Dualidad del espacio $(H(\Omega, F), \tau_o)$

Por Domingo Garcia Rodriguez

Recibido: 10 octubre 1984

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia

Abstract

In this article we give a representation of the dual of the space of holomorphic functions defined on certain open subsets of a Silva space with values in a Fréchet space, endowed with the compact open topology. The strong topology on this dual is also studied.

Resumen

En este artículo damos una representación del dual del espacio de las funciones holomorfas definidas sobre ciertos abiertos de un espacio de Silva con valores en un espacio de Fréchet, dotado de la topología compacta abierta. También estudiamos la topología fuerte sobre este dual.

Todos los espacios vectoriales usados aquí están definidos sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. En lo que sigue la palabra "espacio" quiere decir "espacio localmente convexo separado". Salvo que se diga expresamente lo contrario, E será el dual topológico de un espacio de Fréchet H, dotado de la topología $\lambda(H', H)$ de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de H, Ω será un subconjunto abierto, equilibrado y holomórficamente convexo de E y F un espacio de Fréchet cuya topología viene definida por la sucesión creciente de seminormas $(p_n\colon\ n = 1, 2, \ldots)$.

Es conocido, por [8] Prop. 9, que Ω con la topología inducida por $\lambda(H', H)$ es un hemicompacto y K_R-espacio. Así, en Ω es posible encontrar una sucesión fundamental creciente de subconjuntos compactos $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que podemos tomar equilibrados. El espacio $H(\Omega, F)$ de las funciones holomorfas definidas en Ω con valores en F, tiene estructura de espacio de Fréchet, considerando sobre él la topología compacta abierta τ_0 generada por el sistema de seminormas

$$(\|\cdot\|_{n, k_m})_{n, m \in \mathbb{N}},$$

donde dado $A \subset E$ y $n \in \mathbb{N}$, escribimos

---

* Este trabajo ha sido realizado bajo la dirección del Prof. Dr. M. Valdivia en el Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia.

$$\|g\|_{n,A} = \sup \{p_n(g(x)) \colon x \in A\}, \qquad \text{para} \qquad g \in H(\Omega, F).$$

Usaremos notaciones standard en holomorfía infinita (véase [2] y [3]). Cuando nos referimos al dual $(\mathcal{P}(^jE, F))'$, $j \in \mathbb{N}$, se habrá considerado en $\mathcal{P}(^jE, F)$, para hallar el dual, la topología compacta abierta. Dado

$$\mu \in (\mathcal{P}(^jE, F))',$$

denotaremos

$$\|\mu\|_{n,K} = \sup \{|\langle P, \mu\rangle| \colon \|P\|_{n,K} \leqslant 1\}, \qquad P \in \mathcal{P}(^jE, F),$$

con $n \in \mathbb{N}$ y K un compacto de E; supremo éste, que puede ser infinito. Cuando sea finito y $\alpha \in \mathbb{C} \sim \{0\}$, se cumple:

$$\|P\|_{n,\alpha K} = |\alpha|^j \, \|P\|_{n,K}, \qquad \text{para todo} \qquad P \in \mathcal{P}(^jE, F)$$

y

$$\|\mu\|_{n,\alpha K} = |\alpha|^{-j} \, \|\mu\|_{n,K}, \qquad \text{para todo} \qquad \mu \in (\mathcal{P}(^jE, F))'.$$

Lema 1.– Sea E un espacio. Sea Ω un subconjunto de E, abierto y equilibrado. Sea $K \subset \Omega$ un conjunto compacto. Entonces existe un número real $\alpha > 1$, tal que $\alpha K \subset \Omega$.

Demostración.– Basta probar que existe un número real $0 < \beta < 1$, tal que $K \subset \beta\Omega$. Veamos que

$$\Omega = \bigcup_{0<r<1} r\Omega.$$

Debido a que Ω es equilibrado, se tiene que $r\Omega \subset \Omega$, para todo $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < 1$. Recíprocamente, sea $x \in \Omega$, $x \neq 0$, entonces existe V entorno de cero, absolutamente convexo, tal que $x + V \subset \Omega$. Puesto que V es absorbente, podemos encontrar un número real $\lambda_0 > 0$ tal que

$$\lambda_0 x \in V,$$

y así

$$x + \lambda_0 x \in \Omega,$$

y resulta que

$$x \in r_0 \Omega,$$

siendo

$$r_0 = (1 + \lambda_0)^{-1}.$$

Con esto,

$$K \subset \bigcup_{0<r<1} r\Omega$$

y al ser K compacto, existen $r_1, ..., r_n$, tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} r_i\Omega.$$

Llamando $\beta = \max(r_1, ..., r_n)$, queda

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} r_i\Omega \subset \beta\Omega \qquad \text{q.e.d.}$$

Definición 2.– Para cada $f \in H(\Omega, F)$, definimos $\rho_{n,K}(f)$, de la siguiente manera:

$$\rho_{n,K}(f) = (\overline{\lim_{j \in \mathbb{N}}} \; \|P_j\|_{n,K}^{1/j})^{-1}$$

donde

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j$$

es la serie de Taylor de f en el origen, $n \in \mathbb{N}$ y $K \subset \Omega$ es compacto.

Proposición 3.– Sea

$$f \in H(\Omega, F) \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} P_j$$

su serie de Taylor en el origen, entonces para todo $K \subset \Omega$ compacto y todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\rho_{n,K}(f) > 1$.

Demostración.– Sea $n \in \mathbb{N}$, $K \subset \Omega$ compacto. Sea

$$A_m(f)(x) = \sum_{j=0}^{m} P_j(x), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Por Lema 1, existe $\alpha > 1$ tal que $\alpha K \subset \Omega$, y por [2] Prop. 1.14, se tiene que para cada compacto D y cada seminorma continua β de F,

$$\lim_{m \in \mathbb{N}} \beta(f(x) - (A_m f)(x)) = 0$$

uniformemente para $x \in D$, luego existe $m_1 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ con $m \geqslant m_1$ se cumple que

$$\sup_{x \in \alpha K} p_n(f(x)) \leqslant 1.$$

Así,

$$\|P_m\|_{n,K} = \alpha^{-m} \; \|A_m f - A_{m-1} f\|_{n,\alpha K} \leqslant 2\alpha^{-m},$$

para todo $m \geqslant m_1$. Por tanto

$$\overline{\lim_{m \in \mathbb{N}}} \; \|P_m\|_{n,K}^{1/m} \leqslant \frac{1}{\alpha} \qquad \text{y} \qquad \rho_{n,K}(f) \geqslant \alpha > 1. \qquad \text{q.e.d.}$$

Proposición 4.– Sea A un subconjunto de $(H(\Omega, F), \tau_0)$ acotado y $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos tal que

$$\overline{\lim_{n \in \mathbb{N}}} \; |\alpha_n|^{1/n} \leqslant 1,$$

entonces

$$\{\frac{1}{n!} \alpha_n \, \hat{d}f(0): \; f \in A, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

es un subconjunto acotado de $(H(\Omega, F), \tau_0)$.

Demostración.– Sea $K \subset \Omega$ un subconjunto compacto que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer equilibrado y sea $\delta > 1$ tal que $\delta K \subset \Omega$. Entonces, por [2] Prop. 2.12,

$$\frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0)(x) = (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda| = \delta} \frac{f(\lambda x)}{\lambda^{j+1}} d\lambda, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Así, si $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0)\|_{n,K} \leqslant \delta^{-j} \sup_{\substack{|\lambda| = \delta \\ x \in K}} p_n(f(\lambda x)) \leqslant \delta^{-j} \|f\|_{n, \delta K}.$$

Pero, por otra parte,

$$\sup_{f \in A} \|f\|_{n, \delta K} = M(n, \delta K, A) < +\infty, \qquad \text{y} \qquad |\alpha_n| \leqslant C\,\delta^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, con $C > 0$. Luego

$$\sup_{\substack{f \in A \\ j \in \mathbb{N}}} \|\frac{\alpha_j}{j!} \hat{d}^j f(0)\|_{n,K} \leqslant |\alpha_j|\, \delta^{-j} M(n, \delta K, A) \leqslant C M(n, \delta K, A) < +\infty.$$

Esto completa la prueba.

q.e.d.

Sabemos que para cada $j \in \mathbb{N}$, la topología inducida sobre $\mathcal{P}(^jE, F)$ por $(H(\Omega, F), \tau_0)$ es la topología compacta abierta. Luego, para cada $\mu \in (H(\Omega, F), \tau_0)'$, la restricción μ_j a $\mathcal{P}(^jE, F)$ satisface $\mu_j \in (\mathcal{P}(^jE, F))'$.

Proposición 5.– Para cada sucesión $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de funcionales $\mu_j \in (\mathcal{P}(^jE, F))'$, son equivalentes:

(i) Para cada subconjunto $A \subset (H(\Omega, F), \tau_0)$ acotado, la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \langle \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0), \quad \mu_j \rangle$$

es absoluta y uniformemente convergente cuando f recorre A.

(ii) Para cada $f \in H(\Omega, F)$, la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \langle \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0), \quad \mu_j \rangle$$

es absolutamente convergente.

(iii) Para cada $f \in H(\Omega, F)$, la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \langle \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0), \quad \mu_j \rangle$$

es convergente.

(iv) La aplicación

$$\mu : f \longrightarrow \langle f, \mu \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0), \quad \mu_j \rangle$$

con $f \in H(\Omega, F)$, define un elemento $\mu \in (H(\Omega, F), \tau_0)'$.

Demostración.– (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) son obvias. Veamos (iii) $\Rightarrow$ (iv).

La aplicación que tenemos en (iv) está bien definida y es lineal. Dado $K \subset E$ compacto que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer equilibrado, existe $\rho > 0$ tal que $\rho K \subset \Omega$, al ser Ω un entorno del origen; y por [2] Prop. 4.12,

$$\| \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0) \|_{n,K} \leqslant \rho^{-j} \sup_{x \in \rho K} p_n(f(x)) = \rho^{-j} \, \|f\|_{n, \rho K} .$$

Así, la aplicación

$$f \longmapsto \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0)$$

es continua, tomando la topología compacta abierta en $H(\Omega, F)$ y en $\mathcal{P}(^jE, F)$. Por tanto, la aplicación

$$f \longmapsto \langle \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0), \quad \mu_j \rangle$$

es un elemento de $(H(\Omega, F), \tau_0)'$. Puesto que $(H(\Omega, F), \tau_0)$ es tonelado, $(H(\Omega, F), \tau_0)'$ es débil sucesionalmente completo, con lo que

$$\mu: f \longmapsto \langle f, \mu\rangle = \lim_{j \in \mathbb{N}} \sum_{h=0}^{j} \langle \frac{1}{h!} \hat{d}^h f(0), \mu_h\rangle$$

es continua sobre $(H(\Omega, F), \tau_0)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). La aplicación $p_\mu: f \longmapsto p_\mu(f) = |\langle f, \mu\rangle|$, $f \in H(\Omega, F)$, define una seminorma continua sobre $(H(\Omega, F), \tau_0)$.

Sea A un subconjunto acotado de $(H(\Omega, F), \tau_0)$, entonces el conjunto

$$\{\frac{j^2}{j!} \hat{d}^j f(0): \ f \in A, \quad j \in \mathbb{N}\}$$

es acotado en $(H(\Omega, F), \tau_0)$, por Proposición 4, y así existe una constante $M(A, \mu) > 0$ tal que

$$p_\mu (\frac{j^2}{j!} \hat{d}^j f(0)) = |\langle \frac{j^2}{j!} \hat{d}^j f(0), \ \mu_j\rangle| \leqslant M(A, \mu),$$

para todo $f \in A$ y $j \in \mathbb{N}$. Luego

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |\langle \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0), \ \mu_j\rangle| =$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{N}} p_\mu (\frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0)) \leqslant M(A, \mu) \sum_{j \in \mathbb{N}} j^{-2}. \qquad \text{q.e.d.}$$

De esta forma, tenemos establecido un isomorfismo algebraico entre $(H(\Omega, F), \tau_0)'$ y el espacio vectorial de las sucesiones

$$\mu = (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n=0}^{\infty} (\mathcal{P}(^nE, F))',$$

tal que

$$\langle f, \mu\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(0), \ \mu_n\rangle$$

es convergente para todo $f \in H(\Omega, F)$.

Proposición 6.– El dual topológico $(H(\Omega, F), \tau_0)'$ de $(H(\Omega, F), \tau_0)$ es isomorfo algebraicamente al espacio vectorial de las sucesiones

$$\mu = (\mu_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \prod_{j=0}^{\infty} (\mathcal{P}(^jE, F))'$$

tal que

$$\overline{\lim_{j \in \mathbb{N}}} \; \|\mu_j\|_{n,K}^{1/j} < 1,$$

para algún $K \subset \Omega$ compacto equilibrado y algún $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.— Por la proposición anterior, sabemos que

$$f \longmapsto |\langle f, \mu\rangle| = |\sum_{j=0}^{\infty} \langle \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0), \; \mu_j\rangle|$$

es una seminorma continua sobre $(H(\Omega, F), \tau_0)$. Luego existe $C \geqslant 0$, tal que

$$|\langle f, \mu\rangle| = |\sum_{j=0}^{\infty} \langle \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0), \; \mu_j\rangle| \leqslant C \; \|f\|_{n,K_m} \qquad \text{para} \qquad f \in H(\Omega, F).$$

Fijamos $j \in \mathbb{N}$ y aplicamos esta desigualdad a los polinomios de $\mathcal{P}(^jE, F)$. De esta forma, $\|\mu_j\|_{n,K_m} \leqslant C$. Tomamos $\alpha > 1$ tal que $\alpha K_m \subset \Omega$ y así $\|\mu_j\|_{n,\alpha K_m} \leqslant C\alpha^{-j}$. Por tanto,

$$\overline{\lim_{j \in \mathbb{N}}} \; \|\mu_j\|_{n,\alpha K_m}^{1/j} \leqslant \frac{1}{\alpha} < 1.$$

Por otra parte, sea

$$\mu = (\mu_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \prod_{j=0}^{\infty} (\mathcal{P}(^jE, F))',$$

tal que

$$\overline{\lim_{j \in \mathbb{N}}} \; \|\mu_j\|_{n,K}^{1/j} = r < 1,$$

para algún $n \in \mathbb{N}$ y $K \subset \Omega$ compacto equilibrado. Sea $\sigma \in \mathbb{R}$, tal que $r < \sigma < 1$, y así,

$$\overline{\lim_{j \in \mathbb{N}}} \; \|\mu_j\|_{n,\sigma K}^{1/j} = \frac{r}{\sigma} < 1,$$

luego si $\varepsilon > 0$, existe $L \geqslant 0$ tal que

$$\|\mu_j\|_{n,\sigma K} \leqslant L \left(\frac{r}{\sigma} + \varepsilon\right)^j, \qquad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Por Proposición 3, sabemos que $\rho_{n,\sigma K}(f) > 1$ para $f \in H(\Omega, F)$ fijada. Supongamos $\rho_{n,\sigma K}(f) < +\infty$. Sabemos que

$$\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(0) \|_{n,\sigma K} \leqslant M (\rho_{n,\sigma K}(f) - \varepsilon)^{-j},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, con M una constante positiva. Podemos suponer ε tal que $r/\sigma + \varepsilon < \rho_{n,\sigma K}(f) - \varepsilon$, y queda

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\langle \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(0), \mu_m \rangle| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(0) \|_{n,\sigma K} \| \mu_m \|_{n,\sigma K} \leqslant$$

$$\leqslant M L \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r/\sigma + \varepsilon}{\rho_{n,\sigma K}(f) - \varepsilon} \right)^m < +\infty.$$

Si $\rho_{n,\sigma K}(f) = +\infty$, entonces

$$\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(0) \|_{n,\sigma K'} \leqslant H \varepsilon^j,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, con H una constante real positiva. Podemos suponer ε tal que

$$\varepsilon \left(\frac{r}{\sigma} + \varepsilon \right) < 1$$

y queda

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\langle \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(0), \mu_m \rangle| \leqslant H L \sum_{m=0}^{\infty} \left(\varepsilon \left(\frac{r}{\sigma} + \varepsilon \right) \right)^m < +\infty. \qquad \text{q.e.d.}$$

En la proposición anterior, no sólo es válido

$$\overline{\lim_{j \in \mathbb{N}}} \| \mu_j \|_{n,K}^{1/j} < 1,$$

para algún $n \in \mathbb{N}$ y $K \subset \Omega$ compacto equilibrado, sino que también

$$\overline{\lim_{j \in \mathbb{N}}} \| \mu_j \|_{m,K'}^{1/j} < 1,$$

para todo $m \geqslant n$ y todo K' compacto equilibrado tal que $\Omega \supset K' \supset K$.

Definición 7.– Para cada $n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{R}$ con $0 < r < 1$ definimos $S_r(n, l, F)$ como el espacio vectorial de las sucesiones

$$\mu = (\mu_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \prod_{j=0}^{\infty} (\mathcal{P}(^jE, F))'$$

tal que existe $N_\mu \geqslant 0$, de modo que,

$$\|\mu_j\|_{n, K_l} \leqslant N_\mu \, r^j, \qquad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Fácilmente, por Proposición 6,

$$(H(\Omega, F), \tau_0)' = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ l \in \mathbb{N} \\ 0 < r < 1}} S_r(n, l, F).$$

LA TOPOLOGIA FUERTE SOBRE (H (Ω, F), τ_0)'

Definición 8.— En cada $S_r(n, l, F)$, $n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, $0 < r < 1$, definimos

$$\|\mu\|_{n, K_l, r} = \sup_{j \in \mathbb{N}} r^{-j} \|\mu_j\|_{n, K_l} \qquad \text{con} \qquad \mu = (\mu_j)_{j \in \mathbb{N}} \in S_r(n, l, F).$$

Proposición 9.— $\|\cdot\|_{n, K_l, r}$ es una norma en $S_r(n, l, F)$, $n, l \in \mathbb{N}$, $0 < r < 1$.

Demostración.— Claramente es una seminorma. Veamos que define una topología separada. Sea σ la topología débil sobre $(H(\Omega, F), \tau_0)'$, relativa al par dual $\langle (H(\Omega, F), \tau_0)', (H(\Omega, F), \tau_0) \rangle$, y sea

$$I\colon (S_r(n, l, F), \ \|\cdot\|_{n, K_l, r}) \longrightarrow ((H(\Omega, F), \tau_0)', \ \sigma)$$

la inclusión.

Sea

$$U = \{\mu \in (H(\Omega, F), \tau_0)' \colon \sup_{q = 1, \dots, m} |\langle f_q, \mu \rangle| \leqslant \varepsilon\},$$

donde $f_q \in H(\Omega, F)$ para $q = 1, \dots, m$ y $\varepsilon > 0$, un entorno de cero para la topología σ. Entonces, construimos

$$V = \{\mu = (\mu_j)_{j \in \mathbb{N}} \in S_r(n, l, F) \colon \sup_{j \in \mathbb{N}} r^{-j} \|\mu_j\|_{n, K_l} \leqslant \varepsilon\},$$

y veremos que un múltiplo de éste, está contenido, a través de I, en U.

Tomamos $\alpha < 1$, tal que $\alpha K_l \subset \Omega$. Por [2] Prop. 2.12,

$$\frac{1}{j!} \hat{d}^j f_q(0)(x) = (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda| = \alpha} \frac{f_q(\lambda x)}{\lambda^{j+1}} \, d\lambda$$

para cada f_q, $q = 1, ..., m$, para todo $j \in \mathbb{N}$ y todo $x \in K_l$. Luego

$$\sup_{q=1,...,m} \| \frac{1}{j!} \hat{d}^j f_q (0) \|_{n, K_l} \leqslant \alpha^{-j} \sup_{q=1,...,m} \|f_q\|_{n, \alpha K_l} = \alpha^{-j} M_{\alpha, l},$$

donde

$$M_{\alpha, l} = \sup_{q=1,...,m} \|f_q\|_{n, \alpha K_l}.$$

Además

$$\sup_{\mu \in V} \|\mu_j\|_{n, K_l} \leqslant \varepsilon\, r^j,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, por tanto

$$\sup_{\substack{\mu \in V \\ q=1,...,m}} \sum_{j=0}^{\infty} |\langle \frac{1}{j!} \hat{d}^j f_q (0), \mu_j \rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{\mu \in V \\ q=1,...,m}} \sum_{j=0}^{\infty} \| \frac{1}{j!} \hat{d}^j f_q (0) \|_{n, K_l} \|\mu_j\|_{n, K_l} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon M_{\alpha, l} \sum_{j=0}^{\infty} (\frac{r}{\alpha})^j = \varepsilon M_{\alpha, l}\, \alpha (\alpha - r)^{-1}.$$

Resulta, así, que

$$I((\alpha - r)(\alpha M_{\alpha, l})^{-1} V) \subset U. \qquad \text{q.e.d.}$$

Proposición 10.— Para todo $n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, $0 < r < 1$, el espacio $(S_r(n, l, F), \|\cdot\|_{n, K_l, r})$ es un espacio de Banach.

Demostración.— Sea $(\mu^q)_{q \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(S_r(n, l, F), \|\cdot\|_{n, K_l, r})$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $q_0 \in \mathbb{N}$, tal que para cada $q, t \geqslant q_0$ se verifica

(i) $\|\mu^q - \mu^t\|_{n, K_l, r} < \varepsilon$, con lo que para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene

(ii) $\|\mu_j^q - \mu_j^t\|_{n, K_l} \leqslant r^{-j} \|\mu_j^q - \mu_j^t\|_{n, K_l} < \varepsilon$ y, por tanto,

$$|\langle f, \mu_j^q - \mu_j^t \rangle| = |\langle f, \mu_j^q \rangle - \langle f, \mu_j^t \rangle| < \varepsilon,$$

para cada $f \in \mathcal{P}({}^jE, F)$, tal que $\|f\|_{n, K_l} \leqslant 1$.

Debido a que el conjunto

$$\{f \in \mathcal{P}({}^jE, F) \colon \|f\|_{n, K_l} \leqslant 1\}$$

es absorbente, resulta que $(\mu_j^q)_{q \in \mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente de Cauchy de $(\mathcal{P}({}^jE, F))'$, y como $(\mathcal{P}({}^jE, F))'$ es un espacio débil sucesionalmente completo, al ser $\mathcal{P}({}^jE, F)$ tonelado con la topología compacta abierta, resulta que existe $\bar{\mu}_j \in (\mathcal{P}({}^jE, F))'$ tal que $(\langle f, \mu_j^q \rangle)_{q \in \mathbb{N}}$ converge a $\langle f, \bar{\mu}_j \rangle$ para cada $f \in \mathcal{P}({}^jE, F)$.

Haciendo primero tender t a ∞ en la desigualdad (ii), resulta que

$$\bar{\mu} = (\bar{\mu}_j)_{j \in \mathbb{N}} \in S_r(n, l, F)$$

y después en (i), hace que $(\mu^q)_{q \in \mathbb{N}}$ converja a $\bar{\mu}$ en $(S_r(n, l, F), \|\cdot\|_{n, K_l, r})$, lo que completa la prueba.

q.e.d.

Llamamos γ a la topología límite inductivo asociada a $(H(\Omega, F), \tau_0)'$ con el sistema $(S_r(n, l, F), \|\cdot\|_{n, K_l, r})$, $n, l \in \mathbb{N}$, $0 < r < 1$. Si por β denotamos la topología fuerte sobre el espacio $(H(\Omega, F), \tau_0)'$, relativa al par dual $\langle (H(\Omega, F), \tau_0)', (H(\Omega, F), \tau_0) \rangle$, resulta:

Proposición 11.— La topología γ es más fina que la topología β.

Demostración.— Teniendo en cuenta quien es γ, basta probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, $0 < r < 1$, la aplicación inclusión

$$I: (S_r(n, l, F), \|\cdot\|_{n, K_l, r}) \longrightarrow ((H(\Omega, F), \tau_0)', \beta)$$

es continua. Ahora, la prueba se sigue como en Proposición 9.

q.e.d.

Proposición 12.— Las topologías γ y β tienen los mismos subconjuntos acotados en $(H(\Omega, F), \tau_0)'$.

Demostración.— Por la proposición anterior, es suficiente probar que cada subconjunto A acotado de $(H(\Omega, F), \tau_0)'$ para la topología β lo es para la topología γ.

Por ser $(H(\Omega, F), \tau_0)$ un espacio de Fréchet, es tonelado y, por tanto, A es un equicontinuo, con lo que existe un entorno del origen U en $(H(\Omega, F), \tau_0)$,

$$U = \{f \in H(\Omega, F): \|f\|_{n, K} \leqslant \varepsilon\}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, K es un subconjunto compacto equilibrado de Ω y $\varepsilon > 0$, tal que A está contenido en el polar de U, esto es,

$$\sup_{\substack{\mu \in A \\ f \in U}} |\langle f, \mu \rangle| \leq 1.$$

Aplicando esto último a polinomios de $\mathcal{P}\,({}^jE, F)$, $j \in \mathbb{N}$, resulta que

$$\|\mu_j\|_{n,K} \leq \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \text{para todo} \quad \mu = (\mu_j)_{j \in \mathbb{N}} \in A.$$

Tomando ahora $r \in \mathbb{R}$ con $0 < r < 1$, tal que $r^{-1}K \subset \Omega$, queda

$$\sup_{\mu \in A} \|\mu_j\|_{n, r^{-1}K} \leq \frac{1}{\varepsilon} r^j,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Pero como $r^{-1}K$ es un compacto equilibrado de Ω, existe un $l \in \mathbb{N}$ tal que $r^{-1}K \subset K_l$ y, así,

$$\sup_{\mu \in A} \|\mu_j\|_{n, K_l} \leq \frac{1}{\varepsilon} r^j,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Esto prueba que A está contenido y es acotado en $(S_r\,(n, l, F),\ \|\cdot\|_{n, K_l, r})$, luego también en $((H\,(\Omega, F), \tau_0)', \ \gamma)$.

q.e.d.

Corolario 13.— Cualquier acotado de $((H\,(\Omega, F), \tau_0)', \ \beta)$ está contenido y es acotado en algún $(S_r\,(n, l, F), \ \|\cdot\|_{n, K_l, r})$ con $n, l \in \mathbb{N}$ y $0 < r < 1$.

Corolario 14.— γ es la topología bornológica asociada a la topología β sobre $(H\,(\Omega, F), \tau_0)'$.

Aplicando este corolario y [7] (§29.5(2)), obtenemos:

Corolario 15.— Sobre el espacio $(H\,(\Omega, F), \tau_0)'$, las topologías γ y la fuerte relativa al par dual $\langle (H\,(\Omega, F), \tau_0)', \ (H\,(\Omega, F), \tau_0)'' \rangle$ coinciden.

Teorema 16.— Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) El espacio $(H\,(\Omega, F), \tau_0)$ es distinguido.

(ii) El espacio $((H\,(\Omega, F), \tau_0)', \ \beta)$ es bornológico.

(iii) El espacio $((H\,(\Omega, F), \tau_0)', \ \beta)$ es tonelado o casi-tonelado.

(iv) Las topologías β y γ sobre $(H\,(\Omega, F), \tau_0)'$ coinciden.

Demostración.— Las equivalencias entre (i), (ii) y (iii) son conocidas por [7] (§29.5(3)), pues el espacio $(H(\Omega, F), \tau_0)$ es de Fréchet. La equivalencia entre (ii) y (iv) se obtiene aplicando Corolario 14.

q.e.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANSEMIL, J. M. Y PONTE, S.: *An example of quasi-normable Fréchet function space which is not a Schwartz space.* Advances in Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory. S. Machado, Ed. Springer-Verlag. Lecture Notes in Math., 843 (1981), 1-8.

[2] BARROSO, J. A.: *Introducción a la holomorfía en espacios localmente convexos.* Publicaciones de la Universidad de Valencia. 1980.

[3] DINEEN, S.: *Complex analysis in locally convex spaces.* North Holland Math. Studies. 57, 1981.

[4] GARCIA RODRIGUEZ, D.: *Holomorfía y desarrollos asintóticos en dimensión infinita.* Tesis. Valencia. 1984.

[5] ISIDRO, J. M.: *Topological duality on the function space* $(H_b(U, F), \tau_b)$. Proc. Roy. Irish Acad. 79A, (1979), 115-130.

[6] ISIDRO, J. M.: *On the distinguished character of the function spaces of holomorphic mappings of bounded type.* J. Fnal. Anal. 38, 2 (1980), 139-145.

[7] KÖTHE, G.: *Topological vector spaces I.* Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York. 1969.

[8] VALDIVIA, M.: *Interpolation on certain function spaces.* Proc. Roy. Irish Acad. 80A (1980), 178-189.

[9] VALDIVIA, M.: *Topics in locally convex spaces.* North Holland Math. Studies. 67, 1982.

Dpto. Teoría de Funciones

Facultad de Matemáticas
C/ Dr. Moliner, 50
BURJASOT (Valencia)
ESPAÑA