Quelques remarques sur le théorème du graphe fermé

Por MOHAMED AAMRI

Recibido: 10 octubre 1984

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia

Resumeé

On donne quelques remarques sur les démonstrations de certains résultats sur le Théorème du graphe fermé.

Abstract

Some remarks concerning the proofs of certain results on the glosed graph Theorem are given.

I. INTRODUCTION

Tous les espaces vectoriels qu'on considère dans la suite sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou C. On utilisera les notations et la terminologie de [6]. Soient $E(S)$ un e.l.c. et (x) une propriété de certains e.l.c. particuliers; $E(S)$ est dit (x)—espace et S (x)—topologie si $E(S)$ possède la propriété (x). $E(S)$ est dit $(\mathbf{x})$—espace s'il existe une famille $\{u_i: E_i(S_i) \to E\}_{i \in I}$, où $E_i(S_i)$ est un (x)—espace et u_i une aplication linéaire, telle que S soit la topologie finale relative à cette famille.$E(S)$ est dit (x_s)—espace si $E(S)$ est un (x)—espace séparé. $E(S)$ est dit $(\mathbf{x}_s)$—espace s'il existe une famille $\{u_i: E_i(S_i) \to E\}_{i \in I}$, où $E_i(S_i)$ est un (x_s)—espace et u_i une application linéaire, telle que S soit la topologie finale relative à cette famille et si de plus S est séparée. Pour toute propriété (x) et tout e.l.c. (resp. e.l.c. séparé) $E(S)$, il existe une $(\mathbf{x})$—topologie (resp. $(\mathbf{x}_s)$—topologie) la moins fine contenant S, on la désigne par $S^{\mathbf{x}}$ (resp. $S^{\mathbf{x}_s}$); et si S_M désigne la topologie localement convexe la plus fine sur E, $E(S_M)$ est un $(\mathbf{x}_s)$—espace et S_M est une $(\mathbf{x}_s)$—topologie.

Soient $E(S)$, $F(T)$ deux e.l.c. et u une application linéaite de E dans F; on note S' (resp. T') un s.f.v. de l'origine dans $E(S)$ (resp. $F(T)$) et on désignera par T_u la topologie localement convexe pour laquelle les ensembles de la forme $u(W) + V$, ou $W \in S'$ et $V \in T'$, forment un s.f.v. de l'origine dans F. Supposons que $E(S)$ et $F(T)$ soient des e.l.c. séparés; la topologie T_u n'est pas en général séparée; mais on démontre que u est fermée (le graphe de u

est fermé) si et seulement si T_u est séparée. On démontre aussi que u est fermée si et seulement si $F(T_u)'$ est faiblement dense dans F'. On se propose de démontrer que si $E(S)$ et $F(T)$ sont des (x)–espaces il en est de même de $F(T_u)$ dans le cas où (x) est équivalente à $(\mathbf{x})$ et plus généralement si (x) est stable par produit fini et quotient. Et pour cela, j'utilise une remarque de Valdivia selon laquelle $F(T_u)$ est topologiquement isomorphe à un quotient de $E(S)xF(T)$. Ceci nous permet de ramener la démonstration du Théorème du graphe fermé pour certaines classes d'e.l.c. séparés à la comparaison de certaines topologies (bien définies et dont on connaît les propriétés) sur un même espace. On donne des conséquences très simples concernant des résultats classiques; puis on démontre un résultat plus général qui n'est autre que le théorème du graphe fermé de Komura. Pour certains résultats on a donné des démonstrations détaillées, qui peuvent être simplifiées et généralisées (voir [7], dans le seul but de montrer l'intérêt de la topologie T_u.

II. PROPRIETES LINEAIREMENT STABLES ET LINEAIREMENT TOPOLOGIQUEMENT STABLES.

Définition: Soit (x) une propriété de certains e.l.c.;

1°) (x) est dite linéairement stable si pour tous (x)–espaces $E(S)$, $F(T)$, et toute application linéaire u de $E(S)$ dans $F(T)$, $F(T_u)$ est un (x)–espace.

2°) (x) est dite linéaitement topologiquement stable si pour tous (x_s)– –espaces $E(S)$, $F(T)$ et toute application linéaire fermée de u de $E(S)$ dans $F(T)$, $F(T_u)$ est un (x_s)–espace.

La deuxième partie de la définition a un sens; car pour toute application linéaire fermée de $E(S)$, dans $F(T)$, $F(T_u)$ est un e.l.c. séparé.

Soient $E(S)$, $F(T)$ deux e.l.c. séparés et u une application linéaire de E dans F; considérons l'application f: $E(S)xF(T) \to F(T_u)$ telle que $f(x, y) = = u(x) + y$, $x \in E$ et $y \in F$. f est un homomorphisme (topologique), et par conséquent $F(T_u)$ est topologiquement isomorphe à un quotient de $E(S)xF(T)$. On en déduit que si $E(S)$ et $F(T)$ sont des (x)–espaces, où (x) est une propriété d'e.l.c. stable par produit et quotient, il en est même de $F(T_u)$.

Et donc toute propriété d'e.l.c. qui est conservée par produit et quotient est linéairement stable.

Exemples:

1°) Considérons les propriétés suivantes:

(t) = être un espace tonnelé
(q) = être un espace quasi–tonnelé
(d) = être un espace dénombrablement tonnelé [3]
(dq) = être un espace dénombrablement quasi–tonnelé [3

(ou semi–tonnelé [2])
(b) = être un espace bornologique
(ub) = être un espace ultrabornologique

Un e.l.c. est dit ultrabornologique s'il est un (**B**)–espace, où (B) est la propriété d'être un espace de Banach.

Toutes ces propriétés sont stables par produit fini et quotient; donc, elles sont linéairement stables (resp. linéairement topologiquement stables).

2°) Soient les propriétés suivantes:

(m) = être un e.l.c. métrisable
(N) = être un espace normé
(mt) = être un e.l.c. metrisable et tonnelé
(Nt) = être un e.l.c. normé et tonnelé
(F) = être un espace de Fréchet
(B) = être un espace de Banach
(Br) = être un espace de Banach réflexif
(Ns) = être un espace normé séparable
(C) = être un e.l.c. séparé dont le dual faible est séquentiellement complet
(M) = être un e.l.c. séparé tel que toute partie absolument convexe, faiblement métrisable et compacte de son dual soit équicontinue.

Supposons que $E(S)$ et $F(T)$ soient métrisables, et soit (W_n) (resp. (V_n)) un systeme fondamental (décroissant) de voisinages de l'origine absolument convexes dans $E(S)$ (resp. $F(T)$); la suite $(u(W_n) + V_n)$ est un s.f.v. de l'origine pour T_u (par définition de T_u). Si u est fermée, T_u est séparée; et donc $F(T_u)$ est un e.l.c. métrisable.

Si $E(S)$ et $F(T)$ sont des espaces normés et si B et C désignent les boules unités (ouvertes ou fermées), respectivement, de $E(S)$ et $F(T)$, $u(B) + C$ est un voisinage de l'origine pour T_u et borné pour cette même topologie. On en déduit que $F(T_u)$ est un espace normé si u est fermée.

On sait qu'un espace de Banach est réflexif si et seulement si sa boule unité fermée est faiblement compacte. Par suite si $E(S)$ et $F(T)$ sont des espaces de Banach réflexifs. B et C leurs boules unités fermées et si u est fermée, C est évidemment compacte dans $F(T_u)$; et puisque u: $E(S) \to F(T_u)$ est faiblement continue, $u(B)$ est faiblement compacte dans $F(T_u)$; il en résulte que $u(B) + C$ est faiblement compacte dans $F(T_u)$; et donc $F(T_u)$ est un de Banach réflexif.

Supposons $E(S)$, $F(T)$ des (C)–espaces et u fermée, et soit $\{v_n\}$ une suite de Cauchy dans $F(T_u)'(\sigma\,(F(T_u)'.\ F))$; $\{v_n\}$ est une suite de Cauchy dans $F'(\sigma\,(F', F))$; donc elle converge vers un élément v de F'. La suite $\{v_n\, ou\}$ converge faiblement vers vou dans E^*.

Et, puisque $E(S)$ est un (C)–espace, vou appartient à E'. Soit b la boule unité de $K(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$; il existe $W \in S'$ et $V \in T'$ tels que vou $(W) \subset \frac{1}{2} b$ et $v(V) \subset \frac{1}{2} b$, et par suite $v(u(W) + V) \subset b$, ce qui montre que v appartient à $F(T_u)'$. Donc, $F(T_u)$ est un (C)–espace.

Supposons, maintenant, que $E(S)$ et $F(T)$ soient des (M)–espaces et que u soit fermée. Et soit D une partie absolument convexe faiblement métrisable et compacte de $F(T_u)'$; D est T–équicontinue. L'application transposée t_u: $F(T_u)' \to E'$ est faiblement continue, et par suite $t_{u(D)=\{vou,\ v \in D\}}$ est faiblement métrisable et compacte [4]; donc, par hypothèse, elle est équicontinue. Il existe alors $V \in T'$ et $W \in S'$ tels que $v(V) \subset \frac{1}{2}b$ et vou $(W) \subset \frac{1}{2}b$, pour tout $v \in D$; par suite $v(u(W) + V) \subset b$, c'est–a–dire que D est T_u–équicontinue.

On vient de démontrer que les propriétés (m), (N), (Br), (C), et (M) sont linéairement topologiquement stables. Pour cela, on aurait pu utiliser le fait que $F(T_u)$ est topologiquement isomorphe à un quotient de $E(S)xF(T)$ par un sous–espace fermé (si u est fermée). D'ailleurs ceci nous permet de vérifier immédiatement que les autres propriétés sont aussi linéairement topologiquement stables.

3. QUELQUES CONSEQUENCES

1°) Soient $E(S)$ un espace tonnelé séparé et $F(T)$ un espace de Banach réflexif; une application linéaire fermée u de $E(S)$ dans $F(T)$ est continue. En effet, désignons par B la boule unité fermée de $F(T)$; B est faiblement compacte dans $F(T)$, et donc faiblement compacte dans $F(T_u)$; on en déduit que B est un tonneau pour T_u, et puisque $F(T_u)$ est tonnelé B est un voisinage de l'origine pour T_u; ceci montre que $T_u = T$, c'est–a–dire que u est continue.

2°) Soient $E(S)$ un espace tonnelé séparé et $F(T)$ un espace de Fréchet; une application linéaire fermée u de $E(S)$ dans $F(T)$ est continue. En effet, soient V un voisinage de l'origine absolument convexe et $\{v_i\}$ une suite généralisée de $V^\circ \cap f(T_u)$, qui converge vers v dans F'. Puisque $F(T_u)$ est tonnelé et que $\{v_i\}$ est une partie faiblement bornée de $F(T_u)'$, alors $\{v_i\}$ est T_u–équicontinue; par suite v appartient à $V^\circ \cap F(T_u)'$; on en déduit que $F(T_u)' = F'$ [2]. Il en résulte l'inclusion $\sigma(F, F') \subset T_u$ et comme $T_u \subset T$ tout voisinage convexe fermé de l'origine pour T est un voisinage de l'origine pour T_u ($F(T_u)$ est tonnelé), et donc $T_u = T$.

Plus généralement cette démonstration reste valable si on remplace l'espace de Fréchet $F(T)$ par un infra–(s)–espace tonnelé ([1], [5]); en effet on démontre qu' un infra–(s)–espace tonnelé est un espace in fra–Pták [5].

3°) Soient $E(S)$ un (C)–espace, $F(T)$ un espace de Fréchet séparable et u une application linéaire fermée de $E(S)$ dans $F(T)$; considérons un voisinage de l'origine V absolument convexe dans $F(T)$; $V^\circ \cap F(T_u)'$ est séquentillement faiblement fermé, ce qui montre que $F(T_u)' = F'$; il en résulte que u est faiblement continue.

4°) Remarquons que, si $E(S)$ est un (C)–espace, $F(T)$ un e.l.c. séparé quelconque et une application linéaire fermée de $E(S)$ dans $F(T)$, alors $F(T_u)'$ est faiblement séquentiellement fermé dans F'.

Donc, toute application linéaire fermée d' un (C)–espace dans un espace infra–Pták séparable est faiblement continue.

5°) Dans l'exemple 3, supposons que $E(S)$ soit un (M)–espace. On démontre de même que $F(T_u)' = F'$; par suite on a $\sigma(F, F') \subset T_u \subset T$. Soit, alors, V un voisinage de l'origine dans $F(T)$ absolument convexe et fermé; V° est faiblement compacte et métrisable dans $F(T_u)'$. Et puisque $F(T_u)$ est un (M)–espace, alrs V° est T_u–équicontinue; et donc $V^{\circ\circ} = V$ est un voisinage de l'origine dans $F(T_u)$. On en déduit que toute application linéaire fermée d'un (M)–espace dans un espace de Fréchet séparable est continue.

Les exemples, qu'on a choisis ici, sont très simples et bien connus et n'épuisent en aucun cas les résultats sur le Théorème du graphe fermé (voir bibliographie) pour lesquels on peut appliquer ce genre de démonstration.

IV. LES (xC)–espaces

Soient $F(T)$ un e.l.c. séparé et (x) une propriété de certains e.l.c. particuliers; $F(T)$ est dit (xC)–espace si pour toute topologie localement convexe séparée $T_\circ$ moins fine que T, on a $T \subset T_\circ^{x}$.

Proposition.– Soient $E(T)$, $F(T)$ deux e.l.c. et u une application linéaire de E dans F; si u: $E(S) \to F(T)$ est continue il en est de même de u: $E(S^x) \to F(T^x)$.

Démonstration.– En effet, il existe une famille $\{u_i\colon E_i(S_i) \to E\}_{i\in I}$; telle que S^x soit la topologie finale relative à cette famille, aù les $E_i(S_i)$ sont des (x)–espaces et les u_i des applications linéaires. Notons Z la topologie localement convexe finale relativement à la famille $\{uou_i\colon E_i(S_i) \to F\}_{i\in I}$; puisque uou_i: $E_i(S_i) \to E(S^x) \to F(T)$ est continue, pour tout $i \in I$, alors $T \subset Z$, et donc $T^x \subset Z^x = Z$ (car Z est une (x)–topologie). On en déduit que les applications composées uou_i: $E_i(S_i) \to E(S^x) \to F(T^x)$ sont continues, ce qui montre que u: $E(S^x) \to F(T^x)$ est continue.

Corollaire 1.– Soient $E(S)$, $F(T)$ deux e.l.c. et u une application linéaire de E dans F; si $E(S)$ est un $(\mathbf{x})$–espace alors u: $E(S) \to F(T)$ est continue si et seulement si u: $E(S) \to F(T^{\mathrm{x}})$ est continue.

On en déduit, en particulier, que pour toute application linéaire u d'un espace tonnelé $E(S)$ dans un espace localement convexe quelconque $F(T)$, u est continue si et seulement si u: $E(S) \to F(T^t)$ est continue [5]

Corollaire 2.– Soient $E(S)$, $F(S)$ deux e.l.c. et u une application linéaire de E dans F; si $E(S)$ et $F(T)$ sont des $(\mathbf{x})$–espaces il en est de même de $F(T_u)$.

Démostratión.– L'application u: $E(S) \to F(T_u)$ est continue, il résulte de la proposition que u: $E(S) \to F(T^{\mathrm{x}}_{\mathrm{u}})$ est continue. On a $T^{\mathrm{x}}_{\mathrm{u}} \subset T$; et puisque T_u est la topologie localement convexe la plus fine des topologies localement convexes, moins fines que T, qui rendent continue l'application u: $E(S) \to F$, alors les topologies $T^{\mathrm{x}}_{\mathrm{u}}$ et T_u sont identiques.

Corollaire 3.– Soient $E(S)$, $F(T)$ deux e.l.c. séparés et u une application linéaire fermée de $E(S)$ dans $F(T)$; si $E(S)$ et $F(T)$ sont des $(\mathbf{x}_s)$–espaces il en est de même de $F(T_u)$.

Remarque.– Les corollaires 2 et 3 découlent immédiatement de la remarque donnée au début du paragraphe II.

Corollaire 4 [6].– Soit $F(T)$ un e.l.c. séparé; les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) $F(T)$ est un (xC)–espace.
b) Pour tout $(\mathbf{x}_s)$–espace $E(S)$, toute application linéaire fermée u de $E(S)$ dans $F(T)$ est continue.
c) Pour tout espace localement convexe séparé $E(S)$ et toute application linéaire fermée de $E(S)$ dans $F(T)$, on a $T \subset T^{\mathrm{x}}_{u}$.

Demonstration.– *c*) $\Rightarrow$ *b*). Supposons que la propriété *c*) soit vérifiée; et soient $E(S)$ un $(\mathbf{x}_s)$–espace et u une application -linéaire fermée de $E(S)$

dans $F(T)$, u: $E(S) \to F(T_u)$ est continue; par suite u: $E(S) \to F(T_u^x)$ est continue. Et, donc, u: $E(S) \to F(T)$ est continue.

Les implications $b) \Rightarrow c)$ et $a) \Rightarrow c)$ sont évidentes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADASCH, N.: Tonnelierte Raume und zwei Sätze von Banach. *Math. Ann.* 186, 209–214 (1970)

[2] BOURBAKI, N.: Espaces vectoriels topologiques. Chapitres 1 à 5. Masson, Paris (1981).

[3] HUSAIN, D. and KHALLEELULLA, S. M.: Barrelledness in Topological and Ordered Vector Spaces. Lectures Notes in Mathematics, 692 (1978).

[4] KALTON, N. J.: Some forms of the closed graph theorem. Proc. Cambridge. Phil. 70. 401–408 (1971).

[5] KOTHE, G.: Topological Vector Spaces II. Springer Verlag (1979).

[6] POWELL, M.: On Komura's closed graph theorem. Trans. Amri. *Math. Soci.* 211, 391–426 (1975).

[7] VALDIVIA, M.: Topics in locally convex spaces. North–Holland Mathematics Studies, 67. Notas de Matemática, 85. North–Holland Publishing Compagny. XIII, 510p (1982)

Université Paul Sabatier
U.E.R. de Mathématiques
Toulouse

Nouvelle adresse:
Université Hassan II
Faculté des Sciences II
Casablanca