \mathscr{B}$, $x \in X$ y $f \in C(X)$ entonces

$$f \otimes B(x) = \{f \otimes \phi(x), \phi \in B\} \in \mathscr{B}$$

(2) Si $B \in \mathscr{B}$, $e' \in (E[\mathscr{C}])'$ y $e \in E$ entonces

$$(e'_0 B) \otimes e = \{(e'_0 \phi) \otimes e,\ \phi \in B\} \in \mathscr{B}$$

Entonces $\hat{\mathscr{B}} = \{B(x),\ x \in X,\ B \in \mathscr{B}\}$ y $\tilde{\mathscr{B}} = \{e'_0 B,\ e' \in \in (E[\mathscr{C}])',\ B \in \mathscr{B}\}$ son familias de acotados en $E[\mathscr{I}]$ y $C_s(X)$ respectivamente. Si $\mathscr{B}$ es además saturada, $\hat{\mathscr{B}}$ y $\tilde{\mathscr{B}}$ también lo son.

Las condiciones (1) y (2) se satisfacen en los casos ordinarios por lo que supondremos que todas las familias de acotados de los espacios de funciones continuas que consideraremos las cumplen.

Proposición 1.— Sea $\mathscr{B}$ una familia de acotados en $C(X, E)[\mathscr{I}_s]$.

a) $C(X, E)[\mathscr{I}_s]$ es $\mathscr{C}_{\mathscr{B}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado si y sólo si

(i) $E[\mathscr{I}]$ es $\mathscr{C}_{\hat{\mathscr{B}}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado, y

(ii) para toda sucesión $(\Pi_n, n \in \mathbb{N})$ $\mathscr{C}_{\mathscr{B}}$-(localmente) convergente a cero en $(C(X,E)[\mathscr{I}_s])'$, sop $\{\Pi_n, n \in \mathbb{N}\}$ es finito.

b) La condición (ii) implica que $C_s(X)$ sea $\mathscr{C}_{\tilde{\mathscr{B}}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado.

Demostración.— *a*) Supongamos que $C(X,E)[\mathscr{I}_s]$ es $\mathscr{C}_{\mathscr{B}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado. La aplicación

$$Tx\colon C(X,E)[\mathscr{I}_s] \to E[\mathscr{I}]:\ \phi \to \phi(x)$$

siendo x un elemento fijo de X, es un homomorfismo topológico tal que $Tx(\mathscr{B}) \subset \hat{\mathscr{B}}$. Aplicando el Lema 1 (b) se tiene que $E[\mathscr{I}]$ es $\mathscr{C}_{\hat{\mathscr{B}}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado. Como $C(X, E)[\mathscr{I}_s]$ es $\mathscr{C}_{\mathscr{B}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado, la sucesión $(\Pi_n,\ n \in \mathbb{N})$ es equicontinua, luego el soporte de $\{\Pi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ es finito por el resultado (A).

Supongamos ahora que se cumplen las condiciones (i) y (ii). Sea $(\Pi_n,\ n \in \mathbb{N})$ una sucesión $\mathscr{C}_{\mathscr{B}}$-(localmente) convergente a cero en $(C(X,E)[\mathscr{I}_s])'$. Veamos que es equicontinua. Por hipótesis el soporte es finito, por lo que basta probar que para cada $x \in$ sop $\{\Pi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto $\{e'_{\Pi_n x},\ n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinuo en $E[\mathscr{I}]$. Fijo x, tomamos $f_x \in C(X)$ tal que $f_x(x) = 1$ y $f_x(y) = 0$ para todo $y \in$ sop $\{\Pi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $y \neq x$. La aplicación

$$u_x\colon E[\mathscr{I}] \to C(X,E)[\mathscr{I}_s]: e \to f_x \otimes e$$

es continua y $u_x(\hat{\mathscr{B}}) \subset \mathscr{B}$, luego por el Lema 1(*a*), ${}^t u_x$ es $(\mathscr{C}_{\mathscr{B}}, \mathscr{C}_{\hat{\mathscr{B}}})$-continua y la sucesión $(e'_{\Pi_n x},\ n \in \mathbb{N}) = ({}^t u_x(\Pi_n),\ n \in \mathbb{N})$ es $\mathscr{C}_{\hat{\mathscr{B}}}$-(localmente) convergente a cero en $(E[\mathscr{I}])'$ y por hipótesis equicontinua.

b) La hipótesis (ii) implica que $C_s(X)$ sea $\mathscr{T}_{\tilde{\mathscr{B}}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado pues si $(\mu_n, n \in \mathbb{N})$ es una sucesión $\mathscr{T}_{\tilde{\mathscr{B}}}$-(localmente) convergente a cero en $C_s(X)'$ y $e' \in (E[\mathscr{T}])'$, $e' \neq 0$, es fácil ver que la sucesión $(\Pi_n, n \in \mathbb{N})$ siendo $\Pi_n \phi = \mu_n (e'_0 \phi)$ es $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$-(localmente) convergente a cero en $(C(X, E)[\mathscr{I}_s])'$. Por (ii), sop $\{\mu_n, n \in \mathbb{N}\}$ = sop $\{\Pi_n, n \in \mathbb{N}\}$ es finito. Así pues, se verifica la condición (ii) en el caso de $\tilde{\mathscr{B}}$ y $C_s(X)$. Para $C_s(X)$ la condición (i) es obvia, luego de la primera parte de la Proposición se obtiene la conclusión.

En ciertos casos se verifica el recíproco de la segunda parte de la Proposición 1:

Proposición 2.– Sea $\mathscr{B}$ una familia de acotados de $C(X, E)[\mathscr{I}_s]$ tal que $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ es compatible con la dualidad $\langle C(X, E)[\mathscr{I}_s], (C(X, E)[\mathscr{I}_s])'\rangle$. Si $C_s(X)$ es $\mathscr{T}_{\tilde{\mathscr{B}}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado, entonces se verifica la condición (ii) de la Proposición 1.

Demostración.– Sea $(\Pi_n, n \in \mathbb{N})$ una sucesión $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$-(localmente) convergente a cero en $(C(X, E)[\mathscr{I}_s])'$. El conjunto $(\Pi_n, n \in \mathbb{N})$ es acotado para una topología compatible $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$, luego débilmente acotado. Por la propiedad (C) su soporte es acotado en X. Será finito si probamos que $C_s(X)$ es tonelado [1]. Como $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ es compatible con la dualidad, $\mathscr{B}$ consta de conjuntos cuya envoltura absolutamente convexa es débilmente relativamente compacta, luego $\tilde{\mathscr{B}}$ consta de conjuntos del mismo tipo, por la continuidad de la de las aplicaciones Te': $C(X, E)[\mathscr{I}_s] \to C_s(X)$: $\phi \to e'_0 \phi$, $e' \in (E[\mathscr{T}])'$. Por tanto, $\mathscr{T}_{\tilde{\mathscr{B}}}$ es compatible con la dualidad. Por el Teorema 1 de [3] y por hipótesis $C_s(X)$ es dual localmente completo. Como el espacio $C_s(X)$ siempre es casitonelado (ver [1]), entonces es tonelado.

Corolario.–

a) Sea $\mathscr{B}$ una familia de acotados de $C(X, E)[\mathscr{I}_s]$ tal que $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ es compatible con el par dual. Son equivalentes:
  (i) $C(X, E)[\mathscr{I}_s]$ es $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado y
  (ii) $E[\mathscr{I}]$ es $\mathscr{T}_{\hat{\mathscr{B}}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado y $C_s(X)$ es $\mathscr{T}_{\tilde{\mathscr{B}}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado.

b) $C(X, E)[\mathscr{I}_s]$ es σ-(localmente) sucesionalmente tonelado si y sólo si $E[\mathscr{I}]$ y $C_s(X)$ lo son.

Estudiaremos ahora la topología $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$-(localmente) sucesionalmente tonelada asociada a un espacio localmente convexo y a una familia de acotados y su aplicación a los espacios de funciones continuas.

En primer lugar damos una demostración de un resultado de [3] necesario para la consideración de la topología asociada.

Lema 3.– Sea $E[\mathscr{T}]$ un espacio localmente convexo límite inductivo de la familia $\{(E_i, u_i), i \in I\}$ y supongamos que E es la envoltura lineal de

$\bigcup\limits_{i\in I} u_i\,(E_i)$. Sea $\mathcal{B}_i$ una familia saturada de acotados de E_i, $i \in I$ y sea $\mathcal{B}$ la familia saturada generada por $\{u_i\,(B_i),\ i \in I,\ B_i \in \mathcal{B}_i\}$. Si para todo $i \in I$, E_i es $\mathcal{C}_{\mathcal{B}_i}$-(localmente) sucesionalmente tonelado, entonces E es $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$-(localmente) sucecionalmente tonelado.

Demostración.— $u_i\,(B_i)$ es $\mathcal{C}$-acotado pues u_i es continua por definición de topología límite inductivo. $\mathcal{B}$ cubre E por ser saturada y cubrir $\mathcal{B}_i$ a E_i. Veamos que si $(e'_n,\ n \in \mathbb{N})$ es $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$-(localmente) convergente a cero en $(E\,[\mathcal{C}\,])'$, es equicontinua en E. Por la caracterización de la continuidad basta ver que para cada $i \in I$, $(e'_n \circ u_i,\ n \in \mathbb{N}) = ({}^t u_i\,(e'_n),\ n \in \mathbb{N})$ es equicontinua. Por el Lema 1(a) ${}^t u_i$ es $(\mathcal{C}_{\mathcal{B}},\ \mathcal{C}_{\mathcal{B}_i})$-continua, luego la sucesión imagen es $\mathcal{C}_{\mathcal{B}_i}$-(localmente) convergente a cero y por hipótesis equicontinua en E_i.

Sea $E\,[\mathcal{C}\,]$ un espacio localmente convexo y $\mathcal{B}$ una familia saturada de acotados de $E\,[\mathcal{C}\,]$. Si $\mathcal{C}'$ es una topología localmente convexa sobre E más fina que $\mathcal{C}$ denotamos por $\mathcal{B}'$ la familia saturada de los acotados de $E\,[\mathcal{C}']$ que están en $\mathcal{B}$. Usaremos esta notación con otros caracteres en lugar de $'$. Si $\mathcal{C}^*$ es la topología localmente convexa más fina sobre E, $E\,[\mathcal{C}^*]$ es tonelado y en particular $\mathcal{C}_{\mathcal{B}^*}$-(localmente) sucesionalmente tonelado (en este caso σ-(localmente) sucesionalmente tonelado. Entonces la familia $\&$ de las topologías localmente convexas $\mathcal{C}'$ sobre E más finas que $\mathcal{C}$ y tales que $E\,[\mathcal{C}']$ es $\mathcal{C}_{\mathcal{B}'}$-(localmente) sucesionalmente tonelado no es vacía. El límite inductivo

$$E\,[\mathcal{C}_\&\,] = \varinjlim_{\mathcal{C}' \in \&} E\,[\mathcal{C}']$$

es un espacio $\mathcal{C}_{\mathcal{B}_\&}$-(localmente) sucesionalmente tonelado y $\mathcal{C}_\&$ es menos fina que cualquier topología de $\&$. En efecto, por el Lema 3, $E\,[\mathcal{C}_\&\,]$ es $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado siendo $\mathcal{D}$ la familia saturada engendrada por $\bigcup\limits_{\mathcal{C}' \in \&} \mathcal{B}'$. Todo $B' \in \mathcal{B}'$ está en $\mathcal{B}$ y es $\mathcal{C}'$-acotado, luego $\mathcal{C}_\&$-acotado, pues $\mathcal{C}_\& \subset \mathcal{C}'$, por tanto está en $\mathcal{B}_\&$. Entonces $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}_\&$ y en particular $E\,[\mathcal{C}_\&\,]$ es $\mathcal{C}_{\mathcal{B}_\&}$-(localmente) sucesionalmente tonelado. Llamaremos a $\mathcal{C}_\&$ la topología $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$-(localmente) sucesionalmente tonelada asociada a $E\,[\mathcal{C}]$ y a la familia $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B}$ es una familia saturada de acotados de $C\,(X, E)\,[\,\mathcal{T}_s]$ denotamos por $\mathcal{T}_{s\&}$ la topología $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$-(localmente) sucesionalmente tonelada asociada a $C\,(X, E)\,[\,\mathcal{T}_s]$ y a $\mathcal{B}$, y por $\mathcal{B}_\&$ la familia de los $\mathcal{T}_{s\&}$-acotados de $\mathcal{B}$. Sea $\mathcal{T}_\&$ la topología $\mathcal{C}_{\hat{\mathcal{B}}}$-(localmente) sucesionalmente tonelada asociada a $E\,[\,\mathcal{T}\,]$ y a la familia de acotados $\hat{\mathcal{B}}$. $\mathcal{T}_{\& s}$ es la topología sobre $C\,(X, E)$ de la convergencia puntual asociada a $\mathcal{T}_\&$ y $\mathcal{B}^\&$ es la familia de los $\mathcal{T}_{\& s}$-acotados de $\mathcal{B}$. Con estas notaciones tenemos:

Proposición 3.– Si toda sucesión $\mathscr{C}_{\mathscr{B}^{\varepsilon}}$-(localmente) convergente a cero en $(C(X, E)[\mathscr{T}_{\varepsilon s}])'$ tiene soporte finito, entonces la topología $\mathscr{C}_{\mathscr{B}}$-(localmente) sucesionalmente tonelada asociada a $C(X, E)[\mathscr{T}_s]$ y a $\mathscr{B}$ es $\mathscr{T}_{s\varepsilon} = \mathscr{T}_{\varepsilon s}$ la topología de la convergencia puntual asociada a $\mathscr{T}_{\varepsilon}$.

Demostración.– Veamos que $\mathscr{T}_{\varepsilon s}$ es más fina que $\mathscr{T}_{s\varepsilon}$. $\mathscr{T}_{\varepsilon s}$ es una topología sobre $C(X, E)$ más fina que $\mathscr{T}_s$. Basta ver que $C(X; E)[\mathscr{T}_{\varepsilon s}]$ es $\mathscr{C}_{\mathscr{B}^{\varepsilon}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado. Por hipótesis se tiene la condición (ii) de la Proposición 1. Falta probar que $E[\mathscr{T}_{\varepsilon}]$ es $\mathscr{C}_{(\mathscr{B}^{\varepsilon})^{\wedge}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado. $E[\mathscr{T}_{\varepsilon}]$ es $\mathscr{C}_{\hat{\mathscr{B}}_{\varepsilon}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado por definición de $\mathscr{T}_{\varepsilon}$ y $\hat{\mathscr{B}}_{\varepsilon} \subset (\mathscr{B}^{\varepsilon})^{\wedge}$ pues los elementos de $\hat{\mathscr{B}}_{\varepsilon}$ son $\mathscr{T}_{\varepsilon}$-acotados de la forma $B(x)$ con $B \in \mathscr{B}$ y $x \in X$ que se pueden poner como $(1 \otimes B(x))(x)$ donde $1 \otimes B(x)$ está en $\mathscr{B}$ por (1) y es $\mathscr{T}_{\varepsilon s}$-acotado, luego $1 \otimes B(x) \in \mathscr{B}^{\varepsilon}$ y $B(x) \in (\mathscr{B}^{\varepsilon})^{\wedge}$, luego se tiene lo que queríamos. Para la inclusión contraria probaremos que la identidad de $C(X, E)[\mathscr{T}_{s\varepsilon}]$ en $C(X, E)[\mathscr{T}_{\varepsilon s}]$ es continua. Por definición de $\mathscr{T}_{\varepsilon s}$ basta ver que las aplicaciones $Tx\colon C(X, E)[\mathscr{T}_{s\varepsilon}] \to E[\mathscr{T}_{\varepsilon}]\colon \phi \to \phi(x)$ son continuas para todo $x \in X$. Sea $\mathscr{T}_x$ la topología localmente convexa más fina sobre E que hace continua la aplicación $Tx\colon C(X, E)[\mathscr{T}_{s\varepsilon}] \to E$. $E[\mathscr{T}_x]$ es $\mathscr{C}_{\hat{\mathscr{B}}_x}$-(localmente) sucesionalmente tonalado pues $Tx(\mathscr{B}_{\varepsilon}) \subset \subset Tx(\mathscr{B}) \subset \hat{\mathscr{B}}$, por ser $\mathscr{T}_{s\varepsilon} \supset \mathscr{T}_s$, y $Tx(B)$ es $\mathscr{T}_x$-acotado si $B \in \mathscr{B}_{\varepsilon}$ por la continuidad de Tx, luego está en $\hat{\mathscr{B}}_x$. Por el Lema 1 (b), $E[\mathscr{T}_x]$ es $\mathscr{C}_{\hat{\mathscr{B}}_x}$-(localmente) sucesionalmente tonelado. Además, $\mathscr{T}_x$ es más fina que $\mathscr{T}$, luego por definición $\mathscr{T}_x \supset \mathscr{T}_{\varepsilon}$. El ínfimo $\mathscr{T}_0$ de las topologías $\mathscr{T}_x$, $x \in X$ es una topología más fina que $\mathscr{T}_{\varepsilon}$ y $Tx\colon C(X, E)[\mathscr{T}_{s\varepsilon}] \to E[\mathscr{T}_0]$ es continua para todo $x \in X$, en particular también lo es en $E[\mathscr{T}_{\varepsilon}]$.

Corolario 1.– Si $\mathscr{T}_{\varepsilon}$ es la topología β-(localmente) sucesionalmente tonelada asociada a $E[\mathscr{T}]$, entonces la topología β-(localmente) sucesionalmente tonelada asociada a $C(X, E)[\mathscr{T}_s]$ es $\mathscr{T}_{\varepsilon s}$.

Demostración.– Como $\mathscr{B}$ es la familia de todos los $\mathscr{T}_s$ acotados, $\mathscr{B}^{\varepsilon}$ es la familia de los $\mathscr{T}_{\varepsilon s}$ acotados y una sucesión $\mathscr{C}_{\mathscr{B}^{\varepsilon}}$-(localmente) convergente a cero es fuertemente acotada, luego su soporte es finito por (B).

Corolario 2.– Con las notaciones de la Proposición 3, si $\mathscr{C}_{\mathscr{B}}$ es compatible con el par dual $\langle (C(X, E), (C(X, E)[\mathscr{T}_{\varepsilon s}])' \rangle$ y $C_s(X)$ es $\mathscr{C}_{(\mathscr{B}^{\varepsilon})^{\sim}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado, entonces la topología $\mathscr{C}_{\mathscr{B}}$-(localmente) sucesionalmente tonelada asociada a $C(X, E)[\mathscr{T}_s]$ y a $\mathscr{B}$ es $\mathscr{T}_{\varepsilon s}$.

Demostración.– Basta aplicar a $\mathscr{T}_{\varepsilon s}$ y $\mathscr{B}^{\varepsilon}$ la Proposición 2 para obtener las hipótesis de la Proposición 3.

Corolario 3.– Si $C_s(X)$ es tonelado, la topología σ-(localmente) sucesionalmente tonelada asociada a $C(X, E)[\mathscr{T}_s]$ es $\mathscr{T}_{\varepsilon s}$, siendo $\mathscr{T}_{\varepsilon}$ la topología σ-(localmente) sucesionalmente tonelada asociada a $E[\mathscr{T}]$.

Demostración.– $\mathscr{B}$ son los acotados de dimensión finita de $C(X, E)$ por tanto $\mathscr{B}^{\varepsilon} = \mathscr{B}$ y $(\mathscr{B}^{\varepsilon})^{\sim} = \tilde{\mathscr{B}}$ son los acotados de dimensión finita de $C(X)$ y se puede aplicar el Corolario anterior.

En lo que sigue daremos una construcción transfinita del espacio $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado asociado a un espacio localmente convexo $E[\mathscr{T}]$ y una familia $\mathscr{B}$ de acotados y utilizaremos esta construcción para obtener una demostración distinta de la Proposición 3.

Dado un espacio localmente convexo $E[\mathscr{T}]$ y una familia $\mathscr{B}$ de acotados en él, llamamos $\mathscr{T}_1$ a la topología sobre E de la convergencia uniforme sobre los $\mathscr{T}$-equicontinuos y sobre las sucesiones $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$-(localmente) convergentes a cero en $(E[\mathscr{T}])'$. La topología $\mathscr{T}_1$ es más fina que $\mathscr{T}$ y toda sucesión $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$-(localmente) convergente a cero en $(E[\mathscr{T}])'$ es $\mathscr{T}_1$-equicontinua. Si $\mathscr{B}_1$ es la familia de los $\mathscr{T}_1$-acotados de $\mathscr{B}$, $E[\mathscr{T}_1]$ no es necesariamente $\mathscr{T}_{\mathscr{B}_1}$-(localmente) sucesionalmente tonelado. Procediendo transfinitamente definimos $\mathscr{T}_\alpha$ y $\mathscr{B}_\alpha$ para todo ordinal α. Si α es un ordinal que tiene predecesor se define $\mathscr{T}_\alpha$ a partir de $\mathscr{T}_{\alpha-1}$ y $\mathscr{B}_{\alpha-1}$ como $\mathscr{T}_1$ a partir de $\mathscr{T}$ y $\mathscr{B}$, y $\mathscr{B}_\alpha$ como la familia de los $\mathscr{T}_\alpha$-acotados de $\mathscr{B}$. Si α es un ordinal límite, $\mathscr{T}_\alpha$ es la topología localmente convexa generada por $\bigcup_{\alpha > \beta} \mathscr{T}_\beta$ y $\mathscr{B}_\alpha$ se define como en el caso anterior. Por construcción, para todo ordinal α, toda sucesión $\mathscr{T}_{\mathscr{B}_\alpha}$-(localmente) convergente a cero en $(E[\mathscr{T}_\alpha])'$ es $\mathscr{T}_{\alpha+1}$-equicontinua.

Lema 4.– Con las notaciones precedentes,

a) Existe el menor odinal ν tal que $\mathscr{T}_\nu = \mathscr{T}_{\nu+1}$

b) $\mathscr{T}_\nu$ es la topología $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$-(localmente) sucesionalmente tonelado asociada a $E[\mathscr{T}]$ y a $\mathscr{B}$.

Demostración.– a) La prueba de la existencia del ordinal ν es análoga a la de [5] p. 19, pero se incluye por razones de completitud. Si para todo ordinal α, $\mathscr{T}_\alpha$ fuera estrictamente menos fina que $\mathscr{T}_{\alpha+1}$, existiría un $\mathscr{T}_{\alpha+1}$-entorno de cero absolutamente convexo V_α que no sería $\mathscr{T}_\alpha$-entorno de cero. Sea γ el cardinal de la familia Γ de los absolutamente convexos de E y sea ϕ la aplicación del segmento de ordinales $[0, 2^\gamma[$ en Γ tal que $\phi(\alpha) = V_\alpha$. Por hipótesis ϕ es inyectiva, luego $\operatorname{card}[0, 2^\gamma[= 2^\gamma \leqslant \operatorname{card} \Gamma = \gamma$ lo que es absurdo.

b) Por construcción $E[\mathscr{T}_\nu]$ es $\mathscr{T}_{\mathscr{B}_\nu}$-(localmente) sucesionalmente tonelado y $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_\nu$, luego $\mathscr{T}_\nu$ es más fina que la topología $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$-(localmente) sucesionalmente tonelada asociada $\mathscr{T}_\varepsilon$. Para ver ahora que $\mathscr{T}_\nu$ es menos fina que $\mathscr{T}_\varepsilon$ probemos por inducción transfinita que para todo ordinal α, $\mathscr{T}_\alpha \subset \mathscr{T}_\varepsilon$. Si llamamos $\mathscr{T}_0$ a $\mathscr{T}$ es inmediato que $\mathscr{T}_0 \subset \mathscr{T}_\varepsilon$. Supongamos que esta relación se verifica para los ordinales menores que α. Veamos que también se verifica para α. Si α tiene predecesor, por hipótesis de inducción $\mathscr{T}_{\alpha-1} \subset \mathscr{T}_\varepsilon$. Entonces la identidad j de $E[\mathscr{T}_\varepsilon]$ en $E[\mathscr{T}_{\alpha-1}]$ es continua y $j(\mathscr{B}_\varepsilon) \subset \mathscr{B}_{\alpha-1}$. Por el Lema 1 (*a*), la transpuesta ${}^t j$: $(E[\mathscr{T}_{\alpha-1}])' \to (E[\mathscr{T}_\varepsilon])'$ es $(\mathscr{T}_{\mathscr{B}_{\alpha-1}}, \mathscr{T}_{\mathscr{B}_\varepsilon})$-continua. $\mathscr{T}_\alpha$ es la topolología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos M que son $\mathscr{C}_{\alpha-1}$-equicontinuos o sucesiones $\mathscr{C}_{\mathscr{B}_{\alpha-1}}$-(localmente) convergentes a cero en $(E\ [\mathscr{C}_{\alpha-1}])'$. Si M es $\mathscr{C}_{\alpha-1}$-equicontinuo, es $\mathscr{C}_{\alpha}$-equicontinuo pues $\mathscr{C}_{\alpha-1} \subset \mathscr{C}_{\alpha}$. Si M es una sucesión $\mathscr{C}_{\mathscr{B}_{\alpha-1}}$-(localmente) convergente a cero, ${}^t j\ (M)$ es una sucesión $\mathscr{C}_{\mathscr{B}_{\mathfrak{g}}}$-(localmente) nula en $(E\ [\mathscr{C}_{\mathfrak{g}}])'$ luego es $\mathscr{C}_{\mathfrak{g}}$-equicontinua. En consecuencia $\mathscr{C}_{\alpha}$ es menos fina que $\mathscr{C}_{\mathfrak{g}}$. Si α es un ordinal límite, por hipótesis de inducción $\mathscr{C}_{\beta}$ es menos fina que $\mathscr{C}_{\mathfrak{g}}$ para todo $\beta < \alpha$ luego $\mathscr{C}_{\alpha}$ es menos fina que $\mathscr{C}_{\mathfrak{g}}$. Por tanto $\mathscr{C}_{\alpha} \subset \mathscr{C}_{\mathfrak{g}}$. En particular $\mathscr{C}_{\nu} \subset \mathscr{C}_{\mathfrak{g}}$ y se tiene la igualdad.

Sea $\mathscr{B}$ una familia de acotados en $C(X, E)\ [\mathscr{T}_s]$ y sean $\hat{\mathscr{B}}$ y $\tilde{\mathscr{B}}$ las familias derivadas de $\mathscr{B}$ como en el Lema 2. Sea $\mathscr{T}_{\alpha}$ la topología obtenida en el paso α de la construcción transfinita de la topología $\mathscr{C}_{\hat{\mathscr{B}}}$-(localmente) sucesionalmente tonelada asociada a $E\ [\mathscr{T}]$ y a $\hat{\mathscr{B}}$ y $\mathscr{T}_{\alpha,s}$ la topología sobre $C\ (X, E)$ de la convergencia puntual asociada a $\mathscr{T}_{\alpha}$. Denotamos por $\mathscr{B}^{\alpha}$ la familia de los acotados de $C(X, E)\ [\mathscr{T}_{\alpha,s}]$ que están en $\mathscr{B}$ y por $\hat{\mathscr{B}}_{\alpha}$ la de los acotados de $E\ [\mathscr{T}_{\alpha}]$ que están en $\hat{\mathscr{B}}$. A partir de $\mathscr{B}^{\alpha}$ se definen las familias $(\mathscr{B}^{\alpha})^{\wedge}$ y $(\mathscr{B}^{\alpha})^{\sim}$ como en el Lema 2 y se tiene el

Lema 5.–

a) $\mathscr{B}^{\alpha}$ es una familia saturada de acotados de $C\ (X, E)\ [\mathscr{T}_{\alpha,s}]$ que cumple las condiciones (1) y (2) del Lema 2.

b) $(\mathscr{B}^{\alpha})^{\wedge} = \hat{\mathscr{B}}_{\alpha}$.

Demostración.– Veamos que $\hat{\mathscr{B}}_{\alpha} \subset (\mathscr{B}^{\alpha})^{\wedge}$. Si $B\ (x)$ es un acotado de $E\ [\mathscr{T}_{\alpha}]$ con $B \in \hat{\mathscr{B}}$, entonces $1 \otimes B\ (x) \in \mathscr{B}$ y es acotado en $C\ (X, E)$ $[\mathscr{T}_{\alpha,s}]$, luego $1 \otimes B\ (x)$ pertenece a $\mathscr{B}^{\alpha}$ y $B\ (x) = (1 \otimes B\ (x))\ (x)$ pertenece a $(\mathscr{B}^{\alpha})^{\wedge}$. Las demás propiedades son elementales.

Con la ayuda de estos lemas podemos dar otra

Demostración de la Proposición 3.– Sea $\mathscr{T}_{\nu}$ la topología obtenida a partir de $E\ [\mathscr{T}]$ y $\hat{\mathscr{B}}$ como en el Lema 4. Sea $\mathscr{T}_{s,\alpha}$ la topología obtenida en el paso α de la construcción transfinita de la topología $\mathscr{C}_{\mathscr{B}}$-(localmente) sucesionalmente tonelada asociada a $C\ (X, E)\ [\mathscr{T}_s]$ y a $\mathscr{B}$. Probemos por inducción transfinita que para cada α, $\mathscr{T}_{s,\alpha} = \mathscr{T}_{\alpha,s}$. Para $\alpha = 0$ no hay nada que probar. Supongamos que la igualdad es cierta para todo ordinal menor que α. Sea α un ordinal con predecesor. $\mathscr{T}_{s,\alpha}$ es la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos M que son $\mathscr{T}_{s,\alpha-1}$-equicontinuos o sucesiones $\mathscr{C}_{\mathscr{B}_{\alpha-1}}$-(localmente) convergentes a cero en $(C\ (X, E)\ [\mathscr{T}_{s,\alpha-1}])'$. Si M es $\mathscr{T}_{s,\alpha-1} = \mathscr{T}_{\alpha-1,s}$ equicontinuo, es $\mathscr{T}_{\alpha,s}$ equicontinuo pues $\mathscr{T}_{\alpha,s} \supset \mathscr{T}_{\alpha-1,s}$. Si M es una sucesión $\mathscr{C}_{\mathscr{B}_{\alpha-1}}$-(localmente) convergente a cero, como la identidad j de $C\ (X, E)\ [\mathscr{T}_{\nu,s}] \to C\ (X, E)\ [\mathscr{T}_{\alpha-1,s}]$ (igual por hipótesis de inducción a $C\ (X, E)\ [\mathscr{T}_{s,\alpha-1}]$ es continua y $j\ (\mathscr{B}_{\nu}) \subset$ $\subset \mathscr{B}_{\alpha-1}$, por el Lema 1 (*a*) la sucesión ${}^t j\ (M)$ es $\mathscr{C}_{\mathscr{B}_{\nu}}$-(localmente) convergente a cero en $(C(X, E)[\mathscr{T}_{\nu,s}])'$ luego por las hipótesis de la Proposición 3 su soporte es finito. Sea $x \in \operatorname{sop} M$ y $f_x \in C(X)$ tal que $f_x(x) = 1$ y $f_x(y) = 0$ para todo $y \in \operatorname{sop} M \sim \{x\}$. La aplicación

$$u_x : E[\mathscr{T}_{\alpha-1}] \to C(X,E)[\mathscr{T}_{\alpha-1,s}] : e \to f_x \otimes e$$

es continua y si $B(x) \in \hat{\mathscr{B}}_{\alpha-1}$ $(= (\mathscr{B}_{\alpha-1})^{\wedge}$ por el Lema 5 (b)), entonces $u_x(B(x)) = f_x \otimes B(x) \in \mathscr{B}_{\alpha-1}$, luego ${}^t u_x$ es $(\mathscr{C}_{\mathscr{B}_{\alpha-1}}, \mathscr{C}_{\hat{\mathscr{B}}_{\alpha-1}})$-continua por el Lema 1 (a). Por tanto ${}^t u_x(M) = \{e'_{\Pi x}, \Pi \in M\}$ es una sucesión $\mathscr{C}_{\hat{\mathscr{B}}_{\alpha-1}}$-(localmente) convergente a cero, luego $\mathscr{T}_\alpha$-equicontinua por definición de $\mathscr{T}_\alpha$. Las $e'_{\Pi x}$ son las formas que aparecen en la representación de Π (ver notas previas al Lema 2). Por el resultado (A), M es $\mathscr{T}_{\alpha,s}$-equicontinuo. En definitiva $\mathscr{T}_{s,\alpha} \subset \mathscr{T}_{\alpha,s}$. Para la inclusión contraria consideramos un entorno U de cero en $C(X,E)[\mathscr{T}_{\alpha,s}]$ de la forma $U = \{\phi : \phi(A) \subset V\}$ con A finito $\subset X$ y V un $\mathscr{T}_\alpha$ entorno de cero en E. Podemos suponer que V es la intersección de los polares de los miembros N de una familia finita $\mathscr{N}$ y que cada N es $\mathscr{T}_{\alpha-1}$-equicontinuo o una sucesión $\mathscr{C}_{\hat{\mathscr{B}}_{\alpha-1}}$-(localmente) convergente a cero en $(E[\mathscr{T}_{\alpha-1}])'$. Si $x \in A$, la aplicación $Tx : C(X,E)[\mathscr{T}_{\alpha-1,s}] \to E[\mathscr{T}_{\alpha-1}] : \phi \to \phi(x)$ es continua y $Tx(\mathscr{B}_{\alpha-1}) \subset (\mathscr{B}_{\alpha-1})^{\wedge} = \hat{\mathscr{B}}_{\alpha-1}$. Por el Lema 1 (a) ${}^t Tx : (E[\mathscr{T}_{\alpha-1}])' \to (C(X,E)[\mathscr{T}_{\alpha-1,s}])'$ es $(\mathscr{C}_{\hat{\mathscr{B}}_{\alpha-1}}, \mathscr{C}_{\mathscr{B}_{\alpha-1}})$-continua. Entonces ${}^t Tx(N)$ es equicontinuo en $C(X,E)[\mathscr{T}_{\alpha-1,s}]$ (igual a $C(X,E)[\mathscr{T}_{s,\alpha-1}]$ por inducción) o una sucesión $\mathscr{C}_{\mathscr{B}_{\alpha-1}}$-(localmente) convergente a cero. En cualquier caso es equicontinuo en $C(X,E)[\mathscr{T}_{s,\alpha}]$ por definición de $\mathscr{T}_{s,\alpha}$, o sea $({}^t Tx(N))^\circ$ es $\mathscr{T}_{s,\alpha}$-entorno de cero. Entonces

$$\bigcap_{N \in \mathscr{N}} \bigcap_{x \in A} ({}^t Tx(N))^\circ = \bigcap_{N \in \mathscr{N}} \bigcap_{x \in A} Tx^{-1}(N^\circ) = \bigcap_{x \in A} Tx^{-1}\Big(\bigcap_{N \in \mathscr{N}} N^\circ\Big) =$$

$$= \bigcap_{x \in A} Tx^{-1}(V) = \bigcap_{x \in A} \{\phi : \phi(x) \in V\} = U$$

es también $\mathscr{T}_{s,\alpha}$-entorno de cero, luego $\mathscr{T}_{\alpha,s} \subset \mathscr{T}_{s,\alpha}$. Sea α un ordinal límite. $\mathscr{T}_\alpha$ es una topología más fina que $\mathscr{T}_\beta$ para todo $\beta < \alpha$ luego $\mathscr{T}_{\alpha,s} \supset \mathscr{T}_{\beta,s} = \mathscr{T}_{s,\beta}$ para todo $\beta < \alpha$ y por definición $\mathscr{T}_{\alpha,s} \supset \mathscr{T}_{s,\alpha}$. Sea ahora un $\mathscr{T}_{\alpha,s}$-entorno de cero de la forma $U = \{\phi : \phi(A) \subset V\}$ con A finito $\subset X$ y V $\mathscr{T}_\alpha$-entorno de cero en E. Podemos suponer que V es $\mathscr{T}_\beta$-entorno de cero en E para algún $\beta < \alpha$. Entonces U es $\mathscr{T}_{\beta,s} = \mathscr{T}_{s,\beta}$-entorno de cero y en particular $\mathscr{T}_{s,\alpha}$ entorno. Por tanto $\mathscr{T}_{s,\alpha} \supset \mathscr{T}_{\alpha,s}$ y se tiene la igualdad.

BIBLIOGRAFIA

[1] BUCHWALTER, H. Y SCHMETS, J.: *Sur quelques propriétés de l'espace $C_S(T)$*. J. Math. Pures et Appl. 52 (1973) 337-352.

[2] KOTHE, G.: *Topological Vector Spaces I.* Springer Verlag New-York Berlin Heidelberg (1969).

[3] LLORENS, J. Y MOTOS, J.: *Sobre ciertas clases de espacios localmente convexos.* Rev. Real Acad. Ciencias Madrid LXIX-1° (1975) 157-168.

[4] LLORENS, J. Y MOTOS, J.: *Hereditabilidad de ciertas propiedades de espacios localmente convexos por subespacios de codimensión finita o numerable.* Rev. Real Acad. Ciencias Madrid LXXI-2° (1977) 299-309.

[5] SCHMETS, J.: *Espaces de fonctions continues.* Lecture Notes in Math. 519. Springer Verlag Berlin (1976).

[6] WEBB, J. H.: *Sequential convergence in locally convex spaces.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 64 (1968) 341-364.

[7] WEBB, J. H.: *Sequentially barrelled spaces.* Math. Colloq. Univ. of Cape Town 8 (1973) 73-88.

Departamento de Matemática Aplicada
E.T.S.I. Industriales

Universidad Politécnica de Valencia
Cno. de Vera, s/n
46022-VALENCIA