Sobre el operador de extensión de Whitney y la representación de los espacios B_1^k (Ω, E)

Por (*)Pablo Galindo Pastor

Recibido: 10 octubre 1984

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia

Abstract

The aim of this paper is to obtain a representation of $B_1^k(\Omega, E)$ under some conditions on Ω. In order to find it, an extension operator defined for functions whose domain is more general than a cube is needed; our construction follows essentially the one given by Whitney.

Resumen

El objetivo de este artículo es obtener una representación del espacio $B_1^k(\Omega, E)$ bajo ciertas condiciones de Ω. Para ello, se necesita un operador de extensión definido para funciones cuyo dominio es más general que un cubo; nuestra construcción sigue esencialmente la de Whitney.

I. PRELIMINARES

La palabra "espacio" designará a cualquier espacio vectorial complejo localmente convexo y separado, $E; \mathscr{P}$ representará a una familia de seminormas que define la topología de E. Si E y G son dos espacios isomorfos, pondremos $E \simeq G$. Si $A \subset E$, A^0 es el polar absoluto de A.

$1^\infty(E)$ será el espacio de las sucesiones de E acotadas dotado de la topología definida por las seminormas

$$|(x_n)| : = \sup \{q(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \quad q \in \mathscr{P} \quad (x_n) \in 1^\infty(E)$$

$1^\infty(E)$ tiene la propiedad de complementación de Pelczynski es decir, si G es un espacio isomorfo a un subespacio complementado de $1^\infty(E)$ y G tiene un subespacio complementado isomorfo a $1^\infty(E)$, entonces

$$G \simeq 1^\infty(E) \quad [2]$$

Puede deducirse de esto que

(*) Este trabajo se ha efectuado bajo la dirección del Prof. Dr. M. Valdivia en el Dpto. de Teoría de Funciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia y ha obtenido el accésit de los "II Premios de Investigación para Profesores de Enseñanzas Medias" de Matemáticas.

$$1^{\infty}(E) \times E \simeq 1^{\infty}(E)$$

Sean E y G espacios y $f\colon E \to G$ lineal y continua; si existe $g\colon G \to E$ lineal y continua tal que $g \circ f = Id_E$, entonces f es abierta (en la imagen) y $f(E)$ tiene complemento topológico. Así E es isomorfo a un subespacio complementado de G [6].

Llamaremos "cubos" (en $\mathbb{R}^n$) a los productos cartesianos de n intervalos compactos; pondremos

$$I := [-1, 1]^n.$$

En lo sucesivo Ω representará un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$. En [7] Valdivia construye una partición de la unidad para Ω: Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ consideraremos los cubos de la forma

$$\{(x_1, \ldots, x_n)\colon\ a_i \leqslant x_i \leqslant a_i + 1 \quad i = 1, \ldots, n \quad a_i \in Z\} \tag{*}$$

Si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, sea $\mathscr{B}_1$ la familia de los cubos de la forma (*) contenidos en Ω cuya distancia a $\mathbb{R}^n - \Omega$ es mayor o igual que $\sqrt{n}$; por recurrencia se construyen las familias $\mathscr{B}_{m+1}$ de cubos de la forma

$$\{(x_1, \ldots, n_n)\colon\ \frac{a_i}{2^m} \leqslant x_i \leqslant \frac{(a_i + 1)}{2^m}, \quad i = 1, \ldots, n \quad a_i \in Z\}$$

contenidos en Ω cuya distancia a $\mathbb{R}^n - \Omega$ es mayor o igual que $\dfrac{\sqrt{n}}{2^m}$

y no contenidos en ningún cubo de las familias $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_m$. Ordenamos entonces los cubos de

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathscr{B}_m$$

en una sucesión $\{B_r\}$; también $\{B_r\}$ designará a la familia de los cubos de (*) cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$. En cualquiera de ambos casos de Ω pondremos

$$B_r := \{(x_1, \ldots, x_n)\colon\ \frac{a_i(r)}{2^{k(r)}} \leqslant x_i \leqslant \frac{a_i(r) + 1}{2^{k(r)}} \quad i = 1, \ldots, n \quad a_i(r) \in Z\}$$

Sea

$$\mathrm{J} := \left[\frac{-4\sqrt{n}}{4\sqrt{n} + 1}, \frac{4\sqrt{n}}{4\sqrt{n} + 1}\right]^n \quad \text{y} \quad g_r\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$g_r(x_1, \ldots, x_n) := \left(\frac{2a_1(r) + 1}{2^{k(r)+1}} + \frac{4\sqrt{n} + 1}{2^{k(r)+3}\sqrt{n}} x_1, \ldots\right.$$

$$\ldots, \frac{2a_n(r)+1}{2^{k(r)+1}} + \frac{4\sqrt{n}+1}{2^{k(r)+3}\sqrt{n}} x_n \Big)$$

pondremos $A_r := g_r(I)$ y notemos que $B_r = g_r(J)$. Con ello se obtiene que tanto $\{B_r\}$, como $\{\mathring{A}_r\}$ son recubrimientos localmente finitos de Ω; a lo sumo 4^n elementos de $\{\mathring{A}_r\}$ tienen intersección no vacía. Además si B_r es tal que $k(r) > 0$, entonces

$$d(B_r, \mathbb{R}^n - \Omega) \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2^{k(r)-2}}.$$

También si $r \neq r'$,

$$\mathring{B}_{r'} \cap \mathring{B}_r = \phi.$$

Si $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ diremos que es un multiíndice, pondremos

$$|\alpha| := |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|, \quad H := \{\alpha : |\alpha| \leqslant k\} \qquad \text{y}$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!\,.$$

II. ESPACIOS DE FUNCIONES QUE VAMOS A UTILIZAR

La siguiente definición se debe a Whitney en el caso escalar y permite "ampliar" el concepto de función de clase C^k a conjuntos no necesariamente abiertos [9].

1. Definición.– Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ y sea E un espacio. Dada la familia $\{f_\alpha : \alpha \in H\}$ de funciones de F en E, llamamos

$$P_{k,0}(x, y) := \sum_{\alpha \in H} \frac{f_\alpha(y)}{\alpha!}(x-y)^\alpha \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad y \in F$$

y llamamos

$$P_{k,\alpha}(x, y) := D^\alpha P_{k,0}(x, y)$$

donde la derivación se realiza respecto a x, es decir

$$P_{k,\alpha}(x, y) = \sum_{|\beta| < k - |\alpha|} \frac{f_{\alpha+\beta}(y)}{\beta!}(x-y)^\beta$$

Entonces diremos que $f_0 =: f$ es de clase C^k en F en términos de $\{f_\alpha : \alpha \in H\}$ si para cada $\varepsilon > 0$, $q \in \mathscr{P}$ y $a \in F$, existe un entorno U de a tal que si $x, y \in U \cap F$, se tiene

$$q\,[f_\alpha(x) - P_{k,\alpha}(x,y)] \leqslant \varepsilon \cdot d(x,y)^{k-|\alpha|}$$

para cada $\alpha \in H$.

De la definición anterior se deduce que las funciones f_α son continuas y que en cada $x \in \mathring{F}$,

$$D^\alpha f(x) = f_\alpha(x);$$

se observa, pues, que si F es la clausura de un abierto, las funciones f_α están unívocamente determinadas por f.

Como consecuencia del resultado principal del próximo apartado, cuando F sea cerrado, las funciones de clase C^k en el sentido de la anterior definición no serán sino restricciones a F de funciones de clase C^k en $\mathbb{R}^n$.

2. Definición.– Llamemos $W^k(F, E)$ al espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ formado por las familias, $\{f_\alpha : \alpha \in H\}$, de funciones acotadas de F en E tales que f_0 es de clase C^k en F en términos de $\{f_\alpha\}$. Estará provisto de la topología definida por las seminormas

$$\|(f_\alpha)\|_q^F := \sum_{\alpha \in H} \sup \{q\,[f_\alpha(x)] : x \in F\} \qquad q \in \mathscr{P}.$$

Cuando $\{f_\alpha : \alpha \in H\}$ quede determinada por $f_0 = f$, escribiremos $\|f\|_q^F$ en lugar de $\|(f_\alpha)\|_q^F$ y cuando $F = \mathbb{R}^n$, suprimiremos la referencia a F en la notación.

3. Definición.– Sea $Q \subset \mathbb{R}^n$ un cubo, $\mathring{Q} \neq \phi$, designamos con $C^k(Q, E)$ al subespacio de $C^k(\mathring{Q}, E)$ formado por las funciones cuyas derivadas se pueden extender de manera continua a Q.

Si $f \in C^k(Q, E)$, representaremos por $\tilde{f}$ (resp. $\tilde{D}^\alpha f$) a dichas extensiones.

4. Proposición.– $C^k(Q, E)$ y $W^k(Q, E)$ se identifican por medio de la aplicación

$$i: C^k(Q, E) \longrightarrow W^k(Q, E)$$

definida por

$$i(f) := \{\tilde{D}^\alpha f : \alpha \in H\}.$$

Demostración.– Sea $f \in C^k(Q, E)$ y sean $a \in Q$, $q \in \mathscr{P}$ y $\varepsilon > 0$. Sea $u \in E'$ tal que

$$u \in [q^{-1}\ (0, 1)]^{0}.$$

Como $\tilde{D}^{\alpha+\beta} f$ son continuas en a, existe un entorno V de a convexo, $V \subset U$, tal que si $t \in V \cap Q$,

$$\sum_{|\beta|=k-|\alpha|} q\,[D^{\alpha+\beta} f(t) - D^{\alpha+\beta} f(a)] \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Entonces aplicando la fórmula de Taylor resultará

$$|Re\ \{u\,[D^{\alpha} f(x) - P_{k,\alpha}(x, y)]\}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\beta|=k-|\alpha|} \{|D^{\alpha+\beta}\, Re\,(u \circ f)(s) - Re\, D^{\alpha+\beta}(u \circ f)(a)| +$$

$$+ |Re\, D^{\alpha+\beta}(u \circ f)(a) - D^{\alpha+\beta}\, Re\,(u \circ f)(y)|\}\, d(x, y)^{k-|\alpha|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\, d(x, y)^{k-|\alpha|}$$

si $x, y \in V \cap \mathring{Q}$ ya que también $s \in V \cap \mathring{Q}$.

Razonando análogamente con la parte imaginaria, y como V es independiente de u, obtendríamos la desigualdad

$$q\,[D^{\alpha} f(x) - \sum_{|\beta|<k-|\alpha|} D^{\alpha+\beta} f(y)\,\frac{(x-y)^{\beta}}{\beta!}] \leqslant \varepsilon \cdot d(x, y)^{k-|\alpha|}$$

$$x, y \in V \cap \mathring{Q}.$$

Si elegimos V abierto, $V \cap \mathring{Q}$ es denso en $V \cap Q$, luego la anterior desigualdad entre funciones continuas resultará también si

$$x, y \in V \cap Q$$

lo que prueba que $i(f) \in W^{k}(Q, E)$.

La linealidad de i resulta también de la densidad de $\mathring{Q}$ en Q. Si $i(f) = 0$, entonces $f = 0$ en $\mathring{Q}$ y por tanto $f = 0$, así i es inyectiva. Además i es sobre, pues si $(f_{\alpha}) \in W^{k}(Q, E)$, se tiene que $f_0 \in C^{k}(\mathring{Q}, E)$ con $D^{\alpha} f_0 = f_{\alpha}$ en $\mathring{Q}$ y $D^{\alpha} f_0$ admite como prolongación a Q, a f_{α}.

Como consecuencia de este resultado, podemos dotar a $C^{k}(Q, E)$ de la topología definida por las seminormas de 2 y entonces, i será un isomorfismo topológico.

5. Definición.— $B^{k}(\mathbb{R}^{n}, E)$ es el espacio de las funciones definidas en $\mathbb{R}^{n}$ con valores en E de clase C^{k} tales que ellas y sus derivadas son acotadas.

Teniendo en cuenta la observación que sigue a 1, podemos identificar B^k $(\mathbb{R}^n, E)$ con W^k $(\mathbb{R}^n, E)$ y dotar al primero de la topología definida por $\|f\|_q$ $q \in \mathscr{P}$, como es habitual.

6. *Definición.*— Si L es un compacto de $\mathbb{R}^n$ y A, un cerrado, tales que $\overset{\circ}{L} - A \neq \phi$, $\mathscr{D}_A^k$ (L, E) es el subespacio de B^k $(\mathbb{R}^n, E)$ formado por las funciones de soporte contenido en L y cuyas derivadas se anulan en A. Lo proveeremos de la topología inducida. Si $A = \phi$, pondremos $\mathscr{D}^k$ (L, E).

Si Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$, B_1^k (Ω, E) es el subespacio de B^k $(\mathbb{R}^n, E)$ cuyas funciones tienen sus derivadas nulas en $\mathbb{R}^n - \Omega$. Tendrá la topología inducida.

En [1] se prueba que

$$B^k (\mathbb{R}^n, E) \simeq 1^\infty (C^k (I, E))$$

y en [4] que,

$$\mathscr{D}_A^k (L, E) \simeq \dot{C}^k (I, E) \simeq C^k (Q, E).$$

III. EL OPERADOR DE EXTENSION

Para la construcción del operador seguiremos la técnica empleada por Hestenes en [5] quien simplifica la utilizada por Whitney en [9].

A lo largo de todo el apartado F representa un cerrado no vacío de $\mathbb{R}^n$, $F \neq \mathbb{R}^n$, 0 un abierto tal que $F \subset 0$ y de manera que si

$$d: = d (F, \mathbb{R}^n - 0), \quad 0 < d < 1$$

y si

$$V: = \{x \in \mathbb{R}^n : d (x, F) \leqslant \frac{d}{4}\}, \quad d (F, \mathbb{R}^n - V) \geqslant \frac{d}{4}$$

Si $\Omega' : = 0 - F$, Ω' es abierto, luego podemos construir los recubrimientos de Ω', $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ y $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ formados por cubos y cuya existencia hemos citado en los preliminares; para cada $x \in \Omega'$, existe $i (x) \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{i(x)}$. Sea $\mathscr{U} : = \{i \in \mathbb{N}: A_i \subset V\}$, notemos que si $i \in \mathscr{U}$, $k (i) > 0$ pues $d < 1$.

Los próximos lemas son de carácter técnico y su demostración depende sólo de las propiedades enunciadas de los recubrimientos; las omitiremos por razones de brevedad.

1. Lema.– Si $x \notin F$ y $d(x, F) < \dfrac{d}{32}$, entonces

$$\{i \in \mathbb{N} : x \in \mathring{A}_i\} \subset \mathcal{U} .$$

En particular, como $x \in \Omega'$, se tiene que $i(x) \in \mathcal{U}$.

2. Lema.– Si $i \in \mathcal{U}$, entonces

$$d(B_i, F) = d(B_i, F \cup (\mathbb{R}^n - 0)).$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $a_i \in F \cup (\mathbb{R}^n - 0)$ tal que

$$d(B_i, a_i) = d(B_i, F \cup (\mathbb{R}^n - 0))$$

y además cuando $i \in \mathcal{U}$, tomaremos $a_i \in F$ tal como permite el anterior lema.

3. Lema.– Sea $x \in \mathring{A}_i$ con $k(i) > 0$, entonces

(3.1) $d(x, a_i) \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{2^{k(i)-4}}$

(3.2) Si $a \in F$, $\quad d(a_i, a) \leqslant (2^5 \sqrt{n} + 1)\, d(x, a)$

(3.3) Si $a \in F$, $\quad d(a_i, a_{i(x)}) \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{2^{k(i(x))-6}} \leqslant 2^6 \cdot d(x, a)$.

4. Lema.– Existe una constante $A = A(n, d)$ tal que si $x \in \overline{V} - F$ con $i(x) \notin \mathcal{U}$, entonces $2^{k(i(x))} \leqslant A$.

Sea h una función real de clase C^∞ definida en $\mathbb{R}^n$ de manera que $h(x) = 0$ si $x \in J$, $h(x) = 1$ si $x \notin I$ y $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Para cada $i \in \mathcal{U}$, sea $k_i := h \circ g_i^{-1}$; como $\mathcal{U}$ es infinito y por comodidad, haremos $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, entonces pondremos

$$h_1 := 1 - k_1, \quad h_2 := k_1(1 - k_2), \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad h_m := k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_{m-1} \cdot (1 - k_m);$$

cada h_i es C^∞ y sop $h_i \subset A_i$. Además, si $x \in B_m$,

$$(h_1 + h_2 + \ldots + h_m)(x) = 1.$$

5. Lema.— Existe una constante $K > 0$ tal que si $i \in \mathcal{U}$, β es un multiíndice con $|\beta| \leqslant k + 1$ y $x \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$|D^\beta h_i(x)| \leqslant K^{4^n} (2^{k(i)+2})^{|\beta|} \cdot 4^{n|\beta|}.$$

6. Proposición.— Sea $\{f_\alpha : \alpha \in H\}$ una familia de funciones continuas en $\mathbb{R}^n$ con valores en E tales que $f_0 := f$ es de clase C^k en términos de $\{f_\alpha\}$ tanto en F, como en $\mathbb{R}^n - F$, entonces f es de clase C^k en $\mathbb{R}^n$ y $D^\alpha f(x) = f_\alpha(x)$.

Demostración.— Basta efectuar la prueba para $k = 1$ y por la observación que sigue a II.1, comprobar que existe

$$D_i f(a) = f_i(a) \quad \text{para} \quad a \in Fr(F)$$

Sean $q \in \mathcal{P}$ y $\varepsilon > 0$ y U un entorno de a tal que si

$$a + h \cdot e_i \in U \cap F \qquad q\,[f(a + h \cdot e_i) - f(a) - f_i(a)\,h] \leqslant \varepsilon \cdot |h|,$$

luego

$$q\left[\frac{f(a + h \cdot e_i) - f(a)}{h} - f_i(a)\right] < \varepsilon$$

En el caso $a + h \cdot e_i \notin F$, sea

$$M := \{h' : 0 < h' < h \quad \text{con} \quad (a + h' \cdot e_i,\ a + h \cdot e_i) \cap F \neq \phi\}$$

$$\text{y} \quad t := \inf M,$$

entonces

$$(a + t \cdot e_i,\ a + h \cdot e_i) \cap F \neq \phi \quad \text{y} \quad a + t \cdot e_i \in F.$$

Si

$$u \in [\mathrm{q}^{-1}(0, 1)]^0 \subset E', \qquad Re\,(u \circ f)$$

es derivable en $\mathbb{R}^n - F$ y continua en $\mathbb{R}^n$, luego en $[a + t \cdot e_i,\ a + h \cdot e_i]$ se puede aplicar el teorema del valor medio y con ello,

$$Re\, u\left[\frac{f(a + h \cdot e_i) - f(a)}{h} - f_i(a)\right] =$$

$$Re\, u\left[\frac{f(a + h \cdot e_i) - f(a + t \cdot e_i) + f(a + t \cdot e_i) - f(a)}{h} - f_i(a)\right] =$$

$$= \frac{D_i Re\,(u \circ f)\,(a + \Theta e_i)\,(h - t)}{h} +$$

$$+ Re\, u \left[\frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a) - f_i(a)\, t - f_i(a)(h - t)}{h}\right] =$$

$$= \frac{h - t}{h} [D_i Re\, (u \circ f)(a + \theta e_i) - Re\, u \circ f_i(a)] +$$

$$+ Re\, u \left[\frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a) - f_i(a)\, t}{h}\right]$$

Como en $\mathbb{R}^n - F$, $D_i f(x) = f_i(x)$ y f_i es continua en $\mathbb{R}^n$, existe una bola U_1, abierta con $a \in U_1 \subset U$ y tal que si $x \in U_1$,

$$q\, [f_i(x) - f_i(a)] < \frac{\varepsilon}{4};$$

entonces si $a + h \cdot e_i \in U_1$, también $a + t \cdot e_i \in U_1$ luego

$$\left| Re\, u \left[\frac{f(a + h \cdot e_i) - f(a)}{h} - f_i(a)\right] \right| \leqslant \frac{|h - t|}{|h|} \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{|t|}{|h|} \cdot \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

El mismo razonamiento vale para la parte imaginaria de u y como U_1 no depende de u, se tiene

$$q \left[\frac{f(a + h \cdot e_i) - f(a)}{h} - f_i(a)\right] < \varepsilon \qquad \text{c.q.d.}$$

El lema siguiente se debe a Whitney en el caso escalar [10] y, para el caso vectorial, la prueba se sigue de manera inmediata del caso escalar.

7. Lema.– Sea C un arco de longitud a cuyos extremos son los puntos b y b'; sea $f\colon C \to E$ una función de clase C^k en C en términos de la familia $\{f_\alpha\colon \alpha \in H\}$ y supongamos que para $q \in \mathscr{P}$ existe M_q tal que

$$q\, [f_\alpha(x) - f_\alpha(b')] \leqslant M_q \qquad \forall x \in C \qquad |\alpha| = k$$

Entonces para cada $\beta \in H$,

$$q\, [f_\beta(b) - P_{k,\beta}(b, b')] \leqslant M_q \cdot n\, (k + 1)^n\, a^{k - |\beta|}$$

8. Lema.– Si f es de clase C^k en F en términos de $\{f_\alpha\colon \alpha \in H\}$, dados $\varepsilon > 0$, $q \in \mathscr{P}$ y $a \in Fr\,(F)$ existe un entorno, A, de a tal que

$$q\,[P_{k,\alpha}(x,b) - P_{k,\alpha}(x,b')] <$$

$$< \varepsilon \cdot \sum_{|\beta| < k-|\alpha|} d\,(b,b')^{k-|\alpha|-|\beta|} \frac{d\,(x,b)^{|\beta|}}{\beta!} \tag{8.1}$$

si $b, b' \in A$ y

$$q\,[P_{k,\alpha}(x,b) - f_\alpha(a)] < \varepsilon \qquad \text{si} \quad b, x \in A. \tag{8.2}$$

Demostración.— Sea $u \in [q^{-1}(0,1)]^0$. Efectuando el desarrollo de Taylor en b de $Re\, u\,(P_{k,\alpha}(x,b'))$ resultará ser

$$\sum_{|\beta| < k-|\alpha|} Re\, u\,(P_{k,\alpha+\beta}(b,b')) \frac{(x-b)^\beta}{\beta!}$$

y

$$Re\, u\,[P_{k,\alpha}(x,b) - P_{k,\alpha}(x,b')] =$$

$$= \sum_{|\beta| < k-|\alpha|} Re \left\{ u\,[f_{\alpha+\beta}(b') - P_{k,\alpha+\beta}(b,b')] \frac{(x-b)^\beta}{\beta!} \right\}$$

Sea U el correspondiente entorno de II.1 para $\varepsilon/2$; si $b, b' \in U \cap F$,

$$|Re\, u\,[P_{k,\alpha}(x,b) - P_{k,\alpha}(x,b')]| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\beta| < k-|\alpha|} \frac{\varepsilon}{2} d\,(b,b')^{k-|\alpha|-|\beta|} \frac{d\,(x,b)^{|\beta|}}{\beta!}$$

Un razonamiento análogo con $Im\, u$ nos permitirá asegurar (8.1) para cualquier entorno $A \subset U$.

(8.2) se obtiene a partir de la continuidad de $P_{k,\alpha}(\cdot, b)$ en b, de que $P_{k,\alpha}(b,b') = f_\alpha(b)$ y de la continuidad en F de f_α.

El teorema siguiente es el resultado fundamental de este apartado; el operador de extensión que se construye es el deseado. Sea $f\colon F \to E$ de clase C^k en términos de $\{f_\alpha\colon \alpha \in H\}$. Si $i \in \mathcal{U}$, denotaremos

$$G_i(x) := P_{k,0}(x, a_i)$$

y llamaremos Tf a la función definida en $\mathbb{R}^n$ con valores en E según

$$Tf(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in F \\ \sum_{i=1}^{\infty} G_i(x) \cdot h_i(x) & \text{si} \quad x \notin F. \end{cases} \tag{9}$$

9. Teorema.– Tf es de clase C^k en $\mathbb{R}^n$ y si $x \in F$,

$$D^\alpha Tf(x) = f_\alpha(x).$$

Además Tf es C^∞ en $\mathbb{R}^n - F$ y sop $Tf \subset \overline{V}$.

Demostración.– Como $\{A_i\}$ es localmente finita en Ω' y tanto h_i, como G_i son C^∞, resulta que Tf está bien definida y es C^∞ en Ω'. Si $x \notin F$ y $x \notin \Omega'$, entonces $x \notin 0$, luego $x \notin \overline{V}$ por lo que existe un entorno de x que no corta a ningún A_i, $i \in \mathcal{U}$, es decir Tf se anula en todos los puntos de dicho entorno por lo que también es C^∞ en x.

Sean
$$(Tf)_\alpha(x) := \begin{cases} f_\alpha(x) & \text{si} \quad x \in F \\ D^\alpha \{\sum_{i=1}^{\infty} G_i \cdot h_i\}(x) & \text{si} \quad x \notin F \end{cases}$$

Es inmediato que Tf es de clase C^k en términos de $\{(Tf)_\alpha : \alpha \in H\}$ tanto en F, como en $\mathbb{R}^n - F$, luego por 6, basta que $(Tf)_\alpha$ sean continuas en $\mathbb{R}^n$ para tener probado el teorema. Más aún, basta probar la continuidad de $(Tf)_\alpha$ en $Fr(F)$, es decir ver que si $a \in Fr(F)$,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \notin F}} D^\alpha \{\sum_{i=1}^{\infty} G_i \cdot h_i\}(x) = f_\alpha(a).$$

Sea $x \notin F$ tal que

$$d(x, F) < \frac{d}{32};$$

entonces $i(x) \in \mathcal{U}$ y si $i \in \mathcal{U}$ con $i > i(x)$ y $t \in B_{i(x)}$, se tendrá

$$h_i(t) = 0$$

y también

$$(h_1 + \ldots + h_{i(x)})(t) = 1,$$

luego

$$Tf(t) = \sum_{i=1}^{i(x)} G_i(t)\, h_i(t)$$

y

$$G_{i(x)}(t) = \sum_{i=1}^{i(x)} G_{i(x)}(t)\, h_i(t)$$

y al restar,

$$Tf(t) - G_{i(x)}(t) = \sum_{i=1}^{i(x)} (G_i - G_{i(x)})(t)\, h_i(t)$$

y derivando,

$$D^\alpha Tf(t) - D^\alpha G_{i(x)}(t) = \sum_{i=1}^{i(x)} D^\alpha \{(G_i - G_{i(x)})\, h_i(t)\}$$

igualdad válida en $\mathring{B}_{i(x)}$, denso en $B_{i(x)}$, luego válida en $B_{i(x)}$ y por tanto, en x, o sea

$$D^\alpha Tf(x) - D^\alpha G_{i(x)}(x) = \sum_{i=1}^{i(x)} D^\alpha \{(G_i - G_{i(x)})\, h_i\}(x) \tag{9.1}$$

suma en la que los únicos sumandos no necesariamente nulos son aquellos en los que $x \in \mathring{A}_i$.

Sea $\varepsilon' > 0$ y $q \in \mathscr{P}$, sea $B(a, \delta)$ $(\delta < 1)$ el entorno de a para el que se satisface (8.1); si

$$d(x, a) < \frac{\delta}{(2^5\sqrt{n} + 1)}$$

se tendrá –(3.2)– que $a_i, a_{i(x)} \in B(a, \delta)$ luego

$$q\,[D^\beta G_i(x) - D^\beta G_{i(x)}(x)\,] <$$

$$< \varepsilon' \cdot \sum_{|\nu| < k - |\beta|} d(a_i, a_{i(x)})^{k - |\beta| - |\nu|} \cdot \frac{d(x, a_{i(x)})^{|\nu|}}{\nu!}.$$

Ahora teniendo en cuenta 5 y 3, obtendremos

$$q\,[D^\beta (G_i - G_{i(x)})(x)\, D^{\alpha-\beta} h_i(x)] <$$

$$< \varepsilon' \cdot \sum_{|\nu| < k - |\beta|} d(a_i, a_{i(x)})^{k - |\beta| - |\nu|} \cdot \frac{d(x, a_{i(x)})^{|\nu|}}{\nu!} \cdot$$

$$\cdot K^{4^n} (2^{k(i)+2})^{|\alpha| - |\beta|} \cdot 4^{n(|\alpha| - |\beta|)}$$

y teniendo presente que cuando $x \in \mathring{A}_i$,

$$k(i) \leqslant k(i(x)) + 1,$$

la desigualdad continuará

$$\leqslant \varepsilon' \cdot K^{4^n} \cdot 4^{nk} (2^6\sqrt{n})^{2k-2|\beta|} (2^{k(i(x))})^{-k+|\alpha|} \sum_{|\nu| < k - |\alpha|} 1.$$

Llamemos

$$K' := K^{4^n} \cdot 4^{nk} (2^6 \cdot \sqrt{n})^{2k} \cdot \sum_{|\nu| < k} 1;$$

como la suma de (9.1) tiene a lo sumo 4^n términos no nulos y

$$D^\alpha \{(G_i - G_{i(x)}) h_i\} (x)$$

es una suma con $2^{|\alpha|}$ sumandos del tipo

$$D^\alpha (G_i - G_{i(x)}) (x) \cdot D^{\alpha-\beta} h_i (x),$$

resultará que

$$q [D^\alpha Tf(x) - D^\alpha G_{i(x)} (x)] < 4^n K' \cdot \varepsilon' \cdot 2^{|\alpha|} \cdot 2^{k(i(x))(|\alpha| - k)}$$

y como

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{k(i(x))}} \leqslant d (B_{i(x)}, \ \mathbb{R}^n - \Omega') \leqslant d (x, a),$$

la desigualdad seguirá

$$< 4^n \cdot K' \cdot 2^{|\alpha|} \cdot d (x, a)^{k - |\alpha|} \cdot \varepsilon' < 4^n \cdot K' \cdot 2^{|\alpha|} \cdot \varepsilon'$$

Aplicando (8.2) ya que $x, a_{i(x)} \in B (a, \delta)$, tendremos

$$q [D^\alpha G_{i(x)} - f_\alpha (a)] < \varepsilon',$$

lo que junto a la desigualdad anterior nos asegura que

$$q [D^\alpha Tf(x) - f_\alpha (a)] < \varepsilon' \cdot (4^n \cdot K' \cdot 2^{|\alpha|} + 1) \qquad \text{c.q.d.}$$

En lo que resta de apartado vamos a probar que si F satisface una cierta condición "geométrica", entonces T es un operador lineal y continuo de $W^k (F, E)$ en $B^k (\mathbb{R}^n, E)$.

Whitney en [10] da la siguiente definición:

10. Definición.– $A \subset \mathbb{R}^n$ diremos que satisface la condición (P) si existe un real positivo, m, tal que cada par de puntos $x, y \in A$ se pueden unir mediante un arco contenido en A cuya longitud es menor que

$$m \cdot d (x, y).$$

En [11] Whitney prueba que si F satisface la condición (P) el operador que él construye en [9] para funciones escalares es acotado. La siguiente definición nos permite asegurar que T es un operador de extensión lineal y continuo de W^k (F, E) en B^k $(\mathbb{R}^n, E)$ para una clase de cerrados que incluye a la de los que satisfacen (P).

11. Definición.— $A \subset \mathbb{R}^n$ diremos que admite una descomposición de tipo (P), si existe una partición $\{A_s\colon s \in S\}$ de A y dos reales positivos, m y r, tales que cada A_s cumple (P) con la constante m y

$$d(A_s, A_{s'}) > r \quad \forall\, s, s' \in S \quad \text{si} \quad s \neq s'.$$

Es fácil comprobar que si A es cerrado, A_s es cerrado $\forall\, s \in S$.

12. Proposición.— Si F satisface (P), existe una constante, L, que sólo depende de n, k, m y d tal que si $(f_\alpha) \in W^k$ (F, E), entonces

$$q\,[D^\alpha Tf(x)] \leqslant L \cdot \|(f_\alpha)\|_q^F \qquad \forall\, \alpha \in H \qquad \forall\, x \in \overline{V} - F$$

Demostración.— Si $i(x) \in \mathcal{U}$, se tiene la igualdad (9.1), luego

$$D^\alpha Tf(x) = D^\alpha G_{i(x)}(x) + \sum_{i=1}^{i(x)} \sum_{\beta < \alpha} D^\beta (G_i - G_{i(x)})(x)\, D^{\alpha-\beta} h_i(x)$$

donde la primera suma posee 4^n sumandos, a lo sumo, correspondientes a los índices, i, tales que $x \in \mathring{A}_i$, y la segunda, $2^{|\alpha|}$.

Razonando como al principio de 8, se tiene

$$q\,[D^\alpha (G_i - G_{i(x)})(x)] \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{|\nu| < k - |\beta|} q\,[f_{\beta+\nu}(a_i) - D^{\beta+\nu} G_{i(x)}(a_i)] \cdot \frac{d(x, a_i)^{|\nu|}}{\nu!}$$

y como F tiene (P), se puede unir a_i y $a_{i(x)}$ por medio de un arco de longitud

$$L(i, i(x)) \leqslant m \cdot d(a_i, a_{i(x)});$$

además, dado que $x \in \mathring{A}_i$ y aplicando (3.3),

$$L(i, i(x)) \leqslant \frac{m\sqrt{n}}{2^{k(i)-7}}.$$

Ahora bien, en virtud de 7, de que F tiene (P) y de (3.1), resultará

$$q\,[D^\beta (G_i - G_{i(x)})(x)] \leqslant$$

$$\leqslant 4n\,(k+1)^n \cdot \|(f_\alpha)\|_q^F \cdot (\sqrt{n}2^7 m)^{k-|\beta|} \cdot 2^{k(i)(|\beta|-k)} \cdot \sum_{|\nu|<k-|\alpha|} \frac{1}{\nu!}$$

Llamando

$$M' := 4n\,(k+1)^n\,(\sqrt{n}2^9 m)^k \cdot 4^{nk} \cdot K^{4n} \cdot \sum_{|\nu|<k} \frac{1}{\nu!}$$

y por 5, resulta

$$q\,[D^\beta (G_i - G_{i(x)})\,(x) \cdot D^{\alpha-\beta}\,\mathrm{h}_i\,(x)] \leqslant M' 2^{k(i)(|\alpha|-k)} \cdot \|(f_\alpha)\|_q^F$$

Si $i\,(x) \notin \mathcal{U}$ podemos usar 5 y 4, y como

$$D^\alpha Tf\,(x) = \sum_{i=1}^{\infty} D^\alpha\,(G_i h_i)\,(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\beta<\alpha} D^\beta G_i\,(x) \cdot D^{\alpha-\beta} h_i\,(x)$$

donde la suma en i se extiende a los sumandos tales que $x \in \mathring{A}_i$ y la segunda posee $2^{|\alpha|}$ sumandos, resultará

$$q\,[D^\alpha Tf\,(x)] \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\beta<\alpha} K^{4n}\,(2^{k(i)+2} \cdot 4^n)^{(|\alpha-\beta|)} \cdot q\,[D^\beta G_i\,(x)] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\beta<\alpha} K^{4n}\,(2^3 \cdot A \cdot 4^n)^{(|\alpha-\beta|)} \cdot q\,[D^\beta G_i\,(x)].$$

Pero tanto si $i\,(x) \in \mathcal{U}$, como si $i\,(x) \notin \mathcal{U}$, se tiene que

$$q\,[D^\beta G_i\,(x)] \leqslant \sqrt{n}^{\,k-|\beta|} \cdot \|(f_\alpha)\|_q^F,$$

luego si elegimos

$$L := \max\,\{\sqrt{n}^{\,k} + 4^n \cdot 2^k \cdot M',\ \sqrt{n}^{\,k} \cdot 4^n \cdot (2^4 \cdot A \cdot 4^n)^k \cdot K^{4n}\},$$

se obtiene la proposición.

13. Teorema.— Si F tiene una descomposición de tipo (P), existe un operador, T', lineal y continuo de $W^k\,(F, E)$ en $B^k\,(\mathbb{R}^n, E)$ tal que si $x \in F$ y $(f_\alpha) \in W^k\,(F, E)$ entonces

$$D^\beta T'\,[(f_\alpha)]\,(x) = f_\beta\,(x).$$

Demostración.— Sea $\{F_s\!: s \in S\}$ la descomposición de F. Pongamos

$$O_s := B\,(F_s, \frac{r}{3}) \qquad \text{y} \qquad V_s := \{x\!: d\,(x, F_s) \leqslant \frac{r}{12}\}$$

y sea

$$T_s: W^k (F_s, E) \longrightarrow B^k (\mathbb{R}^n, E)$$

la aplicación definida por (9) y que lo está correctamente por 12, al existir una constante, L, independiente de s, tal que si $(f_\alpha) \in W^k (F_s, E)$, entonces

$$\|T_s f\|_q \leqslant L \ \|(f_\alpha)\|_q^{F_s}; \quad \text{además} \quad \text{sop } T_s f \subset \overline{V}_s.$$

Notar que para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $B (x, \dfrac{r}{12})$ corta a un único V_s ó a ninguno.

Sea $(f_\alpha) \in W^k (F, E)$, $f_0 = f$; para cada s,

$$(f_\alpha|_{F_s}) \in W^k (F_s, E)$$

y por tanto,

$$T_s (f|_{F_s}) \in B^k (\mathbb{R}^n, E).$$

Si definimos

$$T'f (x) := \sum_{s \in S} T_s (f|_{F_s}) (x),$$

$T'f$ está bien definida y es de clase C^k en $\mathbb{R}^n$ por lo anterior; pero además si $x \in F_s$, resulta

$$D^\alpha T'f (x) = D^\alpha T_s (f|_{F_s}) (x) = f_\alpha (x).$$

También si $q \in \mathscr{P}$ y $x \in \overline{V}_s$,

$$q [D^\alpha T'f (x)] = q [D^\alpha T_s (f|_{F_s}) (x)] \leqslant L \ \|(f_\alpha|_{F_s})\|_q^{F_s} \leqslant L \ \|(f_\alpha)\|_q^F.$$

Para terminar el teorema, basta probar que T' es lineal: Por la manera de definir cada T_s, éstas son lineales como se deduce de la construcción de los "polinomios"

$$G_i (x) = \sum_{|\alpha| < k} f_\alpha (a_i) \frac{(x - a_i)^\alpha}{\alpha!}.$$

Entonces cada T_s es lineal y por tanto, T'.

14. Corolario.– Si F es un compacto de $\mathbb{R}^n$ con la propiedad (P) y A es un abierto relativamente compacto con $F \subset A$, existe un operador de extensión lineal y continuo de $W^k (F, E)$ en $\mathscr{D}^k (A, E)$. En particular el resultado se obtiene si F es un cubo contenido en el interior del cubo A.

IV. LA REPRESENTACION DE B_1^k (Ω, E)

Recordemos que $f\colon \Omega \to E$ pertenece a C_0^k (Ω, E) si es de clase C^k en Ω y para cada $\varepsilon > 0$, $q \in \mathscr{P}$ existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$q\,[D^\alpha f(x)] < \varepsilon \qquad \forall\, x \in \Omega - K.$$

Para cada $f \in C_0^k$ (Ω, E), sean

$$\tilde{f}_\alpha(x) := \begin{cases} D^\alpha f(x) & \text{si} \quad x \in \Omega \\ 0 \quad \text{si} \quad x \notin \Omega \end{cases}$$

es fácil comprobar que $\tilde{f}_\alpha$ son continuas en $\mathbb{R}^n$, que f es de clase C^k en $\mathbb{R}^n - \Omega$ en términos de $(\tilde{f}_\alpha)$ y que lo mismo sucede en Ω sin más que utilizar II.4; se deduce entonces de III.6 que f es de clase C^k en $\mathbb{R}^n$ y que $f \in B_1^k$ (Ω, E). Si identificamos f con su prolongación $\tilde{f}$, podremos asegurar que

$$C_0^k\,(\Omega, E) \subset B_1^k\,(\Omega, E)$$

y dotar a C_0^k (Ω, E) de la topología inducida. En (4) probamos que

$$C_0^k\,(\Omega, E) \simeq C^k\,(I, E).$$

1. Proposición.— Si Ω es acotado, B_1^k $(\Omega, E) = C_0^k$ (Ω, E) y por tanto, B_1^k (Ω, E) es isomorfo a C^k (I, E).

Queda, pues, representar B_1^k (Ω, E) cuando Ω no sea acotado y es aquí donde el operador de extensión de III va a desempeñar un papel fundamental.

2. Proposición.— Si $F := \mathbb{R}^n - \Omega$ tiene una descomposición de tipo (P), entonces B_1^k (Ω, E) es un subespacio complementado de B^k $(\mathbb{R}^n, E)$.

Demostración.— Sea $T'\colon W^k\,(F, E) \longrightarrow B^k\,(\mathbb{R}^n, E)$ la aplicación de III.13.

Sea $R\colon B^k\,(\mathbb{R}^n, E) \longrightarrow W^k\,(F, E)$ definida según

$$R\,(f) := \{D^\alpha f_{|F}\colon \alpha \in H\}$$

R está bien definida como se infiere de II.4 y desde luego es lineal y continua. Pero por la construcción de T' se tiene

$$R \circ T'\,[(g_\alpha)] = \{D^\alpha T'\,[(g_\alpha)]\,|_F\colon \alpha \in H\} = (g_\alpha)$$

es decir, $R \circ T' = Id$ luego $T' \circ R$ es una proyección de $B^k(\mathbb{R}^n, E)$ cuyo núcleo es

$$B_1^k(\Omega, E).$$

Recordemos que un conjunto $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ se dice que es casi acotado si para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \mathbb{R}^n - \Omega) \geqslant \varepsilon\}$ es acotado. Si Ω es abierto y $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ es la familia de cubos relativa a Ω de I, puede comprobarse que Ω es casi acotado si y sólo si

$$\lim_{i \to \infty} \frac{1}{2^{k(i)}} = 0 \tag{7}$$

Así que cuando Ω no es casi acotado existe un conjunto infinito de índices, $\mathbb{N}_1$, $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ y un real positivo, δ, tales que

$$\frac{1}{2^{k(i)}} > \delta \qquad \text{si} \qquad i \in \mathbb{N}_1.$$

Sea

$$L := \left[\frac{-1}{5}, \frac{1}{5}\right]^n, \qquad L \subset \mathring{J}$$

luego por III.14 existe, U, operador de extensión lineal y continuo de $C^k(L, E)$ en $\mathscr{D}^k(J, E)$. Si Ω es un abierto no casi acotado, designaremos por G_1 al espacio de las sucesiones de funciones de $C^k(L, E)$ tales que para cada $q \in \mathscr{P}$,

$$\{2^{k(i)k} \|f_i\|_q^L : i \in \mathbb{N}_1\}$$

está acotada. Dotaremos a G_1 de la topología definida por las seminormas

$$|||(f_i)|||_q := \sup \{2^{k(i)k} \cdot \|f_i\|_q^L : i \in \mathbb{N}_1\} \qquad q \in \mathscr{P}.$$

Se tiene que

$$G_1 \simeq 1^\infty(C^k(I, E)).$$

3. *Proposición.*— Si Ω es un abierto no casi acotado, entonces $B_1^k(\Omega, E)$ tiene un subespacio complementado isomorfo a $1^\infty(C^k(I, E))$.

Demostración.— Si $(f_i) \in G_1$, sea

$$T_1[(f_i)](x) := \sum_{i \in \mathbb{N}_1} U(f_i) \circ g_i^{-1}(x).$$

Como $\{B_i \colon i \in \mathbb{N}_1\}$ es localmente finita en Ω, $T_1\ [(f_i)]$ está bien definida y es de clase C^k en Ω. Si $x_0 \notin \Omega$, entonces

$$B\,(x_0,\ \delta \cdot \sqrt{n}) \cap \cup\ \{B_i \colon \mathrm{i} \in \mathbb{N}_1\} = \phi,$$

por tanto, $T_1\ [(f_i)]$ es nula en $B\,(x_0, \delta\sqrt{n})$ y por ello de clase C^k en x_0. Pero además hemos probado que

$$D^\alpha T_1\ [(f_i)]\,(x) = 0$$

para $x \notin \Omega$ y para cada $\alpha \in H$.

Si $x \in \Omega$,

$$q\ [D^\alpha T_1\ [(f_i)]\,(x)] =$$

$$q \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}_1} D^\alpha U\,(f_i)\,(g_i^{-1}\ (x))\ 2^{k(i)\,|\alpha|} \cdot 2^{|\alpha|} \cdot \left(\frac{4\sqrt{n}}{4\sqrt{n}+1} \right)^{|\alpha|} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}_1} q\ [D^\alpha U\,(f_i)\,(g_i^{-1}\ (x))]\ 2^{k(i)\,k} \leqslant 2^k \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}_1} \|U\,(f_i)\|_q \cdot 2^{k(i)\,k} \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}_1} C_q \cdot \|f_i\|_q^L \cdot 2^{k(i)\,k} \leqslant 2^k \cdot C_q \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}_1} |\!|\!|(f_i)|\!|\!|_q$$

donde C_q es una constante positiva determinada por la continuidad de U. Como en la suma hay como mucho 4^n sumandos, resultará

$$q\ [D^\alpha T_1\ [(f_i)]\,(x)] \leqslant 2^k \cdot 4^n \cdot C_q \cdot |\!|\!|(f_i)|\!|\!|_q$$

lo que prueba que $T_1\ (f_i) \in B_1^k\ (\Omega, E)$, pero también,

$$\|T_1\ [(f_i)]\,\|_q \leqslant |\!|\!|(f_i)|\!|\!|_q \cdot \sum_{|\alpha| < k} 2^k \cdot 4^n \cdot C_q.$$

Entonces la aplicación $T_1 \colon G_1 \longrightarrow B_1^k\ (\Omega, E)$ así definida que, obviamente es lineal, es continua.

Sea, ahora, $V_1 \colon B_1^k\ (\Omega, E) \longrightarrow G_1$ definida según

$$V_1\ (f) \colon = \{f \circ g_i|_L \colon i \in \mathbb{N}_1\}.$$

Si $z \in L$ y $q \in \mathscr{P}$, tendremos

$$q\ [D^\alpha\ (f \circ g_i)\,(z)] = q\ [D^\alpha f\,(g_i\,(z))] \cdot \frac{1}{2^{k(i)\,|\alpha|} \cdot 2^{|\alpha|}}\,\left(1 + \frac{1}{4\sqrt{n}}\right)^{|\alpha|}$$

luego

$$2^{k(i)k} \cdot \|f \circ g_i\|_q^L \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\alpha| < k} 2^{k(i)(k - |\alpha|)} \cdot \sup \{q [D^\alpha f (g_i (z))]: z \in L\} \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_q \cdot \sum_{|\alpha| < k} 2^{k(i)(k - |\alpha|)} \leqslant \|f\|_q \sum_{|\alpha| < k} \left(\frac{1}{\delta}\right)^{k - |\alpha|}$$

lo que significa que $V_1\ (f) \in G_1$ y que la aplicación lineal V_1 es continua.

Si $(f_i) \in G_1$, $i \in \mathbb{N}_1$ y $z \in L$, entonces $g_i\ (z) \in \mathring{B}_i$, luego si $i' \neq i$ se tendrá $g_i\ (z) \notin \mathring{B}_i$, y con ello,

$$T_1\ [(f_j)] \circ g_i\ (z) = \sum_{j \in \mathbb{N}_1} U\ (f_j) \circ g_j^{-1}\ (g_i\ (z)) = U\ (f_i)\ (z) = f_i\ (z)$$

luego

$$V_1 \circ T_1 = Id_{G_1}$$

de lo que se deduce que G_1 es isomorfo a un subespacio complementado de $B_1^k\ (\Omega, E)$ aplicando un resultado de I.

4. Proposición.– Si $\mathbb{R}^n - \Omega$ está contenido en un cerrado A que admite descomposición de tipo (P) y tal que $A \cap \Omega$ es acotado, entonces $B_1^k\ (\Omega, E)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $1^\infty\ (C^k\ (I, E))$.

Demostración.– Sea $\Omega_1 := \mathbb{R}^n - A$ y $F := \mathbb{R}^n - \Omega$. Sea T_1': $W^k\ (A, E) \longrightarrow B^k\ (\mathbb{R}^n, E)$ el operador de III.13 construido para A. Pongamos

$$W_F^k\ (A, E) := \{(f_\alpha) \in W^k\ (A, E): f_\alpha\ (x) = 0 \quad \forall\, \alpha \in H \quad \forall\, x \in F\}$$

provisto de la topología inducida.

Sea $f \in B_1^k\ (\Omega, E)$, la familia $(D^\alpha f_{|A}) \in W_F^k\ (A, E)$ y cuando $x \in A$,

$$D^\alpha\ [f - T_1'\ ((D^\beta f_{|A}))]\ (x) = D^\alpha f\ (x) - D^\alpha T_1'\ ((D^\beta f_{|A}))\ (x) =$$

$$= D^\alpha f\ (x) - D^\alpha f\ (x) = 0;$$

entonces

$$X: B_1^k\ (\Omega, E) \longrightarrow W_F^k\ (A, E) \times B_1^k\ (\Omega_1, E)$$

definida por

$$X\ (F) := ((D^\alpha f_{|A}),\ f - T_1'\ ((D^\alpha f_{|A})))$$

está bien definida, y es lineal y continua.

Sea Y: $W_F^k\ (A, E) \times B_1^k\ (\Omega, E) \longrightarrow B_1^k\ (\Omega, E)$ definida como

$$Y((h_\alpha), g)) := T_1' [(h_\alpha)] + g;$$

tanto $T_1' [(h_\alpha)]$ como g pertenecen a $B_1^k(\mathbb{R}^n, E)$ y cuando $x \notin \Omega$, se tiene $x \in F$ y $x \notin \Omega_1$ luego

$$D^\alpha Y [(h_\alpha), g](x) = D^\alpha T_1' [(h^\beta)](x) + D^\alpha g(x) = h_\alpha(x) + D^\alpha g(x) = 0$$

por lo que Y está definida correctamente. Se observa que es lineal y continua.

Además,

$$Y \circ X = Id$$

y, por ello, $B_1^k(\Omega, E)$ es isomorfo a un subespacio complementado de

$$W_F^k(A, E) \times B_1^k(\Omega_1, E).$$

Como $A \cap \Omega$ es acotado podemos encontrar dos cubos, Q y Q' tales que

$$A \cap \Omega \subset \overset{\circ}{Q} \subset Q'.$$

Sea $u \in \mathscr{D}^k(Q')$ tal que $u(x) = 1$ si $x \in Q$ y construyamos

$$Z: W_F^k(A, E) \longrightarrow \mathscr{D}_F^k(Q', E)$$

según

$$Z((h_\alpha)) = T_1'((h_\alpha)) \cdot u;$$

desde luego Z es lineal y continua. Si

$$R: \mathscr{D}_F^k(Q', E) \longrightarrow W_F^k(A, E)$$

está definida como $R(g) := (D^\alpha g|_A)$, R es lineal y continua. Pero además,

$$R \circ Z = Id_{W_F^k(A, E)}$$

y por ello, $W_F^k(A, E)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathscr{D}_F^k(Q', E)$. Si $\overset{\circ}{Q}' - F \neq \phi$, entonces

$$\mathscr{D}_F^k(Q', E) \simeq C^k(I, E)$$

y si $\overset{\circ}{Q}' - F = \phi$, se tendrá

$$A \cap \Omega = \phi$$

luego

$$A = F \qquad \text{y} \qquad W_F^k(A, E) = \{0\};$$

en cualquiera de ambos casos podemos asegurar que W_F^k (A, E) es isomorfo a un subespacio complementado de C^k (I, E).

En virtud de esta última afirmación y de 2, resulta que B_1^k (Ω, E) es isomorfo a un subespacio complementado de

$$C^k\ (I, E) \times B^k\ (\mathbb{R}^n, E)$$

y por tanto, de

$$C^k\ (I, E) \times 1^\infty (C^k\ (I, E)).$$

Basta recordar que este último es isomorfo a $1^\infty (C^k\ (I, E))$, para terminar la proposición.

5. *Teorema.*— Si Ω es no casi acotado y su complementario, $\mathbb{R}^n - \Omega$, está contenido en un cerrado, A, con descomposición de tipo (P) y tal que $A \cap \Omega$ es acotado, entonces

$$B_1^k\ (\Omega, E) \simeq 1^\infty (C^k\ (I, E)).$$

En particular este isomorfismo existe cuando $\mathbb{R}^n - \Omega$ es acotado.

Demostración.— Utilizar 3 y 4 y tener en cuenta que $1^\infty (C^k\ (I, E))$ tiene la propiedad de complementación de Pelczynski. La segunda parte se deduce de la primera tomando como A una bola cerrada que incluya a $\mathbb{R}^n - \Omega$, ya que A tiene (P) al ser convexo.

Representaciones de los espacios B_1 (Ω, E) $(= B_1^k\ (\Omega, E)$ con $k = \infty)$ y B_0 (Ω, E) $(= C_0^k\ (\Omega, E)$ con $k = \infty)$ pueden encontrarse en [3].

Algunos resultados incluidos en este artículo extienden otros obtenidos por el Prof. Valdivia en [7] y [8].

BIBLIOGRAFIA

[1] BONET, J.: *Representaciones de espacios de funciones con valores vectoriales.* Tesis doctoral. (1980).

[2] BONET, J.: *Representaciones de los espacios $O_M(E)$ y $\mathcal{D}_{L^p}(E)$.* Collectanea Mat. 33-1 (1982). 23-40.

[3] BONET, J. Y MAESTRE, M.: *Representaciones de los espacios B_0 (Ω, E) y B_1 (Ω, E).* Rev. Real Acad. Ciencias Ex., Fis. y Nat. Madrid. 77-1 (1983). 141-159.

[4] GALINDO, P.: *Una representación del espacio C_0^k (Ω, E).* Collectanea Mat. 24-3º (1983). 221-231.

[5] HESTENES, M. R.: *Extension of the range of a differentiable function.* Duke Math. J. 8 (1941). 183-192.

[6] HORVATH, J.: *Topological vector spaces and distributions.* Addison-Wesley Publ. Comp. Reading Mass. (1966).

[7] VALDIVIA, M.: *Topics in locally convex spaces.* Math. Studies 67. North-Holland. (1982).

[8] VALDIVIA, M.: *Representación de algunos espacios de funciones.* (Preprint).

[9] WHITNEY, H.: *Analytic extensions of differentiable funcstions defined in closed sets.* Transactions of the A.M.S. 36 (1934) 63-89.

[10] WHITNEY, H.: *Functions differentiable on the boundaries of regions.* Annals of Math, 35-3 (1934). 482-485.

[11] WHITNEY, H.: *On the extension of differentiable functions.* Bull. A.M.S. 50-2 (1944). 76-81.

Departamento de Teoría de Funciones

Facultad de Matemáticas
Universidad de Valencia
Avda. Dr. Moliner, s/n.
Burjasot (Valencia)