Algebras de funciones de Baire

Por Salvador Hernandez*

Recibido: 7 de noviembre de 1984

Presentado por el Académico numerario D. Manuel Valdivia

Abstract

An Algebra $\mathcal{A}$ on a Tychonov space X is a subring of $C(X)$ which separates points and closed sets, contains all the real constant functions and is closed under inversion and uniform convergence. Let $\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{A}_0)$ be the family of Baire functions of class α associated to the Algebra $\mathcal{A}$ and let X' be the space X endowed with the G_δ topology. In this paper we prove that the Wallman realcompactification $\nu(X', Z(\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{A}))$ coincides with $\nu(X, Z(\mathcal{A}))$ endowed with the G_δ topology and we give some applications of this results.

Resumen

Un Algebra $\mathcal{A}$ sobre un espacio de Tychonov X es un subanillo de $C(X)$ que separa puntos y conjuntos cerrados, contiene a las funciones reales constantes y es cerrado para inversión y convergencia uniforme. Sea $\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{A})$ la familia de las funciones de Baire de clase α asociadas al Algebra $\mathcal{A}$ y sea X' el conjunto X provisto de la P-topología asociada al espacio X. En este trabajo se prueba que la realcompactación de Wallman $\nu(X', Z(\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{A}))$ coincide con el espacio $\nu(X, Z(\mathcal{A}))'$ y se dan algunas aplicaciones de este resultado.

1 PRELIMINARES, DEFINICIONES Y NOTACION

En este artículo X designará a un espacio topológico de Hausdorff completamente regular y escribiremos $C(X)$ para denotar al anillo de todas las funciones reales continuas en X. Un conjunto cero es un conjunto de la forma $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$, $f \in C(X)$. La familia de todos los conjuntos cero en X vendrá denotada por $Z(X)$. Cuando L sea un subanillo de $C(X)$, el simbolismo $Z(L)$ designará a la familia de conjuntos cero $\{Z(f) : f \in L\}$. Un Algebra $\mathcal{A}$ sobre X es un subanillo de $C(X)$ que separa puntos y conjuntos cerrados, contiene todas las funciones reales constantes y es cerrado para inversión y convergencia uniforme.

Si α es un número ordinal escribiremos $\alpha + 1$ para denotar al número ordinal que le sigue, y $W(\alpha)$ para denotar el conjunto de todos los número ordinales menores que α. El primer ordinal no numerable vendrá denotado por ω_1.

---

*Los resultados de este trabajo forman parte de la tesis del autor escrita, bajo la dirección del profesor Dr. J. L. Blasco, en el Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia, que dirige el profesor Dr. M. Valdivia.

Sea $\mathcal{A}$ un Algebra sobre X, se definen las funciones de Baire de clase α asociadas al Algebra $\mathcal{A}$ inductivamente como sigue:

$\mathfrak{B}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$; supongamos que se define $\mathfrak{B}_\beta(\mathcal{A})$ para todo $\beta < \alpha$, entonces se define $\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{A})$ como la familia de funciones $f \in R^X$ (donde R designa al conjunto de los números reales) tales que f es límite puntual de una sucesión de funciones de $\cup\{\mathfrak{B}_\beta(\mathcal{A})\}$: $\beta < \alpha$. A las funciones de $\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{A})$, $\alpha \in W(\omega_1)$, las denominaremos funciones de Baire de clase α asociadas al Algebra $\mathcal{A}$; es claro que $\mathfrak{B}_\beta(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{A})$ si $\beta < \alpha$. Denotaremos por $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ a la familia de todas las funciones de Baire asociadas al Algebra $\mathcal{A}$, es decir, $\mathfrak{B}(\mathcal{A}) = \cup\{\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{A}) : \alpha \in W(\omega_1)\}$.

Se tiene (ver [6] y [7]) que cada $\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{A})$ es un subanillo de R^X, retículo de funciones y cerrado para inversión y convergencia uniforme. Por consiguiente, si τ_α es la topología inicial sobre X generada por las funciones de $\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{A})$, de las propiedades anteriores se deduce que $\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{A})$ es un Algebra sobre el conjunto de X provisto de la la topología τ_α.

Dada un Algebra $\mathcal{A}$ se verifica (ver [4]) que $Z(\mathfrak{B}(\mathcal{A}))$ coincide con la mínima σ-álgebra de conjuntos que contiene a $Z(\mathcal{A})$. En lo que sigue escribiremos $\sigma(Z(\mathcal{A}))$ (resp. $Z_\alpha(\mathcal{A}), \alpha \in W(\omega_1)$) para denotar a $Z(\mathfrak{B}(\mathcal{A}))$ (resp. $Z(\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{A}), \alpha \in W(\omega_1))$.

Proposición 1.1.– Para todo $\alpha \in \mathrm{W}(\omega_1)$, *la topología* τ_α *coincide con la mínima topología de P-espacio que contiene a la topología del espacio* X, *siendo* $\mathrm{Z}(\mathcal{A})$ *una base de abiertos para dicha topología.*

Demostración.– Denotemos por X' al conjunto X provisto con la mínima topología de P-espacio que contiene a la topología inicial de X, es decir, la topología para la que $Z(X)$ es una base de abiertos. Como $\mathcal{A}$ es un Algebra sobre X se deduce (ver [4],prop. 1.2) que $Z(\mathcal{A})$ es una base de abiertos en X'. Sea Z un elemento de $Z(\mathcal{A})$, entonces existe una aplicación $f \in \mathcal{A}$ tal que $0 \leqslant f \leqslant 1$ y $Z(f) = Z$. Consideremos la función g definida como sigue: $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (n.f(x) \wedge 1)$para todo $x \in X$, entonces $g \in \mathfrak{B}_1(\mathcal{A})$, $g^{-1}(\{0\}) = Z$ y $g^{-1}(\{1\}) = X - Z$.

Por tanto todo elemento de $Z(\mathcal{A})$es un conjunto abierto respecto a la topología τ_1. Por otra parte, se tiene (ver [4]) que la topología de X' coincide con la topología inicial que genera sobre el conjunto X la familia de funciones $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Ya que $\mathfrak{B}(\mathcal{A}) \supset \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{A}) \supset \mathfrak{B}_1(\mathcal{A})$ para todo $\alpha \in W(\omega_1)$, se deduce que la topología de X' coincide con la topología τ_α para todo $\alpha \in W(\omega_1)$; siendo $Z(\mathcal{A})$ una base de abiertos para dicha topología.

2. UNA REPRESENTACION DE LOS ESPACIOS $\nu(X', Z_\alpha(\mathcal{A}))$

Una Base* $\mathfrak{D}$ sobre un espacio X es una base de cerrados que cumple las siguientes propiedades:

*Este concepto se debe a Aló y Shapiro[1] quienes usan el término strong delta normal base. Otro concepto equivalente es el de separating nest generated intersection ring debido a E. F. Steiner [9]

(a) $\mathfrak{D}$ es un anillo de conjuntos cerrados para intersecciones numerables.

(b) Si $x \in X - D, D \in \mathfrak{D}$, entonces existe $E \in \mathfrak{D}$ tal que $x \in E$ y $E \cap D = \phi$.

(c) Si $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$ y son disjuntos, existen E_1 y E_2 en $\mathfrak{D}$ tales que $D_i \cap E_i = \phi$ y $X = E_1 \cup E_2$.

(d) Para cada $D \in \mathfrak{D}$ existe una sucesión $\{E_n\} \subset \mathfrak{D}$ de manera que $D = \cap \{X - E_n\}$: $n \in N$.

Cada Base $\mathfrak{D}$ sobre X tiene asociadas una compactación de tipo Wallman $W(X, \mathfrak{D})$ y una realcompactación de tipo Wallman $\nu(X, \mathfrak{D})$. El espacio $W(X, \mathfrak{D})$ está formado por la familia de todos los $\mathfrak{D}$-ultrafiltros, provista con la topología para la cual una base de cerrados es la colección de todos los conjuntos de la forma $\{\mathcal{U} \in W(X, \mathfrak{D}) : D \in \mathcal{U}\}$, $D \in \mathfrak{D}$. La real compactación $\nu(X, \mathfrak{D})$ es el subespacio de $W(X, \mathfrak{D})$ formado por todos los $\mathfrak{D}$-ultrafiltros reales (cerrados para intersecciones numerables). Para la construcción y propiedades de estos espacio ver [1], [8] y [9].

Si p es un punto $\nu(X, \mathfrak{D})$, denotaremos por $\mathcal{U}_p$ el $\mathfrak{D}$-ultrafiltro real asociado. Escribiremos $cl_{\nu(X, \mathfrak{D})} H$ para la clausura de H en $\nu(X, \mathfrak{D})$ ($cl_\nu H$ cuando no haya lugar a confusión). Denotaremos por $\mathfrak{D}^\nu$ a la familia de los conjuntos $\{ cl_\nu D : D \in \mathfrak{D} \}$, dicha familia está formada por conjuntos cero de $\nu(X, \mathfrak{D})$ y es una Base en dicho espacio (ver [2], corolario 3.4).

En [4] Blasco ha probado el siguiente resultado.

Teorema 2.1.-Dada un Algebra $\mathcal{A}$ sobre X, *se verifica que* $\nu(X', \sigma(Z(\mathcal{A})))$ *y* $\nu(X, Z(\mathcal{A}))'$ *son dos realcompactaciones equivalentes** *del espacio* X'.

A continuación se va a dar una representación de los espacios $\nu(X', Z_\alpha(\mathcal{A}))$, $\alpha \in W(\omega_1)$. Para ello será necesario el siguiente lema.

Lema 2.2.– Sea $\mathcal{A}$ *un Algebra sobre* X *y* $\mathfrak{D}$ *una Base en* X *tal que* $Z(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{D} \subset \sigma(Z(\mathcal{A}'))$. *Entonces*:

(a) *Si* $p \in \nu(X, Z(\mathcal{A}))$, *la familia de conjuntos* $W_{\mathfrak{D}}(\mathcal{U}_p) = \{G \in \mathfrak{D}: G \supset E, E \in \mathcal{U}_p\}$ *es un* $\mathfrak{D}$-*ultrafiltro real.*

(b) *Si* $\mathcal{U}$ *es un* $\mathfrak{D}$-*ultrafiltro real, entonces* $\mathcal{U} \cap Z(\mathcal{A})$ *es un* $Z(\mathcal{A})$-*ultrafiltro real.*

---

*Dos extensiones T_1 y T_2 de un espacio X se dice que son equivalentes si existe un homeomorfismo de T_1 sobre T_2 cuya restricción a X es identidad.

Demostración.– Aplicando ([4], lema 3.1) se tiene que $W_{\sigma(Z(\mathcal{A}))}(\mathcal{U}_p)$ es un $\sigma(Z(\mathcal{A}))$-ultrafiltro real y como $\sigma(\mathfrak{D}) = \sigma(Z(\mathcal{A}))$ se deduce, aplicando de nuevo([4], lema 3.1), que $W_{\sigma(Z(\mathcal{A}))}(\mathcal{U}_p) \cap \mathfrak{D}$ es un $\mathfrak{D}$-ultrafiltro real. Ya que $W_{\mathfrak{D}}(\mathcal{U}_p) = W_{\sigma(Z(\mathcal{A}))}(\mathcal{U}_p) \cap \mathfrak{D}$, (a) queda demostrado.

Sea $\mathcal{U}$ un $\mathfrak{D}$-ultrafiltro real. Como $\sigma(\mathfrak{D}) = \sigma(Z(\mathcal{A}))$ se tiene, por el apartado anterior que $W_{\sigma(Z(\mathcal{A}))}(\mathcal{U})$ es un $\sigma(Z(\mathcal{A}))$-ultrafiltro real. Por consiguiente, aplicando ([4], lema 3.1), se deduce que $W_{\sigma(Z(\mathcal{A}))}(\mathcal{U}) \cap Z(\mathcal{A}) = \mathcal{U} \cap Z(\mathcal{A})$ es un $Z(\mathcal{A})$-ultrafiltro real, lo que prueba (b).

Teorema 2.3.– Sea X *un espacio arbitrario, y sea* $\widetilde{X}$ *el conjunto* X provisto con una topología más fina que la topología inicial de X *y menos fina que la topología de* X′. *Entonces:*

(a) *Si* X *es realcompacto,* $\widetilde{X}$ *es realcompacto.*

(b) *Si* $\widetilde{X}$ *es realcompacto y* $Z(\widetilde{X}) \subset \sigma(Z(X))$, X *es realcompacto.*

Demostración.

(a) Ya que X es realcompacto se tiene que $\nu(X', \sigma(Z(X'))) = X'$. Por otra parte, $\widetilde{X}' = X'$ y $\sigma(Z(\widetilde{X}))) \supset \sigma(Z(X))$, de donde se comprueba sin dificultad que todo $\sigma(Z(\widetilde{X}))$-ultrafiltro real es fijo. Por lo tanto, ya que $\widetilde{X}' = X'$, se tiene que $\nu(\widetilde{X}', \sigma(Z(\widetilde{X}))) = \widetilde{X}'$. De esta igualdad y del teorema 2.1 se deduce que $\widetilde{X}$ es realcompacto.

(b) Se tiene que $\widetilde{X}$ es realcompacto y $Z(X) \subset Z(\widetilde{X}) \subset \sigma(Z(X))$. Aplicando el lema anterior se deduce que X es realcompacto.

Teorema 2.4.– Sea $\mathcal{A}$ *un Algebra sobre* X, *entonces* $\nu(X', Z_\alpha(\mathcal{A}))$ *coincide con el espacio* $\nu(X, Z(\mathcal{A}))'$ *para todo* $\alpha \in W(\omega_1)$.

Demostración.– Del lema anterior se deduce que existe una biyección entre los espacios $\nu(X, Z(\mathcal{A}))$, $\nu(X', \sigma(X(\mathcal{A})))$ y $\nu(X', Z_\alpha(\mathcal{A}))$ para todo $\alpha \in W(\omega_1)$. Denotemos por T_α a la biyección existente entre $\nu(X, Z(\mathcal{A}))$ y $\nu(X', Z_\alpha(\mathcal{A}))$

Puesto que $\nu(X, Z(\mathcal{A}))$ está formado por todos los $Z(\mathcal{A})$-ultrafiltros reales y, respectivamente, $\nu(X', Z_\alpha(\mathcal{A}))$ está formado por todos los $Z_\alpha(\mathcal{A})$-ultrafiltros reales, la biyección T_α está definida, aplicando el lema 2.2, de la siguiente forma:

Sea $p \in \nu(X, Z(\mathcal{A}))$ y $\mathcal{U}_p$ el $Z(\mathcal{A})$ultrafiltro correspondiente, entonces $T_\alpha(p)$ es el punto de $\nu(X', Z_\alpha(\mathcal{A}))$ asociado al $Z_\alpha(\mathcal{A})$-ultrafiltro $W_{Z_\alpha(\mathcal{A})}(\mathcal{U}_p)$.

De la definición anterior se deduce que si $D \in Z(\mathcal{A})$, entonces $T_\alpha(cl_{\nu(X,Z(\mathcal{A}))} D) = cl_{\nu(X',Z_\alpha(\mathcal{A}))} D$ para todo $\alpha \in W(\omega_1)$. Por lo tanto podemos denotar, sin riesgo de confusión, dicho conjunto por $cl_\nu D$.

Sea $\mathcal{A}^{\nu} = \{f \in C(\nu(X, Z(\mathcal{A})) : f_{|X} \in \mathcal{A}\}$. De ([3], teor. 1) y ([2], corol. 34) se deduce que $\mathcal{A}^{\nu}$ es un Algebra en $\nu(X, Z(\mathcal{A}))$ verificando que $Z(\mathcal{A}^{\nu}) = Z(\mathcal{A})^{\nu}$.

Se tiene, aplicando la proposición 1.1, que la familia $Z(\mathcal{A})^{\nu}$ es una base de abiertos en $\nu(X, Z(\mathcal{A}))'$. Demostraremos que $Z(\mathcal{A})^{\nu}$ es también una base de abiertos en $\nu(X', Z_{\alpha}(\mathcal{A}))$.

Sean $p \in \nu(X', Z_{\alpha}(\mathcal{A}))$ y $D \in Z_{\alpha}(\mathcal{A})$ tales que $p \notin cl_{\nu(X', Z_{\alpha}(\mathcal{A}))}D$. Entonces existe un conjunto $D' \in Z_{\alpha}(\mathcal{A})$ de manera que $p \in cl_{\nu(X', Z_{\alpha}(\mathcal{A}))}D'$ y $D \cap D' = \phi$. Por el lema 2.2, existe un conjunto cero $E \in Z(\mathcal{A})$ verificando que $E \subset D'$ y $p \in cl_{\nu}E$. Ya que $Z(\mathcal{A}) \subset Z_{\alpha}(\mathcal{A})$, se deduce que $cl_{\nu}E \cap cl_{\nu(X', Z_{\alpha}(\mathcal{A}))}D = \phi$, por lo tanto $p \in cl_{\nu}E \subset \nu(X', Z_{\alpha}(\mathcal{A})) - cl_{\nu(X', Z_{\alpha}(\mathcal{A}))}D$.

Como la familia $Z_{\alpha}(\mathcal{A})^{\nu}$ es una base de cerrados en $\nu(X', Z_{\alpha}(\mathcal{A}))$, queda probado que $Z(\mathcal{A})^{\nu}$ es una base de abiertos en dicho espacio.

Si consideramos la biyección T_{α} entre los espacios $\nu(X, Z(\mathcal{A}))$ y $\nu(X', Z_{\alpha}(\mathcal{A}))$ es claro que $T_{\alpha}(X) = X$ para todo $\alpha \in W(\omega_1)$. Por otra parte, $T_{\alpha}(cl_{\nu(X, Z(\mathcal{A}))}D) = cl_{\nu(X', Z_{\alpha}(\mathcal{A}))}D$ para todo $D \in Z(\mathcal{A})$. Es decir, la imagen por T_{α} de la base de abiertos $Z(\mathcal{A})^{\nu}$ de $\nu(X, Z(\mathcal{A}))'$ es una base de abiertos de $\nu(X', Z_{\alpha}(\mathcal{A}))$. Esto prueba que $\nu(X, Z(\mathcal{A}))'$ y $\nu(X'\ Z_{\alpha}(\mathcal{A}))$ son dos real compactaciones equivalentes de X' para todo $\alpha \in W(\omega_1)$.

Corolario.– Sea $\mathcal{A}$ *un Algebra sobre un espacio* X *tal que* $\mathcal{B}_{\alpha}(\mathcal{A}) \neq \mathcal{B}_{\alpha+1}(\mathcal{A})$, $\alpha \in W(\omega_1)$. *Entonces las Algebras* $\mathcal{B}_{\delta}(\mathcal{A}) 1 \leqslant \delta \leqslant \alpha$, *no son isomorfas a ningún anillo de la forma* C(Y).

Demostración.– Es conocido (ver [9], teor. 4.3) que si un Algebra $\mathcal{B}$ sobre X es isomorfa a un anillo de la forma $C(Y)$, entonces $\nu Y = \nu(X, Z(\mathcal{B}))$ y $\mathcal{B} = C(\nu(X, Z(\mathcal{B})))|_X$.

Si $\mathcal{B}_{\alpha}(\mathcal{A}) \neq \mathcal{B}_{\alpha+1}(\mathcal{A})$ entonces, por el teorema anterior, $\mathcal{B}_{\delta}(\mathcal{A}) \neq C(\nu(X', Z_{\delta}(\mathcal{A})))|_X$ para cada δ tal que $1 \leqslant \delta \leqslant \alpha$. En consecuencia $\mathcal{B}_{\delta}(\mathcal{A})$ no es isomorfa a ningún anillo de la forma $C(Y)$ para todo δ tal que $1 \leqslant \delta \leqslant \alpha$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALO R. A. Y SHAPIRO, H. L.: Normal Topological spaces, Cambridge Univ. Press, 1974.

[2] ———— Y WEIR, M.: Realcompactness and Wallman realcompactification, *Port. Math.* 34(1975) 33-43.

[3] D'ARISTOTLE, A. J.: A note on Z-realcompactifications, *Proc. Amer. Math. Soc.* 32(1972) 615-618.

[4] BLASCO, J. L.: Funciones de Baire asociadas a ciertas subálgebras de $C(X)$, *Rev. Real Acad. de Ciencias Exactas Físicas y Naturales* 65 (1981) 241-256.

[5] GORDON, H.: Rings of functions determined by zero-sets, *Pacific J. Math.* 36 (1971) 133-157.

[6] HAUSDORFF, F.: Set Theory, Chelsea Publishing Company (1978), New York.

[7] MAULDIN, R. D.: On the Baire system generated by a linear lattice of functions, *Fund. Math* 68 (1970) 51-59.

[8] STEINER, E. F.: Wallman spaces and compactifications, *Fund. Math.* 61 (1968) 295-304.

[9] STEINER A. K. Y STEINER, E. F.: Nest generated intersection ring in Tychonov spaces, *Trans Amer. Math Soc.* 148 (1970) 589-601.

Cátedra de Matemáticas II
Facultad de Matematicas
Burjasot (Valencia).